EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i1p001-024

Concepções manifestadas por licenciandos em matemática ao lidarem com tarefas envolvendo o conceito de anel[1]

Conceptions expressed by mathematics student's in dealing with tasks involving the concept of ring.

MARCELO SILVA DE JESUS[2]

ANGELA MARTA PEREIRA DAS DORES SAVIOLI[3]

Resumo

Este artigo apresenta alguns resultados de uma pesquisa que objetivou identificar e discutir por meio da Teoria APOS as concepções manifestadas por licenciandos em Matemática da Universidade Estadual de Londrina ao lidarem com tarefas envolvendo o conceito de Anel. Para tanto, realizamos a coleta de dados por meio de cinco tarefas aplicadas a 11 licenciandos concluintes da disciplina de Estruturas Algébricas. A partir dos registros escritos obtidos, identificamos as concepções (ação, processo, objeto, esquema) de cada um deles. O estudo evidenciou que cinco licenciandos ainda estavam na fase inicial da construção da concepção ação, quatro estudantes manifestaram ter a concepção ação, um estudante a concepção processo, um estudante a concepção objeto e nenhum estudante a concepção esquema.
***Palavras-chave**: Concepção de licenciandos em Matemática; Teoria APOS; Estrutura Algébrica Anel.*

Abstract

This article presents some results of a research aimed to identified and discussed, through APOS Theory, the conceptions of Mathematics students from Northern Paraná University, in order to accomplish tasks concerning the concept of Ring. For that we conducted the data collection through five tasks applied to 11 students who were concluding the subject Algebraic Structures. From written records obtained, identified the conceptions (action, process, object, schema), of each student. The research showed that after taking classes of Algebraic Structures, five students showed they were still ah the starting process of the construction of the conception-action of ring, four students the conception-action, one student constructed a conception-object, one student the conception-process, and no student showed to have constructed the conception-schema.
***Keywords**: Mathematics student's conception ; APOS theory ;, algebraic structure ring.*

[1] Este artigo é resultado da pesquisa de mestrado de um dos autores (JESUS, 2016), que contou com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).
[2] Mestre e Doutorando em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina, PR, e-mail: marcelo.sjesus@kroton.com.br
[3] Doutora em Matemática, USP - SP e Docente do Programa em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina, PR, e-mail: angelamarta@uel.br

Introdução

As estruturas algébricas ocupam um papel importante na Álgebra Abstrata, pela contribuição para o seu desenvolvimento. Elas integram não só o currículo do curso de Matemática, mas também currículos de cursos como Engenharias, Física e Computação. Segundo Kluth (2005), por meio das estruturas algébricas podemos explicitar aquilo que é semelhante entre distintas coleções de um mesmo objeto e entre objetos matemáticos distintos. Para Souza (2004), o ensino de estruturas algébricas em um curso de licenciatura em Matemática é fundamental, pois sem essa disciplina o aluno termina o curso sem os conhecimentos necessários para ensinar os princípios fundamentais da Matemática.

Apesar da sua importância, como explicitado acima, o ensino de estruturas algébricas em cursos de graduação não tem apresentado resultados satisfatórios para os estudantes, como observa Campos (2009) que atribui à abstração e ao formalismo o motivo de inúmeras das dificuldades apresentadas. Para a autora, os conceitos algébricos são tratados nas salas de aula, na maioria das vezes, a partir das definições formais, apoiadas na linguagem da teoria de conjuntos, em que as relações entre os objetos são mais importantes do que o próprio objeto.

De acordo com Dubinsky *et al*. (1994), o ensino da Álgebra Abstrata apresenta um sério problema educacional e geralmente é considerado pelos estudantes um dos assuntos mais perturbadores da graduação. Para esses autores, muitas das dificuldades apresentadas no curso de Álgebra Abstrata são decorrentes tanto do modo de lidar com o conteúdo quanto do próprio desenvolvimento de atitudes frente à Matemática abstrata.

Franco (2011) observa que os estudantes, mesmo ao final de um curso de licenciatura em Matemática, e, em princípio, já tendo estudado outros conteúdos matemáticos abstratos, demonstraram significativas dificuldades na resolução de exercícios envolvendo o conceito de Anel e Subanel, evidenciando uma dificuldade no formalismo algébrico.

Nesse sentido, concordamos com Mondini (2009), quando considera importante compreender as dificuldades que muitos licenciandos em Matemática têm na compreensão de conceitos matemáticos, sendo, portanto, necessária a abordagem de temas que discutam suas origens e suas diferentes manifestações.

Neste artigo apresentamos alguns resultados de uma pesquisa de mestrado desenvolvida pelo primeiro autor, cujo objetivo foi identificar e discutir as concepções ação, processo, objeto e esquema, à luz da Teoria APOS, manifestadas por licenciandos em Matemática ao lidarem com tarefas envolvendo o conceito de Anel. Assim, levantamos reflexões a respeito do ensino de conceitos da Álgebra Abstrata em cursos de licenciatura em Matemática.

A seguir, abordamos aspectos da Teoria APOS.

A Teoria APOS (Action, process, object, schema)

A Teoria APOS é entendida por Dubinsky e McDonald (2001, p. 1) como uma teoria construtivista de aprendizagem da Matemática. Segundo Dubinsky e McDonald (2001, p. 1), a teoria inicia-se com a hipótese de que o conhecimento matemático consiste na tendência de um indivíduo em lidar com situações-problema da Matemática por meio da construção mental de ações, processos e objetos, e organizá-los em esquemas que façam sentido e permitam resolver problemas. O termo APOS faz referência a essas construções mentais, que em inglês indicam action, process, object e schema, mas que, ao longo do artigo, indicaremos na nossa língua materna como ação, processo, objeto e esquema.

Segundo Asiala *et al*. (1996), foi no seio do Pensamento Matemático Avançado (PMA)[4] que se desenvolveu a Teoria APOS, pois ela constituiu-se durante a tentativa de Dubinsky de entender o mecanismo de abstração reflexiva[5], introduzido por Piaget para descrever o desenvolvimento do pensamento lógico em crianças e elevar ao nível da Matemática universitária, onde são estudados conceitos matemáticos mais complexos e avançados.

De acordo com Dubinsky (2002), a abstração reflexiva é um processo no qual os conhecimentos são construídos por meio de interações do sujeito conhecedor com a sua estrutura cognitiva adaptada, consciente e progressivamente reconstruída como resultado das interações continuadas com as últimas estruturas cognitivas adaptadas.

Dubinsky (2002) supõe que a abstração reflexiva seja como a construção de objetos mentais e ações mentais sobre estes objetos, e a partir dos tipos de construção citados (interiorização, encapsulação, generalização, coordenação e reversibilidade), o autor reconsiderou cada um deles em contextos do PMA, descrevendo como novos objetos, processos e esquemas que podem ser construídos a partir dos já existentes.

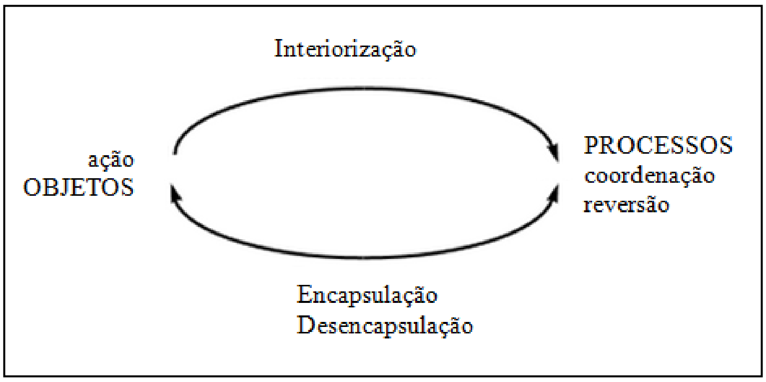
Em Asiala *et al*. (1996), a construção mental de uma noção matemática é descrita ao

[4] Segundo Harel, Selden e Selden (2006), o termo Pensamento Matemático Avançado (P.M.A) foi proposto em oposição ao “pensamento matemático elementar”. Não há um consenso quanto à definição do P.M.A., mas para Dubinsky (2002), esse tipo de pensamento ocorre quando se encapsula processos em objetos quando esses objetos não têm representação do “mundo real”.

[5]

considerar que a compreensão começa na manipulação de objetos físicos ou mentais em forma de ações. Estas são, então, interiorizadas em processos que são encapsulados em objetos matemáticos. Os objetos podem ser desencapsulados nos processos com base nos quais foram formados e, finalmente, as ações, os processos e os objetos podem ser organizados ou reorganizados em esquemas. Apresentamos, por meio da figura 1, uma descrição mais detalhada de cada uma dessas construções mentais.

Figura 1 – Construção do pensamento matemático



Fonte: Adaptado de Dubinsky (2003)

Apresenta-se, a seguir, uma descrição dos componentes essenciais da Teoria APOS: ação, processo, objeto e esquema.

Uma ação é uma transformação física ou mental de objetos. Essa transformação é percebida como algo exterior ao próprio sujeito, que a realiza considerando procedimentos e fatos que estão na memória.

Segundo Prado (2010), um exemplo de ação é a do estudante que, para esboçar o gráfico de uma função polinomial de primeiro grau, busca mais de dois pares ordenados que satisfaçam a lei que descreve a função.

Um indivíduo pode executar uma ação, mas não está necessariamente limitado a operar com ações. Ao limitar sua compreensão de uma dada noção à realização de ações, diz-se que ele possui uma concepção ação para tal noção.

Quando uma ação é repetida e o indivíduo reflete sobre isso, ele pode fazer uma construção mental interna chamada de processo. O indivíduo pode pensar em como executar o mesmo tipo de ação, mas sem a necessidade de estímulos externos, e pode pensar em realizar um processo sem realmente fazê-lo, e, com isso, pode invertê-lo e compô-lo com outros processos.

Um exemplo, considerado por Prado (2010) como processo, é o do estudante que, para esboçar o gráfico de uma função polinomial de primeiro grau, obtém dois pares de números que lhe possibilitam traçar a representação gráfica da reta.

Construído um processo, o indivíduo pode trabalhar com ele para construir novos processos, seja por reversibilidade ou coordenação com outros processos. O ato de transformar processos de uma forma consciente é, segundo Dubinsky (2002, p. 101), "uma construção necessária para a compreensão da Matemática".

De acordo com Dubinsky *et al*. (1994, p. 5), quando se torna possível a um indivíduo transformar um processo por meio de alguma ação, podemos dizer que o processo foi encapsulado para tornar-se um objeto.

Segundo Asiala *et al*. (1996), um indivíduo compreende classes laterais[6] como objetos quando pode pensar sobre o número delas em um subgrupo particular, imaginar a comparação de duas por igualdade ou por suas cardinalidades, ou aplicar uma operação binária para o grupo de todas as classes de um subgrupo.

Um esquema para um determinado conceito matemático é uma coleção de ações, processos, objetos e outros esquemas de um indivíduo, os quais são ligados por alguns princípios gerais para formar um quadro em sua mente, que pode ser exercido sobre uma situação-problema envolvendo esse conceito.

Os componentes da Teoria APOS, ação, processo, objeto e esquema, foram descritos neste texto baseando-se em uma sequência hierárquica. Para Dubinsky e McDonald (2001), esta é uma maneira útil de falar sobre essas construções e, em certo sentido, cada concepção na lista pode ser construída antes do passo seguinte. Porém, de acordo com esses autores, quando um indivíduo está desenvolvendo a sua compreensão de um conceito, as construções não são realmente feitas de uma forma tão linear.

Portanto, com base na teoria desenvolvida por Dubinsky e colaboradores é que analisaremos os registros escritos dos estudantes participantes desta pesquisa, com o objetivo de identificarmos e discutirmos as suas concepções a respeito do conceito de Anel.

Procedimentos metodológicos

Para identificar e discutir as concepções de licenciandos em Matemática para o conceito de Anel optamos por realizar uma pesquisa de natureza qualitativa, seguindo algumas

[6] Sejam G um grupo, e H um subgrupo. Seja a um elemento de G. O conjunto de todos os elementos ax, com pertencente à H, é chamado uma classe lateral de H em G, sendo denotado por aH (Lang, 1972, p. 24)

características descritas por Bogdan e Biklen (1994).

Os participantes da pesquisa foram 11 estudantes que estavam cursando a 2ª série do curso de Matemática – Habilitação: Licenciatura da Universidade Estadual de Londrina. A escolha foi feita por serem concluintes da disciplina de Estruturas Algébricas.

Após aceitarem o convite para participar da pesquisa, todos assinaram um termo de compromisso, em que eram informados a respeito da pesquisa, seus objetivos, a confidencialidade na omissão de suas identidades e que os registros seriam utilizados apenas para a pesquisa.

Aplicamos cinco tarefas, apresentadas a seguir, sendo algumas com subitens, e que foram antes validadas pelo grupo de pesquisa do qual os autores fazem parte. A aplicação do instrumento foi no dia 19 de novembro de 2014, na sala em que estudavam, no horário de aula da disciplina de Estruturas Algébricas.

As tarefas foram inspiradas ou adaptadas de tarefas encontradas em dissertações e livros de Álgebra, como Domingues e Iezzi (2003), Hefez (1993), Lang (1972), de modo que representassem situações diversas a respeito do conceito de Anel e que exigissem conhecimentos trabalhados pela professora da disciplina.

Os estudantes receberam folhas em branco para que pudessem resolver as tarefas e foram limitados a um tempo de três horas, mas ninguém levou mais do que duas para concluí-las. A seguir, apresentamos as tarefas, as justificativas para a aplicação de cada uma e possíveis resoluções que seriam consideradas corretas por nós.

Tarefa 1 - Um professor da disciplina de Estruturas Algébricas fez o seguinte questionamento aos seus alunos. "O que é um Anel? ", obtendo as seguintes respostas:

Aluno	Resposta
A	Um Anel é um conjunto numérico, munido das operações usuais de adição e multiplicação, que goza de determinadas propriedades;
B	Um Anel é um conjunto numérico, munido de duas operações, e goza de determinadas propriedades;
C	Um Anel é um conjunto qualquer que goza de determinadas propriedades;
D	Um Anel é um conjunto qualquer, não vazio, munido de duas operações, e que goza de determinadas propriedades.
E	Anel é um conjunto não vazio A e um par de operações sobre A.

Você concorda com alguma dessas respostas? Justifique sua escolha.

Se você não concorda com nenhuma dessas respostas, como responderia ao questionamento do professor?

A primeira tarefa consistia em uma situação fictícia em que um professor de Álgebra questiona aos seus alunos o que é um Anel e obtém cinco respostas diferentes. Os participantes deveriam escolher alguma com que concordassem ou apresentar uma diferente. Pretendíamos, com essa tarefa, obter indícios do modo como cada participante concebia o conceito de Anel, sendo importante que o concebesse como um sistema constituído de um conjunto não vazio, munido de duas operações binárias que satisfazem determinadas condições. Assim, esperávamos que os estudantes escolhessem a resposta dada por D.

Tarefa 2 - Numere a 2ª coluna de acordo com a primeira, considerando a seguinte pergunta: Quanto você pode falar dos itens apresentados na 2ª coluna?

1 – Nada	( )Propriedade associativa da adição
2 – Só lembro-me do nome	( )Propriedade comutativa da adição
3 – Posso tecer alguns comentários	( )Elemento neutro da adição
4 – Posso tecer vários comentários	( )Elemento oposto da adição
	( )Propriedade associativa da multiplicação
	( )Propriedade comutativa da multiplicação
	( )Elemento neutro da multiplicação
	( )Multiplicação é distributiva em relação à adição

De acordo com a numeração, para aqueles itens em que você marcou 3 ou 4, anote o que se lembrar.

Quais itens você acredita ter relação com a noção de Anel?

A segunda tarefa foi inspirada em Oliveira (2002). Ela consistia em apresentar aos participantes uma listagem com algumas propriedades matemáticas, associatividade, comutatividade, distributividade e elemento neutro. Para cada uma dessas propriedades, os participantes deveriam indicar o quanto poderiam comentar (por escrito): nada, só lembro-me do nome, posso tecer alguns comentários, posso tecer vários comentários. A partir disso, deveriam registrar o que se lembravam na folha e dizer quais acreditavam ter relação com o conceito de Anel. Pretendíamos, com essa tarefa, identificar o entendimento que os participantes possuíam de algumas propriedades das operações, e se conseguiam fazer associações com a estrutura algébrica Anel. Esperávamos que, de algum modo, os estudantes demonstrassem compreender as propriedades, como definido em Domingues e Iezzi (2003) e que todas elas possuíam relação com o conceito de Anel.

Tarefa 3 **-** Nos itens A até G, indique se as sentenças são verdadeiras ou falsas, e a partir disso, justifique matematicamente o motivo de sua escolha.

Item	Sentença	Verdadeiro	Falso	Justificativa da escolha
A	$(N, +, \cdot)$ é um Anel comutativo			
B	$(Q^{*}, +, \cdot)$ é um Anel sem unidade			
C	$(Z_4, +, \cdot)$ não é um Anel			
D	$(Q[\sqrt{P}], +, \cdot)$ não é um Subanel de $(R, +, \cdot)$			
E	$(\{0\} \times 2Z, +, \cdot)$ é Subanel de $(Z \times Z, +, \cdot)$			
F	Z_4 não é Subanel de Z_5			
G	$(M_2(N), +, \cdot)$ é um Anel			

A tarefa três consistia em solicitar aos participantes que julgassem algumas afirmações em verdadeiras ou falsas, justificando matematicamente suas decisões. Pretendíamos identificar se os participantes conseguiam concluir se um sistema, composto de um conjunto e as operações usuais de adição e multiplicação, é um Anel, um Anel comutativo, um Anel sem unidade ou um Subanel, e como faziam essa verificação. Além disso, identificar se os estudantes conheciam uma variedade de exemplos de Anéis e se sabiam lidar com uma variedade de conjuntos, numéricos ou não.

Tarefa 4 **-** (DOMINGUES e IEZZI, 2003, adaptado). Considerando as operações $*$ e $\#$ em Q definidas por:

$$x * y = x + y - 5 \qquad\qquad x \# y = x + y - \frac{xy}{5}$$

$(Q, \ *, \ \#)$ é um Anel? Justifique.

A tarefa quatro consistia em solicitar aos participantes que verificassem se um sistema com operações não usuais é um Anel. Pretendíamos, com essa tarefa, investigar se os participantes conseguiam lidar com operações não usuais, mostrando compreender o conceito de Anel por si só, a partir da definição formal, e não somente por meio de exemplos numéricos ou já conhecidos.

A análise dos dados ocorreu em dois momentos. O primeiro teve como objetivo descrever e discutir as resoluções dos estudantes em cada uma das tarefas propostas, enquanto a segundo teve o objetivo de interpretar essas resoluções, identificando, por meio da Teoria APOS, as concepções (ação, processo, objeto, esquemas) dos estudantes do conceito de Anel.

Após a coleta de dados, codificamos os protocolos obtidos de modo a manter em sigilo suas identidades, e à luz da análise de conteúdo, segundo Bardin (1977), fizemos as nossas análises.

Inicialmente, realizamos uma "leitura flutuante" que segundo Bardin (1977, p. 96) é a primeira atividade. Ela consiste em estabelecer contato com os documentos a serem analisados, "deixando-se invadir por impressões e orientações" (BARDIN, 1977, p. 96). As leituras seguintes, feitas de um mesmo aluno a cada vez, tinham como objetivo compreender como os estudantes lidavam com as tarefas propostas, para que, a partir dos caminhos percorridos por eles na tentativa de resolver uma determinada tarefa, pudéssemos em um segundo momento, interpretá-los à luz da Teoria APOS e identificarmos a concepção (ação, processo, objeto, esquema) de cada estudante sobre o conceito matemático Anel.

Análises dos registros escritos

Para tratar alguns dados desta pesquisa, apresentamos e discutimos as resoluções apresentadas por um estudante para as cinco tarefas propostas, por considerarmos que as análises feitas para os seus registros escritos exemplificam os caminhos seguidos por nós para todas as outras análises. Assim, fundamentados na Teoria APOS, interpretamos de modo a evidenciar a concepção (ação, processo, objeto, esquema) do estudante sobre o conceito de Anel. Discutimos, em seguida, de um modo geral, como os 11 estudantes lidaram com as tarefas propostas e suas concepções.

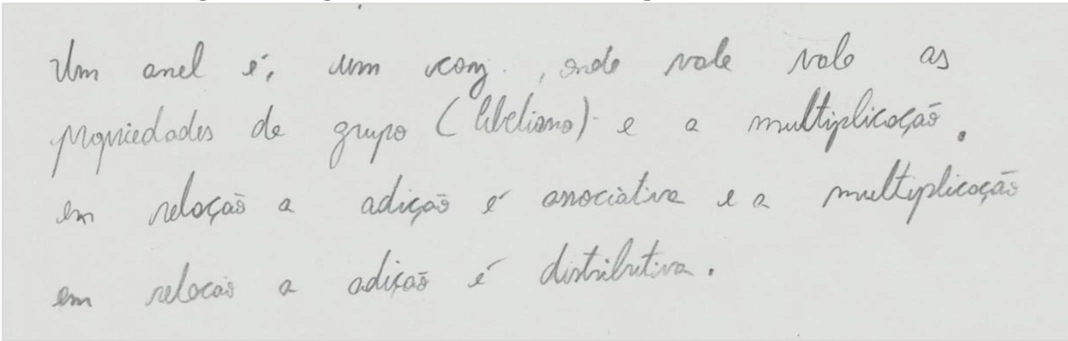
Atribuímos códigos para cada um dos estudantes, sendo eles E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10 e E11.

Estudante E2

Apresentamos a seguir a nossa análise do registro escrito do Estudante E2.

Na tarefa 1, o estudante E2 responde dizendo que não concorda com nenhuma das respostas apresentadas, e apresenta aquela que considera como a correta:

Figura 2 – Registro escrito do estudante E2 para o conceito de Anel


Um anel é, um conj. , onde vale todas as propriedades de grupo (abeliano) e a multiplicação. em relação a adição é associativa e a multiplicação em relação a adição é distributiva.

Fonte: resolução escrita pelo estudante E2

Percebemos por meio dessa definição que o estudante entende Anel como um conjunto e que as propriedades são secundárias. Por não ter especificado o conjunto ou o seu tipo, consideramos que E2 tenha interiorizado Anel como um conjunto qualquer, inclusive vazio.

Com relação às propriedades, o estudante se apoia nas propriedades de grupo abeliano, sem apresentá-las, e estende, acrescentando que a multiplicação em relação à adição deve ser associativa e distributiva.

Consideramos que E2 não tenha compreendido corretamente a propriedade associativa da multiplicação e da adição, pois as define utilizando duas operações distintas e não considera importante especificar para qual operação as propriedades de grupo abeliano devem sem gozadas.

Na tarefa 2, o estudante não apresentou comentários apenas para a distributividade da multiplicação em relação à adição. Para as demais, a definição é feita considerando-se uma operação não usual, porém, sem assumir elementos pertencentes a um conjunto não vazio.

Figura 3 – Registro escrito do estudante E2 para a propriedade associativa para a adição e para a multiplicação

2) $x \otimes (y + z) = x \otimes y + x \otimes z$

Fonte: resolução escrita pelo estudante E2

Consideramos que o estudante tenha utilizado características da propriedade distributiva ao definir a propriedade associativa, sendo importante que o mesmo desencapsule o objeto "propriedade associativa", tanto para a operação de adição quanto para a de multiplicação, de modo a entendê-la corretamente em função de uma operação e com a ideia de parênteses sendo associados de modos diferentes sem alterar a igualdade, e também considerar a condição $\forall\, x, y, z \in A$.

A propriedade comutativa é definida corretamente pelo estudante, tanto para a operação de adição quanto para a de multiplicação, apesar de não mencionar que a propriedade é válida para todo x, y, z pertencentes a um conjunto não vazio. Os elementos neutro e oposto da adição são definidos do seguinte modo:

Figura 4 – Registro escrito do estudante E2 para o conceito de elemento neutro e elemento oposto da adição

$x \oplus e = 1.$

$x \oplus (-x) = 0$

Fonte: resolução escrita pelo estudante E2

A partir do registro escrito apresentado na Figura 4, não conseguimos afirmar se o estudante considera e e $-x$ como elementos neutros, ou 1 e 0. Caso entenda como e e $-x$, consideramos que E2 não compreende corretamente o elemento neutro da adição, pois considera que um elemento x operado com o elemento neutro resulta em 1, em vez de resultar nele mesmo, ou seja, x. O mesmo acontece para o elemento oposto da adição, no qual o estudante considera que um elemento x operado com o seu oposto resulta em zero, em vez de resultar no elemento neutro do conjunto, possivelmente assumido por ele como e. Caso entenda como 1 e 0, consideramos que E2 esteja partindo de casos particulares ao invés de genéricos.

Na tarefa 3, o estudante não julgou como verdadeiro ou falso dois itens dos sete apresentados, entre eles o item B, “$(Q^*, +, \cdot)$ *é um Anel sem unidade”,* e o item E, “$(\{0\} \times 2Z, +, \cdot)$ *é Subanel de* $(Z \times Z, +, \cdot)$ ”.

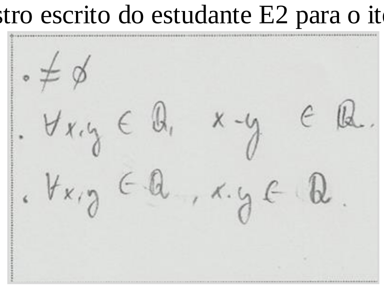
Para o primeiro item, “$(N, +, \cdot)$ *é um Anel comutativo”*, o estudante deixa claro que entende o conjunto N como o conjunto dos números naturais e considera corretamente a afirmação falsa, justificando que nem todo elemento do conjunto possui oposto para a operação de adição, não indicando apenas que o único a possuir é o zero. Percebemos assim que o estudante considera importante verificar primeiramente se o sistema dado é um Anel, antes de verificar se é comutativo.

Inferimos que ele não tenha feito o item B por não compreender o símbolo Q^*, isso porque o estudante o circulou e escreveu a palavra zero seguida de um ponto de interrogação, indicando estar em dúvida se o símbolo $*$ se referia ao zero. Não compreender a simbologia de conjuntos indica uma defasagem na aprendizagem da linguagem matemática, podendo dificultar que um estudante seja capaz de verificar para uma operação binária em um dado conjunto que duas operações (não necessariamente usuais) gozam da associatividade, da comutatividade, da existência do elemento neutro, da existência de opostos e que uma operação é distributiva em relação à outra.

Para o terceiro item, “$(Z_4, +, \cdot)$ *não é um Anel”*, E2 mostra que conhece o conjunto ao explicitar os seus elementos. Ele considera corretamente a afirmação falsa, justificando que todas as condições para ser Anel são satisfeitas, apesar de não apresentar e verificar essas condições, o que pode mostrar que ele tenha interiorizado a ação de verificar em processo.

No quarto item, o estudante julga corretamente a afirmação “$(Q, [\sqrt{p}], +, \cdot)$ *é Subanel de* $(R, +, \cdot)$” como sendo falsa. Sua justificativa é apresentada na Figura 5.

Figura 5 – Registro escrito do estudante E2 para o item D da tarefa 3

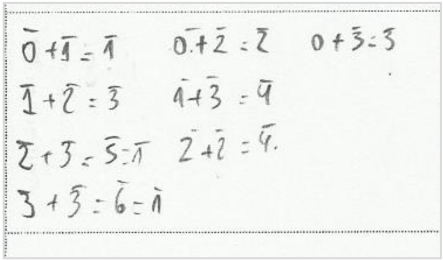


Fonte: resolução escrita pelo estudante E2

E2 mostra que compreendeu o processo de verificar um Subanel e que interiorizou a ação de verificar em um processo por não ter desenvolvido $x - y$ e $x \cdot y$.

Com relação ao item E, inferimos que o estudante teve dificuldades na compreensão dos conjuntos abordados, isto porque ele aplicou ações para verificar se um sistema é um Subanel no item anterior. Para o item F, "Z_4 *não é Subanel de* Z_5", o estudante julga corretamente a sentença como verdadeira e justifica com os cálculos apresentados na Figura 6.

Figura 6 – Registro escrito do estudante E2 para o item F da tarefa 3



$\bar{0}+\bar{1}=\bar{1}$ $\bar{0}+\bar{2}=\bar{2}$ $0+\bar{3}=\bar{3}$

$\bar{1}+\bar{2}=\bar{3}$ $\bar{1}+\bar{3}=\bar{4}$

$\bar{2}+\bar{3}=\bar{5}=\bar{1}$ $\bar{2}+\bar{2}=\bar{4}$.

$\bar{3}+\bar{3}=\bar{6}=\bar{1}$

Fonte: resolução escrita pelo estudante E2

Percebemos aqui que o estudante realizou ações diferentes das do quarto item, em que verificou as condições de um subconjunto de um Anel ser um Subanel. Neste item, E2 não assumiu Z_4 como sendo subconjunto de Z_5, e se propôs a fazer tal verificação.

Consideramos que o estudante entende que para $(A, +, \cdot)$ ser um Subanel de um dado Anel $(B, +, \cdot)$, não basta testar a diferença e o produto dos seus elementos, também é importante verificar que o conjunto A seja um subconjunto de B.

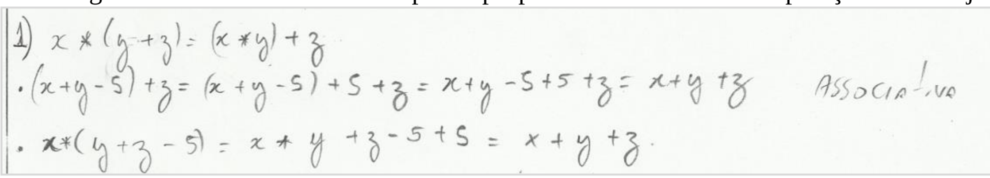
No item G, E2 considera corretamente a afirmação "$(M_2(N), +, \cdot)$ *é um Anel*" falsa, porém sua justificativa se refere apenas ao fato de não ser comutativo, e não ao fato de "$(M_2(N), +, \cdot)$ não ser um Anel.

Ao comparar essa resolução com a sua definição para o conceito de Anel na tarefa 1, inferimos que o estudante não saiba para qual operação a propriedade comutativa, implícita na definição de grupo abeliano, deve ser satisfeita.

Na tarefa 4, o estudante mostra não ter dificuldades para lidar com operações não usuais, e supondo que $x, y, z \in Q$, verifica as propriedades de um Anel para todo elemento $x, y, z \in Q$, seguindo cinco etapas definidas por ele como: 1) associativa, 2) comutativa, 3) elemento neutro, 4) elemento inverso e 5) distributiva.

Percebemos, na etapa 1, que o estudante verifica a propriedade associativa para as operações $*$ e $\#$ de um modo diferente do apresentado na tarefa 2. Anteriormente, aparentava uma confusão com a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição; nesse momento ele define associando os parênteses de modos diferentes, mas continua considerando duas operações. Para verificar a validade da propriedade, o estudante desenvolve o lado esquerdo e o lado direito com a intenção de chegar a uma igualdade, porém, ao desenvolver o lado esquerdo, adiciona "5", alterando a igualdade, e sem justificar, o mesmo é feito ao desenvolver o lado direito. Uma possível justificativa para tal escolha seria eliminar o " $-$ 5" das expressões.

Figura 7 – Registro escrito do estudante E2 para a propriedade associativa da operação $*$ no conjunto Q

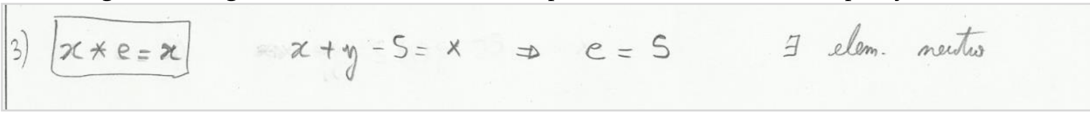


Fonte: resolução escrita pelo estudante E2

O estudante não especifica que os elementos assumidos x, y, z pertencem ao conjunto Q. Além disso, consideramos que assumir duas operações distintas tenha dificultado sua verificação, e que as manipulações algébricas aplicadas foram inadequadas. Assim, é importante que o estudante desencapsule a “propriedade associativa”, de modo a excluir uma das operações.

A partir das etapas 2 e 3, consideramos que E2 tenha compreendido e verificado corretamente a propriedade comutativa, assim como a existência do elemento neutro da operação $*$, porém, ao contrário do que havia feito na tarefa 2, definir apenas à esquerda da operação passa a ser suficiente, uma vez que a comutatividade foi verificada anteriormente. Além disso, ao aplicar a operação $*$ troca o e por y, seguindo a aplicação da operação apresentada no enunciado da tarefa, porém não consideramos que esse erro comprometa o entendimento do estudante para o conceito de elemento neutro.

Figura 8 – Registro escrito do estudante E2 para o elemento neutro da operação $*$ em Q

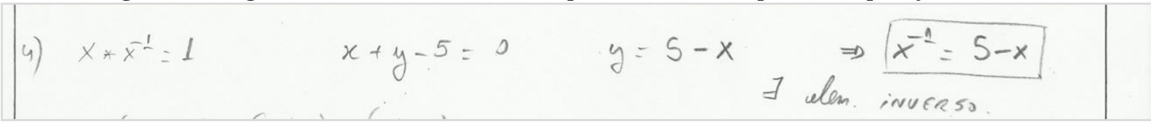


Fonte: resolução escrita pelo estudante E2

O estudante não especifica que os elementos supostos x, y, z pertencem ao conjunto Q. Além disso, verificar que todo elemento do conjunto admite oposto também apenas para à esquerda da operação indica certa confusão do estudante com o elemento oposto da multiplicação para conjuntos numéricos. Percebemos isso porque E2 define que

x operado por meio da operação $*$ com x^{-1} (chamado por ele de elemento inverso) resulta em 1. Logo em seguida, ele troca x^{-1} por y, assim como feito para o elemento neutro, e troca 1 por zero sem justificar.

Figura 9 – Registro escrito do estudante E2 para o elemento oposto da operação $*$ em Q

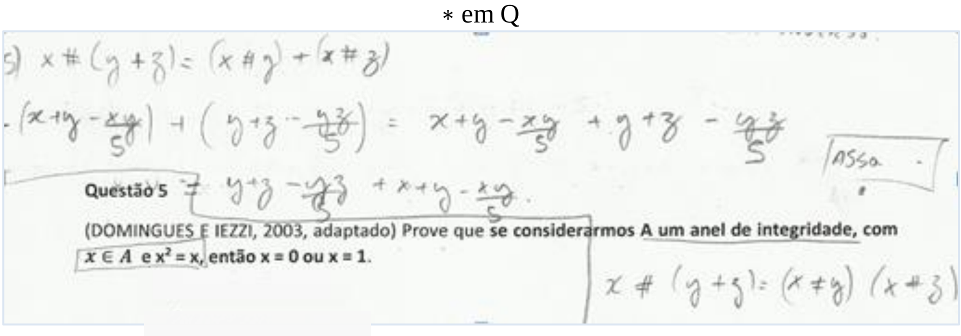

4) $x * x^{-1} = 1$ $\quad x + y - 5 = 0$ $\quad y = 5 - x$ $\quad \Rightarrow \boxed{x^{-1} = 5 - x}$

$\exists$ elem. inverso.

Fonte: resolução escrita pelo estudante E2

O estudante não especifica que os elementos supostos x, y, z pertencem ao conjunto Q. Na quinta etapa, que trata da distributividade da operação # em relação à operação $*$, o estudante demonstra dificuldade na verificação, na qual desenvolve parcialmente apenas o lado direito da igualdade $x\#(y+z) = (x\#y) + (x\#z)$, como podemos observar na figura 10.

Figura 10 – Registro escrito do estudante E2 para a distributividade da operação # em relação à operação $*$ em Q


5) $x \# (y+z) = (x \# y) + (x \# z)$

$(x+y-\frac{xy}{5}) + (y+z-\frac{yz}{5}) = x+y-\frac{xy}{5} + y+z - \frac{yz}{5}$

Assoc.

$= y+z-\frac{yz}{5} + x+y-\frac{xy}{5}$.

Questão 5

(DOMINGUES E IEZZI, 2003, adaptado) Prove que se considerarmos **A um anel de integridade**, com **$x \in A$ e $x^2 = x$, então $x = 0$ ou $x = 1$.**

$x \# (y+z) = (x \# y)(x \# z)$

Fonte: resolução escrita pelo estudante E2

O estudante não especifica que os elementos supostos x, y, z pertencem ao conjunto Q. Percebemos também que o estudante troca a operação $*$ por $+$, o que já havia ocorrido para a propriedade associativa da operação $*$, verificada na etapa 1, o que para nós indica certa confusão em propriedades que são definidas com duas operações.

A solução apresentada por E2 para a tarefa 5 está correta, apesar de não justificar que se $x(x-1) = 0$, então $x = 0$ ou $x = 1$ é verdadeiro porque A é um Anel de integridade, o que nos garante que não existem divisores de zero.

Síntese e considerações a respeito do registro escrito do estudante E2

Ao analisar o registro escrito do estudante E2, percebemos que ele concebe Anel como um sistema constituído pela tríade conjunto, operações binárias e propriedades. Apesar de apresentar alguns equívocos na definição de algumas propriedades, principalmente na propriedade associativa de uma operação qualquer, o estudante mostra conhecer as propriedades de que as operações devem gozar e sabe lidar com elas para operações não usuais e conjuntos quaisquer, não se limitando a apenas conjuntos numéricos. Portanto, acreditamos que esse estudante tenha uma concepção objeto do conceito de Anel, segundo a Teoria APOS.

Olhar geral

Ao longo deste capítulo, apresentamos uma análise individual dos registros escritos produzidos pelo estudante participante E2. Análise esta que nos permitiu inferir qual a sua concepção para o conceito de Anel. Agora, analisamos com um olhar geral todos os estudantes, inclusive E2.

No Quadro 1, apresentamos as escolhas feitas pelos estudantes na tarefa 1.

Quadro 1 – Tarefa 1: Respostas apresentadas

Possíveis respostas para a pergunta "O que é um Anel?"	Concorda com a resposta
A: Um Anel é um conjunto numérico, munido das operações usuais de adição e multiplicação, que goza de determinadas propriedades.	E1.
B: Um Anel é um conjunto numérico, munido de duas operações, e goza de determinadas propriedades.	E1.
C: Um Anel é um conjunto qualquer que goza de determinadas propriedades.	E1, E3.
D: Um Anel é um conjunto qualquer, não vazio, munido de duas operações e que goza de determinadas propriedades.	E1, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11.
E: Anel é um conjunto não vazio A e um par de operações sobre A.	E1.

Fonte: Do autor

Podemos perceber que a maioria dos estudantes concorda com a resposta D, esperada por nós. O estudante E2 foi o único que não concordou com qualquer uma das respostas apresentadas e escreveu dizendo que um Anel é um conjunto onde valem as propriedades de grupo (abeliano) e a multiplicação em relação à adição é associativa e a multiplicação em relação à adição é distributiva. A seguir, no Quadro 2, apresentamos uma síntese do desempenho dos estudantes na tarefa 2.

Quadro 2 – Desempenho dos estudantes na tarefa 2

Propriedade	Definição correta	Definição parcialmente correta	Não definiu ou definiu incorretamente
Propriedade associativa para a adição.	E1, E4, E5, E8, E10, E11.		E2, E3, E6, E7, E9.
Propriedade comutativa para a adição.	E1, E2, E4, E5, E6, E8, E10, E11.		E3, E7, E9.
Elemento neutro da adição.	E5, E8.	E4, E10, E11.	E1, E2, E3, E6, E7, E9.
Elemento oposto da adição.	E5, E8.	E4, E11.	E1, E2, E3, E6, E7, E9, E10.
Propriedade associativa para a multiplicação.	E1, E3, E4, E5, E8, E10, E11.		E2, E6, E7, E9.
Propriedade comutativa para a multiplicação.	E1, E2, E3, E4, E5, E8, E10, E11.		E6, E7, E9.
Elemento neutro para a multiplicação.	E5, E8.	E4, E10, E11.	E1, E2, E3, E7, E9.
Distributiva da multiplicação em relação à adição.		E3, E4, E5, E6, E10, E11.	E1, E2, E7, E8, E9.

Fonte: Do autor

Quando questionados a respeito das propriedades que possuem relação com o conceito de Anel, nenhum estudante respondeu corretamente. Percebemos assim, em correspondência com o quadro anterior, que a maioria dos estudantes concebe Anel como um sistema constituído por um conjunto, operações binárias e propriedades, porém, não sabem quais são exatamente essas propriedades, nem como defini-las. Os estudantes, em geral, aparentam recorrer aos conjuntos numéricos e às usuais operações de adição e multiplicação, principalmente para comentar a respeito dos elementos neutro e oposto, que assim como a distributiva da multiplicação em relação à adição, são verificados na maioria dos casos apenas à esquerda da operação. A seguir, no Quadro 3, apresentamos uma síntese do desempenho dos estudantes na tarefa 3. Os estudantes deveriam decidir se as sentenças apresentadas eram verdadeiras (V) ou falsas (F), fornecendo uma justificativa para suas decisões.

Quadro 3 – Desempenho dos estudantes na tarefa 3

Sentença	Decisão correta (V/F)	Justificativa correta
A. $(N, +,\cdot)$ é um Anel comutativo.	E2, E3, E5, E11.	E2, E3, E11.
B. $(Q^{*}, +,\cdot)$ é um Anel sem unidade.	E3, E5, E6, E7, E8.	
C. $(Z_4, +,\cdot)$ não é um Anel.	E2, E3, E4, E5, E6, E10.	
D. $(Q[\sqrt{p}], +,\cdot)$ não é um Subanel de $(R, +,\cdot)$.	E2, E3, E4, E5, E8, E10, E11.	E2, E4.
E. $(\{0\} \times 2Z, +,\cdot)$ é Subanel de $(Z \times Z, +,\cdot)$.	E1, E3, E4, E5, E6, E10.	E4.
F. Z_4 não é Subanel de Z_5.	E1, E2, E3, E4, E5, E6, E8, E10, E11.	E2, E3.
G. $(M_2(N), +,\cdot)$ é um Anel.	E2, E3, E10, E11.	E11.

Fonte: Do autor

Inferimos que a grande maioria dos estudantes não conseguiu lidar com afirmações envolvendo Anéis conhecidos, com conjuntos numéricos e operações usuais. Além disso, o fato de alguns terem tomado decisões corretas quanto à veracidade ou falsidade das afirmações sem apresentar justificativas pode implicar numa recorrência a fatos de suas memórias, como a lembrança de uma aula ou de uma leitura. É importante também que o estudante saiba justificar suas decisões utilizando uma linguagem matemática formal. A seguir, no Quadro 4, apresentamos uma síntese do desempenho dos estudantes na tarefa 4. Eles deveriam decidir se a tripla $(Q, *, \#)$ constituída por duas operações binárias não usuais, é um Anel.

Quadro 4 – Desempenho dos estudantes na tarefa 4

Estudante	Resumo do modo de lidar com a tarefa
E1, E6, E7, E10.	Não apresentou algum tipo de resolução.
E2.	O estudante demonstrou não ter dificuldades para lidar com operações não usuais. Ao assumir $x,\ y\ e\ z$ verifica as propriedades de um Anel seguindo cinco etapas, nomeadas por ele da seguinte maneira: Associatividade para $*$; Comutatividade para $*$; Existência de elemento neutro para * e existência de elemento inverso para $*$; Associatividade para #; Distributividade de # em relação a $*$.
E3.	O estudante demonstrou não ter dificuldades para lidar com operações não usuais, e sem assumir elementos em Q, verifica para a operação $*$ as propriedades associativa, existência de elemento neutro e existência de um simétrico para cada elemento do conjunto.
E4.	O estudante demonstrou não ter dificuldades para lidar com operações não usuais, e, supondo que $a, b, c\ \in Q$, verifica a propriedade associativa para as operações $*$ e #.

E5.	O estudante demonstrou não ter dificuldades para lidar com operações não usuais, e sem supor que $a, b, c \in Q^*$, verifica para a operação $*$ as propriedades comutativa, associativa, existência de elemento neutro e existência de um simétrico para cada elemento do conjunto, e para a operação #, a propriedade associativa.
E8.	O estudante demonstrou não ter dificuldades para lidar com operações não usuais, e sem supor elementos em Q, verifica para a operação $*$ as propriedades associativa e comutativa, e a propriedade distributiva da operação # em relação à operação $*$.
E9.	O estudante demonstrou não ter dificuldades para lidar com operações não usuais, e sem supor elementos em Q, verifica para a operação * as propriedades associativa e comutativa.
E11.	O estudante demonstrou não ter dificuldades para lidar com operações não usuais, e sem assumir elementos em Q, verifica para as operações * e # a propriedade associativa.

Fonte: Do autor

Inferimos, por meio dos registros escritos obtidos nesta tarefa, que os estudantes não possuem dificuldades em lidar com operações não usuais, porém evidenciaram não saber quais propriedades a primeira e a segunda operação da tripla $(Q,*,\#)$ devem ser gozadas, confirmando o que percebemos com a tarefa.

A seguir, no Quadro 5, apresentamos uma síntese do desempenho dos estudantes na tarefa 5. Os estudantes deveriam provar que se considerarmos A como um Anel de integridade, com $x \in A$ e $x^2 = x$, então $x = 0$ ou $x = 1$.

Quadro 5 – Desempenho dos estudantes na tarefa 5

Estudante	Resumo do modo de lidar com a tarefa
E1, E4, E6, E7, E8, E10.	Não apresentou algum tipo de resolução.
E2, E5, E9, E11.	O estudante resolveu a equação colocando em evidência, como segue: $x^2 = x$ $x^2 - x = 0$ $x(x-1) = 0$ Concluindo, assim, que $x = 0$ ou $x = 1$.
E3.	O estudante considerou que 0 e 1 são os valores possíveis de x para que a igualdade fosse verdadeira.

Fonte: Do autor

Percebemos que a grande maioria dos estudantes não conseguiu relacionar o conceito de Anel de integridade com uma situação matemática simples e rotineira, a resolução de uma equação de 2º grau incompleta do tipo $ax^2 + bx = 0$, "com base na propriedade de sem divisores de zero". Apenas o estudante E9 justificou que as raízes são 0 e 1 por termos A como um Anel de integridade. Por fim, apresentamos a seguir, no Quadro 6, uma síntese das concepções que inferimos que os estudantes tenham construído para o conceito Anel, após analisarmos os registros escritos.

Quadro 6 – Concepções (ação, processo, objeto, esquema) dos estudantes para o conceito de Anel

Estudante / Concepção	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9
Ação			x	x					x
Processo					x				
Objeto		x							
Esquema									

Fonte: Do autor

Percebemos que dos 11 estudantes pesquisados, apenas um construiu, ao final da disciplina de Estruturas Algébricas, uma concepção objeto do conceito Anel. O estudante concebe corretamente Anel como um sistema constituído pela tríade conjunto não vazio, duas operações binárias e propriedades a serem gozadas. Apesar de apresentar alguns equívocos na definição de algumas propriedades, principalmente na propriedade associativa para uma operação qualquer, o estudante demonstra conhecer as propriedades de que as operações devem gozar e sabe lidar com elas para operações não usuais e conjuntos quaisquer, não se limitando a apenas conjuntos numéricos. Assim, consideramos que ele compreenda o objeto Anel com características próprias, sendo capaz de manipulá-lo e utilizá-lo quando necessário. Um estudante construiu uma concepção processo. Consideramos que, para a construção da concepção objeto do conceito Anel, ele ainda tenha que lidar com uma diversidade maior de conjuntos, não somente os numéricos. Quatro estudantes construíram uma concepção ação do objeto matemático, demonstrando lidar com o objeto Anel de maneira elementar, muitas vezes indicando apenas terem decorado procedimentos e regras, sem terem de fato compreendido o objeto matemático. Esses estudantes apresentam dificuldades com o próprio conceito de Anel, com as operações binárias, com as propriedades das operações ou com os conjuntos. Sendo assim, consideramos importante que lidem mais com esses conceitos, como conjuntos não numéricos e operações binárias não usuais. Inferimos que cinco estudantes não chegaram a construir uma concepção ação para o conceito Anel. Isso por considerarmos que não possuem uma concepção bem definida para o objeto matemático e apresentam dificuldades em cumprir e coordenar as ações necessárias para a construção do objeto Anel, como ser capaz de verificar para uma operação binária em um dado conjunto (numérico ou não) que duas operações (não necessariamente usuais) gozam da associatividade, da comutatividade, da existência do elemento neutro, de que todo elemento possui opostos e que uma operação é distributiva em relação à outra. Consideramos necessário que esses estudantes passem por um processo de construção dos objetos conjunto, operações binárias e propriedades das operações, para então repetir essas ações desejadas e passar a ter uma concepção ação de Anel, segundo a Teoria APOS. Nenhum estudante demonstrou ter construído a concepção esquema, sendo necessário lidar corretamente com diversas situações matemáticas que envolvam o conceito de Anel. A seguir, apresentamos as considerações finais, em que comentamos os resultados obtidos nas análises, apresentamos sugestões de encaminhamentos, limitações e sugestões para novas pesquisas.

Considerações finais

Nesta pesquisa, o objetivo proposto foi investigar e discutir as concepções (ação, processo, objeto, esquema), à luz da Teoria APOS, que podem ser manifestadas por licenciandos em Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL) ao lidarem com tarefas referentes ao conceito de Anel. Para atingirmos o nosso objetivo e respondermos às questões norteadoras, assumimos como referencial teórico a Teoria APOS de Dubinsky e seus colaboradores.

Para responder às tarefas propostas na investigação, convidamos estudantes do curso de Matemática: Habilitação – Licenciatura da Universidade Estadual de Londrina que estavam concluindo a 2ª série, indicando já terem estudado o conceito de Anel na disciplina de Estruturas Algébricas. Aceitaram o convite 12 estudantes, mas analisamos os registros escritos de 11, pois um estava cursando Matemática: Habilitação – Bacharelado.

Apesar de identificarmos que a maioria dos estudantes concebe a estrutura algébrica Anel como um conjunto qualquer, não vazio, munido de duas operações e que goza de determinadas propriedades, quando questionados a respeito das propriedades que possuem relação com o conceito de Anel, nenhum estudante mostrou saber quais são exatamente essas propriedades, nem como defini-las. Além disso, mostraram não saber de quais propriedades a primeira e a segunda operação de uma tripla devem gozar.

Percebemos também que a grande maioria dos estudantes não consegue lidar com afirmações envolvendo Anéis conhecidos, com conjuntos numéricos e operações usuais, nem relacionar esse conceito com uma situação matemática simples e rotineira.

Após realizarmos uma análise individual dos registros escritos dos estudantes participantes, propusemo-nos a identificar suas concepções para o conceito de Anel.

Cinco estudantes *não chegaram a construir uma concepção ação*, quatro estudantes construíram uma *concepção ação*, um estudante construiu uma *concepção processo*, um estudante, E1, abordado neste trabalho, construiu ao final da disciplina de Estruturas Algébricas uma *concepção objeto* e nenhum estudante demonstrou ter construído a *concepção esquema*.

Acreditamos que as concepções identificadas e o modo como os estudantes concluintes de uma disciplina de Estruturas Algébricas lidam com tarefas envolvendo o conceito de Anel indiquem a necessidade de se repensar a respeito do modo como a disciplina de Estruturas Algébrica vêm sendo abordada em cursos de licenciatura em Matemática.

Apesar dos resultados insatisfatórios, muitos dos estudantes participantes desta pesquisa consideraram importante o estudo de Estruturas Algébricas em um curso de licenciatura em Matemática, mas não veem relações específicas desse estudo com suas práticas enquanto professores da Educação Básica. Segundo Mondini (2009), os futuros professores de Matemática atribuem importância aos conteúdos quando percebem aplicação direta desse conhecimento para a Álgebra trabalhada na Educação Básica. Será que entender a relação entre o conhecimento estudado com a prática não contribui para que os estudantes concebam o conceito como um objeto e, posteriormente, como um esquema? Consideramos importante que os professores de disciplinas como Estruturas Algébricas reflitam a respeito de questões como esta, inclusive com seus próprios alunos, futuros professores de Matemática.

Identificar as concepções de cada estudante participante também nos permitiu perceber que são diversas as possibilidades de compreensão de um conceito matemático. Os estudantes são diferentes, não somente no tempo que levam para aprender, mas também no modo como a aprendizagem ocorre, o que nos leva a acreditar que também não existe uma única decomposição genética para um conceito, ou seja, a construção de um conceito não é única. Entender, valorizar e discutir essas diferenças tornam-se ações necessárias ao professor em sua prática docente, possibilitando, assim, intervir e interagir no processo de ensino e aprendizagem quando necessário.

Consideramos importante que um professor, em sua formação inicial, não somente estude, mas vivencie, em diferentes disciplinas, por exemplo, Estruturas Algébricas, como compreender a construção de um conhecimento e como contribuir com essas construções. Assim, concordamos com Dubinsky e McDonald (2001, p. 1), quando afirmam que a Teoria APOS é bastante útil ao tentar compreender aprendizagem de conceitos da Álgebra Abstrata. A decomposição genética pode e deve ser usada de maneira que forneça estratégias pedagógicas que levem os estudantes a fazerem as construções necessárias e a usá-las na resolução de problemas diversos. Os professores e os futuros professores podem refletir sobre o modo como seus alunos constroem o conceito, ou construir suas próprias decomposições genéticas.

Por fim, esperamos que esta pesquisa possa contribuir na busca por situações que favoreçam a aprendizagem de Estruturas Algébricas em cursos de licenciatura em Matemática.

Referências

ASIALA, M. et al. A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. In: KAPUT, J.; SHOENFELD, A. H.; DUBINSKY, E. (Eds) *Research in Collegiate Mathematics Education II, CBMS Issues in Mathematics Education*. Estados Unidos: American Mathematical Society, v. 6, 1-32. 1996.

BARDIN, L. *Análise de conteúdo*. Tradução de Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. Lisboa: Edições 70. 1977.

BOGDAN, R. C. e BIKLEN, S. C. *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Trad. Sob direção de Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Portugal: Porto. 1994.

CAMPOS, E. *A noção de congruência algébrica no curso de Matemática: uma análise das respostas dos estudantes*. Tese de doutorado em Educação, Curitiba, Universidade Federal do Paraná. 2009.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. *Álgebra moderna.* São Paulo: Atual. 2003.

DUBINSKY, E. et al. On Learning Fundamental Concepts of Groups Theory. *Education Studies in Mathematics,* v. 27. 1994. Disponível em <http://www.math.kent.edu/~edd/FundConGrpTh.pdf>. Acesso em: 11 nov. 2014.

DUBINSKY, E.; McDONALD, M. A. APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergrad Mathematics Education ResearchIn: HOLTON, et. al. (Eds.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study, Kluwer Academic Publishers.* 2001. Disponível em <http://www.math.wisc.edu/~wilson/Courses/Math903/ICMIPAPE.PDF> Acesso em: 04 de nov. 2014.

DUBINSKY, E. Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In: TALL, David. (Org.), *Advanced Mathematical Thinking,* Holanda: Kluwer Academic Publishers, 95-123. 2002. Disponível em <http://www.math.wisc.edu/~wilson/Courses/Math903/ReflectiveAbstraction.pdf>. Acesso em: 15 nov. 2014.

DUBINSKY, E. (Ed). *Dubinsky home page.* 2003. Disponível em: http://www.math.kent.edu/~edd/. Acesso em: 19 nov. 2015.

FRANCO, H. J. R. *Os diversos conflitos observados em alunos de licenciatura num curso de Álgebra: Identificação e análise.* Dissertação de mestrado profissional em Educação Matemática, Juiz de Fora, Universidade Federal de Juiz de Fora. 2011.

HAREL, G.; SELDEN, A.; SELDEN, J. Advanced Mathematical Thinking. *In*: GUTIÉRREZ, A; P; BOERO (Eds.). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*. Rotterdam: Sense Publishers, 147-172. 2006.

HEFEZ, A. *Os Números inteiros e racionais*. 1993. In A. HEFEZ. Curso de Álgebra. (2ª ed., pp. 22-41). Rio de Janeiro: IMPA.

JESUS, M. S. de. *Um estudo das concepções de licenciandos em Matemática, à luz da Teoria APOS, a respeito do conceito de Anel.* Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Londrina, Universidade Estadual de Londrina. 2016.

KLUTH, V. S. *Estruturas da Álgebra: investigação fenomenológica sobre a construção do seu conhecimento.* Tese de doutorado em Educação Matemática, Rio Claro, Universidade Estadual Paulista. 2005.

LANG, S. Anéis. In: S. LANG. *Estruturas Algébricas.* (1ª ed., pp. 40-54). Rio de Janeiro: Ao livro técnico S.A. 1970.

MONDINI, F. *Modos de conceber a Álgebra em cursos de formação de professores de Matemática*. Dissertação de mestrado em Educação Matemática, Rio Claro, Universidade Estadual Paulista. 2009.

PRADO, E. A. *Alunos que contemplaram um curso de extensão em Álgebra linear e suas concepções sobre base de um espaço vetorial.* Dissertação de mestrado em Educação Matemática, São Paulo, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 2010.

SOUZA, S. A. *O ensino de Álgebra no curso de licenciatura em Matemática.* Videtur Letras. São Paulo, v .7, 23-26. 2004. Disponível em <http:www.hottopos.com/vdletras7/suzana.htm>. Acesso em out. 2014.

Texto recebido: 06/02/2017
Texto aprovado: 06/12/2018