

Interpretações de Alunos da Educação Básica Para a Idéia de Recorrência em uma Questão Aberta de Matemática

Students' Interpretations of Basic School to The Recurrence Idea in an Open-Ended Mathematical Question

JOÃO RICARDO VIOLA DOS SANTOS¹

REGINA LUZIA CORIO DE BURIASCO²

PAMELA EMANUELI ALVES FERREIRA³

Resumo

O presente trabalho tem por objetivo apresentar algumas maneiras de alunos da Educação Básica interpretarem a idéia de recorrência presente na segunda frase de uma questão discursiva de matemática. Analisamos um conjunto de 96 provas escritas de matemática, por meio de uma abordagem qualitativa, tomando a produção escrita dos alunos como fonte de informações. Os alunos, em grande parte, interpretaram e utilizaram a idéia de recorrência pautados na interpretação que fizeram apenas da primeira frase do enunciado, o que interferiu nas estratégias elaboradas.

Palavras chave: Educação Matemática; idéia de recorrência; produção escrita em matemática.

Abstract

The present paper has for objective show some basic school students' ways interpret the recurrence idea in the second phrase of enunciation of open-end mathematical question. We analyze 96 students' written work with an approach research qualitative. The students, in general, interpret and use the recurrence idea with the interpretations they do at the first phrase. The interpretations of this phrase delimited and modify the strategies built and influence the students' performance.

Key words: Mathematics Education; recurrence idea; mathematical written work.

1. Introdução

Nas aulas de matemática, com freqüência, os professores promovem discussões sobre estratégias e procedimentos de como resolver uma questão, mas nem sempre são realizadas discussões sobre os modos de os alunos interpretarem um enunciado. Essa é uma prática que necessita ser implementada na aula de matemática, pois a comunicação, entre professores e alunos nem sempre acontece do modo esperado. Por vezes os professores acham que estão sendo entendidos na medida em que os alunos concordam

¹ Docente da Coordenadoria de Educação Aberta e a Distância da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS e aluno do Programa de Pós Graduação em Educação Matemática da UNESP – campus Rio Claro, jr.violasantos@gmail.com

² Docente do Depto. de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina – UEL, reginaburiasco@hasner.com.br

³ Aluna do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina – UEL, pawe7a@gmail.com

com suas afirmações; por outras, os alunos também acham que estão sendo entendidos, entretanto, esse processo é apenas uma *sensação psicológica*, sendo que professores falam em uma *direção* e alunos em outra, muitas vezes, totalmente divergente (LINS, 1999).

O fato de professores apresentarem determinado tópico e atribuírem a ele certo significado não garante que os alunos lhe dêem o mesmo significado. É comum os alunos responderem na direção daquilo que acreditam que os professores querem ouvir em lugar de darem suas respostas baseadas em suas maneiras idiossincráticas de interpretar e atribuir significados. Parece que, por vezes, ficam ocultos elementos relacionados aos processos de produção de significados dos alunos para os conceitos e idéias matemáticas. Mesmo fazendo parte de uma linguagem considerada mais precisa e mais sintética do que a linguagem natural, uma expressão matemática pode receber diferentes interpretações e, com isso, diferentes informações podem, delas, ser retiradas. Essas interpretações podem sofrer influências do contexto da questão, da maneira como está estruturada, da linguagem utilizada, das considerações realísticas⁴ que fazem os alunos. Por conseguinte, essa possibilidade pode ser um entrave na aprendizagem e no desempenho de alunos nas resoluções de problemas.

Neste trabalho, procuramos explicitar alguns aspectos dessas diferentes maneiras de interpretar um enunciado e fornecer alguns apontamentos para que a comunicação em uma sala de matemática vá além de um mero “faz de conta”, qual seja professores e alunos “fazem de conta” que entenderam uns aos outros.

Durante uma aula, ao *falarem* sobre uma determinada definição, por exemplo, várias são as características apresentadas pelos professores. Entretanto, quando escrevem essa mesma definição, nem sempre todas elas ficam explícitas. Assim, é comum os alunos acompanharem as explicações dos professores em sala de aula, mas também é frequente eles não entenderem essa mesma definição quando a lêem, sozinhos, em algum livro. Essa dinâmica da aula de matemática pode possibilitar diferentes interpretações por parte dos alunos uma vez que ela se caracteriza mais por um processo informativo do que de dialógico. É preciso que estejamos atentos ao fato de que nem sempre os significados atribuídos, pelos alunos, aos algoritmos, procedimentos e até mesmo às palavras utilizadas em suas explicações, são os mesmos de seus professores. Como

⁴ Segundo Cooper (1992) as considerações realísticas dos alunos são aquelas relacionadas às experiências pessoais da vida prática e aos objetos não matemáticos.

também, precisamos estar conscientes de que nossas *falas* apresentam muitos elementos que ficam obscuros na nossa *escrita*.

Nessa perspectiva, a análise da produção escrita se apresenta como uma estratégia, que pode possibilitar conhecer características e particularidades da atividade matemática dos alunos por meio de seus registros. Sob o olhar das *maneiras de lidar*⁵, é possível interrogar-se sobre os processos nos quais os alunos se envolvem ao resolver um problema, independentemente das respostas que apresentam, bem como, realizar uma leitura na busca de evidências e pistas que eles dão sobre a relação que estabelecem com o enunciado e quais os contextos que constituem nos processos de resolução e mobilização de conceitos matemáticos. Com isso, ao invés de se limitar à identificação de que um problema, quando “não resolvido” pelo estudante, é diferente do considerado correto, emerge a pergunta: *qual foi o problema resolvido por ele?*

Tendo em vista que a prova escrita é um dos instrumentos mais utilizados na avaliação escolar, alguns pesquisadores têm dedicado seus estudos à análise da produção escrita de estudantes e professores, porque consideram que a análise dos registros escritos é uma importante ferramenta de investigação por meio da qual se pode obter informações sobre os processos de ensino e aprendizagem (BORASI, 1985, 1987, 1996; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, 2005; CURY, 1996, 2006; NAGY-SILVA E BURIASCO, 2005; NEGRÃO DE LIMA, 2006; DALTO, 2007; CELESTE, 2008; FERREIRA, 2009; BURIASCO *et al.*, 2009).

Tomando a avaliação como prática de investigação na qual a análise da produção escrita se apresenta como uma alternativa para conhecer como os alunos da Educação Básica lidam com questões discursivas de matemática, focamos nossas lentes nas características das interpretações dos alunos acerca da idéia de recorrência presente no enunciado da questão analisada. De acordo com estudos⁶ anteriores, essa questão “/.../ se caracteriza por se apresentar, aos alunos, com uma ‘roupagem da vida real’, construída em um domínio matemático”, e que “/.../ em relação à expressão ‘a partir do primeiro dia’ os alunos tendem a fazer mais considerações realistas, no sentido da sua interpretação de sobre algumas palavras e frases do enunciado da questão” (VIOLA DOS SANTOS; BURIASCO, 2009, p.158).

⁵ Viola dos Santos (2007).

⁶ Viola dos Santos (2007); Viola dos Santos e Buriasco (2009).

Ao investigarmos interpretações de alunos para o enunciado de uma questão, buscamos algumas considerações sobre as referências, traços, vestígios, marcas do contexto constituído pelos alunos ao lidarem com o enunciado, o papel da linguagem utilizada nas suas produções e considerações realísticas.

Muitos trabalhos têm apontado que a maneira pela qual as questões são constituídas, nos mais variados tipos de contextos⁷ e linguagens utilizadas, têm influências nas resoluções e nos desempenhos dos alunos (BOALER, 1994; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, 2005; SHANNON, 2008). Neles, são discutidos diferentes aspectos ligados aos problemas que apresentam um contexto da vida prática, ou mesmo uma roupagem desta, e os papéis que eles exercem; a linguagem que é empregada para a elaboração dos seus enunciados; e o modo como as informações são articuladas nas frases dos enunciados.

Os trabalhos de Van den Heuvel-Panhuizen (1996, 2005) apontam que uma questão com um contexto realístico oferece possibilidades para os alunos elaborarem suas estratégias e terem condições de *matematizar* uma situação (FREUDENTHAL, 1991; TREFFERS, 1987). Esse tipo de questão, fundamentalmente, se caracteriza por oportunizar, pelo menos potencialmente, que os alunos iniciem seus processos de resolução com os conhecimentos que já tem.

Boaler (1994) analisa o desempenho de 50 alunos em uma escola de ensino tradicional na Inglaterra em dois conjuntos de questões, com os quais se tinha a intenção de avaliar o mesmo conteúdo, porém com contextos diferentes. Em suas análises constata que as meninas tendem a ter desempenhos mais baixos em itens que tem um contexto “da moda” do que naqueles que são constituídos em um contexto mais formal e abstrato. Um dos motivos apontados é que esses itens distraem a atenção das meninas da estrutura matemática do problema, com isso um elas têm um baixo desempenho.

Shannon (2008) faz uma discussão na qual uma mesma situação, envolvendo o conceito de função, é apresentada aos alunos por meio de diferentes contextos: *carrinho de compras, cestas de compra e copos plásticos*. As informações e as relações que são estabelecidas no enunciado da questão são as mesmas, mudando apenas os elementos (carrinhos, cestas, copos) e o desenho no qual eles são apresentados. Em suas análises

⁷ De acordo com Viola dos Santos e Buriasco (2009) “o contexto de uma questão se caracteriza pelo conjunto de circunstâncias e suas inter-relações que constitui e acompanham o texto no seu todo e que contribuem para o seu significado (p.151)”. O conjunto dessas circunstâncias está diretamente ligado ao aluno e ao momento em que lida com o enunciado da questão.

constata que os alunos tiveram um melhor desempenho na questão que envolvia as cestas de compras do que na do contexto envolvendo carrinhos de compras. Para essa autora, os motivos seriam que: o desenho dos carrinhos de compras era mais complexo que o das cestas, isso porque, os carrinhos estavam dispostos na horizontal enquanto as cestas estavam na vertical, fato que propiciou uma melhor visualização para as cestas; além disso, a escala das cestas em relação ao tamanho real (1/10) é menos complexa do que a dos carrinhos (1/24). Os alunos tiveram um melhor desempenho na questão que envolvia os copos de plástico do que na questão que envolvia as cestas de compras. Os motivos apresentados pela autora também se referem aos aspectos geométricos dos copos plásticos em relação aos das cestas de compras. Mesmo as cestas de compras e os copos plásticos estando na vertical, a forma do feixe de copos plásticos parece ter influenciado um melhor desempenho. Nesse exemplo, vemos como uma mesma situação, que envolve o conceito de função, apresentada aos alunos em contextos diferentes, parece influenciar no desempenho dos alunos.

A influência que o contexto de uma questão exerce no desempenho dos alunos pode variar e por isso, pode ser relevante considerar esses aspectos ao analisar sua atividade matemática por meio de suas produções escritas. As questões podem ser elaboradas dentro de um contexto estritamente matemático, fictício, com uma roupagem da vida real, entre outros. Para cada tipo de contexto existem limites e possibilidades das influências que podem ter nas resoluções que os alunos constroem.

A linguagem utilizada na elaboração dos enunciados de uma questão, também influencia o desempenho dos alunos (D'AMBROSIO *et al.*, 2007). A maneira como ela se articula com a linguagem matemática, além da linguagem natural e a estrutura gramatical utilizada para elaborar os enunciados, exercem influências em relação à acessibilidade dos alunos para que interpretem os enunciados das questões. As palavras, as expressões, os desenhos, a familiaridade ou não com os símbolos matemáticos utilizados nos enunciados são elementos que se integram à maneira como os alunos lidam com uma questão e também influenciam no seu desempenho. D'Ambrosio *et al.* (2007), examinando alguns itens do NAEP 2003, encontrou exemplos nos quais aspectos da linguagem do enunciado da questão poderiam explicar o baixo desempenho dos alunos.

Wilson (2004) analisando a produção escrita e entrevistas de alunos mostra que pequenas alterações no enunciado da questão podem produzir grandes diferenças de

desempenho para os alunos. Dificuldades dos alunos em interpretar palavras de um enunciado, podem ser reduzidas se este estiver articulado de uma maneira diferente. Em alguns casos, os alunos elaboram estratégias que resolvem uma questão e as desenvolvem corretamente quando o enunciado abre a possibilidade para explicarem seus raciocínios ou, trabalharem com figuras ou com elementos manipuláveis e imagináveis.

Ao lado do papel dos contextos e da influência que a linguagem utilizada na elaboração do enunciado da questão exerce nos processos de resoluções dos alunos, temos ainda as *considerações realísticas* feitas por eles (COOPER, 1992; VIOLA DOS SANTOS, BURIASCO, 2009). Estas, que estão relacionadas às experiências pessoais, à vida prática dos alunos, aos modos particulares de interpretar e fazerem inferências, e que fazem menção a objetos não matemáticos (COOPER, 1992), estão imbricadas ao desempenho dos alunos e às suas maneiras de lidar com as questões.

Ao se depararem com uma questão, os alunos, em alguns casos, utilizam várias considerações da sua vida prática para resolvê-las (COOPER; HARRIES, 2002, 2003). As experiências que têm em seu cotidiano, seus ambientes sócio-culturais e todo um amálgama de aspectos relacionados às suas vidas influenciam, em certas questões, suas resoluções. De acordo com Cooper (1992), as *considerações realísticas*, estabelecem algumas regras na maneira de lidar com algumas tarefas e são aspectos a serem considerados nos desempenhos dos alunos.

Cooper & Harries (2003) classificam em três tipos os problemas que podem oportunizar resoluções nas quais os alunos utilizam suas considerações realísticas:

Tipo 1⁸ : Problemas que não requererem consideração extra-matemática alguma.	Tipo 2⁹ : Problemas que requererem considerações extra-matemáticas particulares.	Tipo 3¹⁰ : Problemas que requererem considerações extra-matemáticas gerais.
--	--	---

Níveis de crescimento da intenção de realismo nas respostas 

Quadro 1 - Três tipos de problemas em relação aos níveis de considerações realísticas
 Fonte: Cooper e Harries, 2003, p.453.

⁸ Problems intended to require no extra-mathematical considerations.

⁹ Problems intended to require particular extra-mathematical considerations.

¹⁰ Problems intended to require general extra-mathematical considerations.

Cooper e Harries (2002) afirmam que os organizadores das avaliações precisam considerar que os critérios para avaliar o desempenho dos alunos devem incluir suas considerações realísticas. Daí a importância de conhecermos o uso que os alunos fazem delas ao resolver uma questão.

No trabalho de Viola dos Santos (2007), que analisou a questão que será apresentada nesse artigo, foram tecidas algumas considerações sobre a linguagem utilizada no enunciado da questão. A idéia de recorrência que aparece na segunda frase da questão analisada foi interpretada por um grupo de alunos como presente na distribuição já a partir do primeiro dia, por outro grupo, como presente apenas a partir do segundo dia, e, para outro como presente em apenas alguns dos dias. Contudo, foram poucas as produções escritas dos alunos que apresentaram interpretações diferentes da correta para a idéia de recorrência, e por isso temos apenas alguns indícios a partir de algumas produções para outras investigações. Mesmo com essas restrições, em seu trabalho deixa algumas questões em aberto, tais como:

será que se o enunciado da questão estivesse escrito em uma linguagem, sem a expressão explicativa, por exemplo, na segunda frase, os alunos interpretariam da maneira considerada correta? Será que o enunciado da nossa questão que tem uma “roupagem” da vida real, mas que ainda fica distante da rotina dos carteiros, em geral, ofereceu oportunidades para outros tipos de interpretações e resoluções por parte dos alunos? (VIOLA DOS SANTOS, 2007, p.101)

A partir desses questionamentos e do trabalho de Viola dos Santos e Buriasco (2009) analisamos um número maior de provas nas quais aparecem interpretações dos alunos da Educação Básica para a idéia de recorrência.

2. Interpretações dos Alunos para a Idéia de Recorrência

Foram analisadas 94 produções escritas de alunos da 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental e de 3ª série do Ensino Médio que participaram da AVA 2002, em uma questão que envolve a idéia de recorrência, tendo como o foco a interpretação feita pelos os alunos. Para esse estudo, optamos por uma abordagem qualitativa (GARNICA, 2004) seguindo algumas orientações da análise de conteúdo apresentadas por Bardin (1977, p.42) tomada como

um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos, sistemáticos e objectivos de descrição do conteúdo das

mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens (BARDIN, 1977, p.42, itálico da autora).

A idéia de recorrência está presente em vários conteúdos matemáticos escolares, como generalizações de seqüências, progressões, problemas de funções, entre outros. Neste trabalho, em particular para o contexto da questão estudada, a idéia de recorrência (repetição continuada da mesma operação) se apresenta na relação na qual o número de telegramas entregue em cada dia depende do número entregue no dia anterior, dia a dia aumentando em uma determinada razão.

A seguir apresentamos o enunciado da questão:

Um carteiro entregou 100 telegramas em 5 dias. A cada dia, a partir do primeiro, entregou 7 telegramas a mais que no dia anterior. Quantos telegramas entregou em cada dia?

Separando cada frase da questão tentamos explicitar as informações que nelas estão contidas e depois, por meio de uma interpretação da produção escrita dos alunos, buscamos conhecer quais as interpretações feitas pelos alunos.

1ª Frase:

<i>Um carteiro</i>	<i>Entregou</i>	<i>100 telegramas</i>	<i>em</i>	<i>5 dias</i>
	↓	↓		↓
Sujeito	Verbo no passado que indica uma ação já realizada	Quantidade de telegramas entregues		Número de dias em que os telegramas foram entregues

A primeira frase da questão informa a quantidade de telegramas e em quantos dias eles foram entregues. O carteiro entregou apenas 100 telegramas nos cinco dias.

2ª Frase:

<i>A cada dia,</i>	<i>a partir do primeiro, entregou 7 telegramas</i>	<i>a mais</i>	<i>que no dia anterior</i>
↓	↓	↓	↓
Em todos os	O carteiro entregou	Expressão que indica	O carteiro entregou

dias o carteiro entregou uma certa quantidade de telegramas.	7 telegramas a mais a partir do 1º dia e não no 1º dia.	a recorrência, ou seja, a 'regra' segundo a qual foi feita a entrega dos telegramas em cada dia.	mais telegramas no 2º dia do que no 1º dia; mais telegramas no 3º dia do que no 2º dia; mais telegramas no 4º dia do que no 3º dia; mais telegramas no 5º dia do que no 4º dia.
--	---	--	---



A frase toda indica que o número de telegramas entregues em cada dia, a partir do primeiro, depende da quantidade entregue no dia anterior começando no segundo, e que a distribuição da quantidade de telegramas, em cada dia, envolve uma idéia de recorrência, necessária para os alunos resolverem a questão da maneira considerada correta, conforme mostrado no diagrama a seguir.

Dias	1º	2º	3º	4º	5º
Telegramas	6	13	20	27	34
	6 + 7	13 + 7	20 + 7	27 + 7	

A frase contém uma expressão explicativa – a partir do primeiro – um tipo de linguagem que pode não ser muito usual no cotidiano escolar dos alunos do Ensino Fundamental.

3ª Frase:

<i>Quantos telegramas entregou em cada dia?</i>
↓
Indica o que é desconhecido no problema, aquilo que o aluno, por meio das informações contidas nas duas frases anteriores, deve apresentar como resposta à questão.

Enquanto as duas primeiras frases contêm informações que devem ser relacionadas entre si para que a questão possa ser resolvida da maneira considerada correta, a terceira frase indica o que é desconhecido, ou seja, qual o número de telegramas entregue em cada dia.

A análise da produção escrita presente nas resoluções dos alunos permitiu a formação de três (3) grupos que evidenciam maneiras particulares na interpretação da idéia de recorrência presente no enunciado da questão em tela. A idéia de recorrência foi utilizada pelos alunos do **Grupo 1** a partir do primeiro dia, do **Grupo 2** já no primeiro dia, e, no **Grupo 3**, em apenas alguns dias.

Grupo 1 – Os alunos utilizaram a idéia de recorrência a partir do primeiro dia

No **Grupo 1** temos 54 provas nas quais os alunos interpretaram que a idéia de recorrência está presente a partir do primeiro dia, sendo que utilizaram diferentes estratégias para resolver a questão.

Temos 11 provas das quais em 9 os alunos dividem 100 por 5 e adicionam 7 a partir do primeiro dia resultando 20 telegramas no 1º dia, 27 no 2ª dia, 34 no 3º dia, 41 no 4º dia e 48 no 5º dia. Nas outras duas provas, eles interpretaram que o carteiro entregou 100 telegramas no 1º dia e em cada um dos dias subseqüentes adicionaram 7, resultando a seqüência 100 telegramas no 1º dia, 107 no 2ª dia, 114 no 3º dia, 121 no 4º dia e 128 no 5º dia. Essa foi uma estratégia muito utilizada pelos alunos tanto da 4ª. e 8ª. séries do Ensino Fundamental quanto da 3ª. série do Ensino Médio e se caracteriza pelo que denominamos uma *resolução linear*¹¹ (VIOLA DOS SANTOS, 2007).

Em outras 13 provas os alunos tomaram o número 7 como a quantidade de telegramas que o carteiro entregou no primeiro dia e adicionaram 7 a partir dele, apresentando como resposta a seqüência: 7, 14, 21, 28, 35. Inferimos que o trecho do enunciado - *entregou 7 telegramas a mais que no dia anterior* - possa tê-los influenciado a tomar o número 7 como o número de telegramas do primeiro dia.

Em 12 provas os alunos fizeram algumas tentativas (3, 7, 8, 10, 14) para o número de telegramas do primeiro dia e adicionaram 7 a ele para obter a quantidade do segundo dia e assim fizeram até o último dia. Em 8 dessas provas, os alunos adicionaram a quantidade de telegramas de cada um dos 5 dias para verificar se o resultado é 100. Alguns dos algoritmos foram realizados da maneira considerada incorreta, mas em

¹¹ Resolução linear é um processo no qual o aluno faz uma interpretação para a primeira frase e utiliza um procedimento; faz uma interpretação para segunda e utiliza outro procedimento, sendo que este está ligado ao resultado do primeiro. Ele resolve passo a passo a questão encadeando suas interpretações e seus procedimentos, sendo que ao fim, apresenta uma resposta (VIOLA DOS SANTOS, 2007)

muitos casos, possivelmente, os alunos acreditaram que sua resposta estivesse correta por terem obtido 100 na adição, como mostra a figura a seguir.

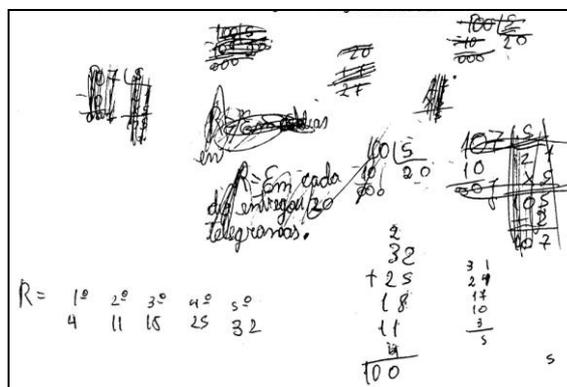


Figura 1. Produção escrita do aluno 4C04004.

Temos outras provas nas quais os alunos indicam uma quantidade qualquer de telegramas entregues no primeiro dia e aplicam uma lei de recorrência para os dias seguintes. Notando que a soma dos telegramas entregues ao decorrer dos cinco dias não resulta em 100, os alunos modificam a quantidade de telegramas de alguns dias para garantir a soma, não obedecendo, assim, a idéia de recorrência. Nesses casos notamos que os alunos interpretam e operam com a idéia de recorrência de maneira considerada correta, apesar de manipularem o resultado.

Nos últimos subgrupos temos 18 provas nas quais os alunos interpretam que o carteiro entregou 100 telegramas no último dia e entregou 7 telegramas a mais a partir do primeiro dia. Nessas provas os alunos se atêm a essas duas informações e com elas elaboram suas estratégias.

Em outras 5 provas os alunos utilizaram também a idéia de recorrência a partir do primeiro dia, porém, como resposta, apresentaram a soma dos telegramas entregues no decorrer dos cinco dias. Inferimos que da última frase do enunciado os alunos interpretaram que deveriam apresentar o total de telegramas entregues.

Nesse grupo as interpretações dos alunos para a idéia de recorrência foi a esperada pelos organizadores da avaliação. Ressaltamos que para alguns a idéia de recorrência foi influenciada por interpretações de outras frases do enunciado, como no caso em que os alunos modificaram quantidades de telegramas de alguns dias para que a adição da quantidade de todos os dias resultasse 100. Junto com a informação da primeira frase, a

idéia de recorrência se mostrou como um elemento que direciona a resolução desses alunos.

Grupo 2 - Os alunos utilizaram a idéia de recorrência já no primeiro dia

No **Grupo 2** temos 25 provas nas quais os alunos indicaram uma quantidade inicial de telegramas para o primeiro dia e aplicaram uma lei de recorrência começando pelo primeiro dia, ou seja, adicionaram 7 à quantidade indicada para obter o total de telegramas entregues no primeiro dia. A partir do resultado obtido, repetiram o procedimento, sucessivamente, para obter as quantidades de telegramas entregues nos dias seguintes. Inferimos que da expressão “a partir do primeiro”, os alunos interpretaram a necessidade de incluir 7 telegramas já no primeiro dia.

Temos 12 provas nas quais os alunos dividiram 100 por 5 e adicionaram 7 ao resultado para obterem a quantidade de telegramas do primeiro dia, repetindo o procedimento para os dias seguintes, dada a interpretação que fizeram da segunda frase do enunciado, como mostra a Figura 2.

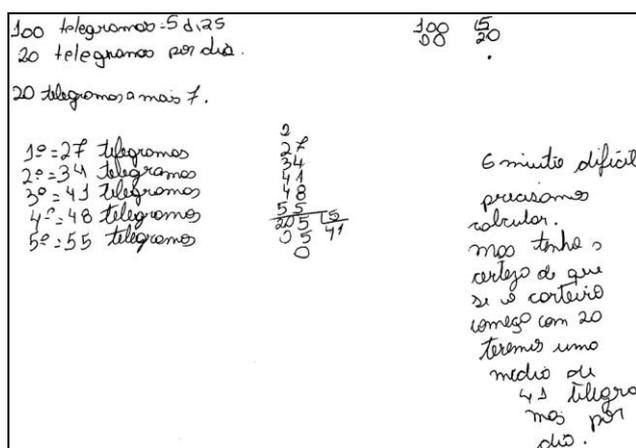


Figura 2 . Produção escrita do aluno 8C02010.

Em outras 2 provas os alunos tomaram um número (7 ou 6) como quantidade de telegramas que o carteiro entregou no primeiro dia, adicionaram 7 a essa quantidade para obter o número de telegramas entregue no segundo dia e repetiram esse procedimento até obter a quantidade do quinto dia. Na prova 4C04017 (Figura 3) o aluno tomou o número 6, que seria a quantidade de telegramas entregue no primeiro dia, adicionou 7, e utilizando a idéia de recorrência, repetiu o procedimento efetuando mais quatro adições. Nesta prova não temos indícios de resposta por meio da produção escrita, entretanto, inferimos que a resposta seria dada pelas somas obtidas, e, com isso,

que o número 6, tomado inicialmente, não foi considerado como a quantidade de telegramas entregue no primeiro dia.

$$\begin{array}{r}
 6 \\
 +7 \\
 \hline
 13
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 13 \\
 +7 \\
 \hline
 20
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 20 \\
 +7 \\
 \hline
 27
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 27 \\
 +7 \\
 \hline
 34
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 34 \\
 +7 \\
 \hline
 41
 \end{array}$$

Figura 3. Produção escrita do aluno 4C04017.

É curioso pensarmos que para encontrar a primeira seqüência de números (6, 13, 20, 27, 34) o aluno pode já ter utilizado a idéia de recorrência. Possivelmente essa estratégia foi elaborada por meio de uma primeira interpretação para o enunciado da questão. Inferimos que em um segundo momento, o aluno tenha adicionado 7 telegramas em todos os cinco dias por ter interpretado da expressão, *sete dias a mais que o dia anterior*.

Em 11 provas inferimos que os alunos interpretaram a primeira frase como *o carteiro entrega um mínimo de 100 telegramas em cada um dos 5 dias*. Três palavras, *cada um dos*, possivelmente estiveram relacionadas a essa interpretação e desempenharam um papel decisivo para a resolução desses alunos. Assim adicionaram 7 telegramas já no primeiro dia obtendo 107, adicionaram 7 a este resultado para obter a quantidade de telegramas entregues no dia seguinte, e assim, sucessivamente, para os demais dias, e com isso, apresentaram uma resposta. Exemplo disso é a resolução apresentada na Prova 4C08020, conforme mostra a figura a seguir.

$$\begin{array}{r}
 100 \\
 +7 \\
 \hline
 107
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 107 \\
 +7 \\
 \hline
 114
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 114 \\
 +7 \\
 \hline
 121
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 121 \\
 +7 \\
 \hline
 128
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 128 \\
 +7 \\
 \hline
 135
 \end{array}$$

No primeiro dia 107 telegramas.
 No segundo dia 114 telegramas.
 No terceiro dia 121 telegramas.
 No quarto dia 128 telegramas.
 No quinto dia 135 telegramas.

Figura 4. Produção escrita do aluno 4C08020.

Em relação ao **Grupo 2** notamos que os alunos tiveram outra interpretação para a frase que indica a idéia de recorrência, sendo que para eles, ela já começa no primeiro dia.

Por meio dessa interpretação e respectivo processo de *interpreta-resolve-responde*¹² ajustaram as interpretações que fizeram das outras frases do enunciado. Nessas provas as considerações realísticas parecem ter sido relevantes no processo de resolução da questão, nas inferências que fizeram a partir das informações construídas pelos seus modos particulares de interpretar, chegando até mesmo a constituir um outro enunciado.

Grupo 3 – Os alunos utilizam a idéia de recorrência em apenas alguns dias

No Grupo 3 temos 10 provas nas quais a idéia de recorrência aparece em apenas em alguns dias. Em algumas provas, os alunos apresentaram uma resposta na qual a idéia de recorrência aparece do segundo dia em diante. Por exemplo: no primeiro dia o carteiro entrega 2 telegramas, no segundo 14, e, para obter a quantidade de telegramas do terceiro dia, adicionaram 7 à quantidade relativa ao segundo dia. Possivelmente essa estratégia foi elaborada por meio de uma interpretação da expressão - *a partir do primeiro* - como sendo a partir do segundo. Vale ressaltar que esses alunos entenderam que o carteiro entregou a quantidade de 100 telegramas ao longo dos 5 dias, pois apresentaram uma adição com o número de telegramas de cada dia, que resulta em 100.

segunda entregou 2, terça 14, quarta 21, quinta 28 sexte 35.

$$\begin{array}{r}
 2 \\
 14 \\
 + 21 \\
 28 \\
 \hline
 35 \\
 \hline
 100
 \end{array}$$

Figura 5. Produção escrita do aluno 4M198.

Nessa prova as *considerações realísticas* do aluno fazem parte da sua resolução, pois ele descreveu o primeiro dia como sendo *segunda*, o segundo *terça* e assim por diante. Possivelmente tem conhecimento de que os carteiros não trabalham no domingo, e pode ser por isso que ele não iniciou como se o primeiro dia fosse domingo. Essas considerações têm um papel secundário na resolução do problema, mas podem ser um indício de que os alunos relacionam suas experiências da vida prática ao resolverem um problema de matemática escolar.

¹² Segundo Viola dos Santos (2007) a tríade de palavras *interpreta-resolve-responde* possibilita ler e caracterizar o processo de resolução dos alunos de uma questão. Os alunos *interpretam* os enunciados das questões, elaboram estratégias e utilizam procedimentos, de acordo com essa interpretação, ou seja, eles *resolvem*. Dessas resoluções chegam a resultados os quais *respondem* o problema.

Em outras 6 provas desse grupo os alunos apresentaram uma resposta na qual a idéia de recorrência foi utilizada apenas nos quatro primeiros dias. Do quarto para o quinto dia eles adicionaram apenas 2 telegramas, o que resulta em 30 telegramas entregues no último dia. Possivelmente esses alunos também sabiam que o carteiro entregou um total de 100 telegramas ao longo dos cinco dias e esta informação delimitou o procedimento utilizado. Notamos que esses alunos fizeram uma inferência particular que permitiu considerar que, no último dia, o carteiro entregou apenas 2 telegramas a mais do que no dia anterior. Essa consideração realística é plausível, em relação à resolução apresentada do problema, pois o aluno considerou um parâmetro que orienta e delimita sua estratégia.

Na prova 8C03062 foi possível reconhecer duas abordagens para resolver a questão. Na primeira, foi levantada a hipótese de o carteiro entregar 100 telegramas distribuídos igualmente no decorrer dos cinco dias, o que resultaria 20 telegramas em cada um. Essa é uma estratégia que remete à idéia da repartir em partes iguais utilizada com frequência na sala de aula, pois poucas vezes são discutidas outras possibilidades de distribuição, idéia relacionada à divisão. Essa idéia também se caracteriza como uma consideração realística dos alunos, pois, nesse caso, ela faz menção ao “real” presente na sala de aula, já que é nela que eles passam um tempo considerável de boa parte do dia. Na segunda abordagem, com uma indicação clara da utilização da idéia de recorrência, ele apresentou uma resposta considerada correta, sem registro escrito de como chegou a ela, mas indica que deve ser desconsiderada. Também sem registro escrito de como chegou a ela, apresenta uma resposta na qual a idéia de recorrência é utilizada para indicar a quantidade de telegramas entregues nos quatro primeiro dias, sendo que do quarto para o quinto dia ele aumenta apenas 2 telegramas e escreve a justificativa, como mostra a Figura 6.

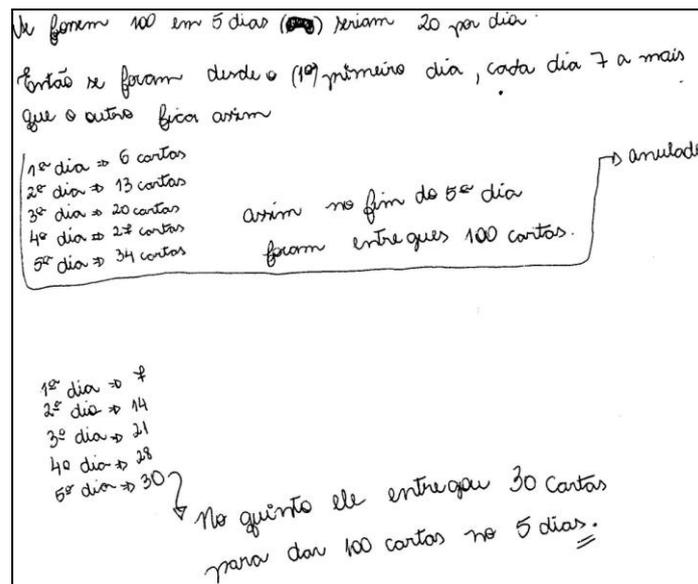


Figura 6. Produção escrita do aluno 8C03062.

Essa prova é exemplar para ressaltar múltiplas possibilidades de interpretação para um mesmo enunciado e a existência de justificativas plausíveis que, de certa forma, legitimam essas interpretações.

Na prova 8C03076 o aluno divide 100 por 5, do resultado retira 7 e, inferimos que dessa diferença retira novamente 7, pois apresenta a quantidade 6, considerada correta, como resposta para o primeiro dia, seguida das quantidades distribuídas no segundo e no terceiro dia, utilizando a idéia de recorrência e uma *estratégia aritmética direcionada*¹³.

O aluno 8M213, apresentou em sua produção duas maneiras distintas de resolver a questão. Na primeira ele divide 100 por 7 e encontra o valor de 14,2, entretanto não há indicativos na sua produção de que essa seria uma resposta. Na segunda maneira de lidar com o problema, o aluno apresentou uma resposta na qual está presente a idéia de recorrência do primeiro para o segundo dia, do terceiro para o quarto e do quarto para o quinto dia. Há indicativos de que as quantidades de cada dia sejam a resposta do problema.

¹³ Estamos chamando de estratégia aritmética direcionada a que o aluno parece saber quais procedimentos deve utilizar para obter a resposta da questão. Esses procedimentos são utilizados de uma maneira encadeada, sistemática e lógica, possivelmente por meio de um raciocínio abduutivo, considerado aqui como aquele que envolve um “chute”, mas com algum conhecimento de causa (VIOLA DOS SANTOS, 2007).

1º dia	15
2º dia	22
3º dia	39
4º dia	46
5º dia	53
<hr/>	
	105

Figura 7. Parte da produção escrita do aluno 8M213.

Em resumo, nas provas do Grupo 3, a idéia de recorrência aparece em partes nas resoluções, pois é delimitada pelas interpretações que os alunos fazem da primeira frase do enunciado. Notamos em muitos casos que os alunos fazem considerações realísticas e configuram sua maneira de interpretar, resolver e responder o problema de distintas formas.

3. Como Se Fosse um Arremate

Como mencionado anteriormente, a questão em tela tem um contexto que se estrutura em uma *roupagem da vida real*, ou seja, os elementos que a constituem fazem parte do cotidiano dos alunos, como é caso do carteiro, de telegramas, dias, entrega de telegramas, entre outros, mas as relações que se estabelecem entre eles, possivelmente não acontecem, são “artificiais”, não fazem menção a uma ação cotidiana usual. *Por que um carteiro iria entregar, 6 telegramas em um primeiro dia, 13 no segundo, 20 em um terceiro, aumentando a quantidade entregue exatamente a uma razão de 7?* Essas relações são construídas a partir de uma idéia de recorrência que não foi retirada de alguma “realidade”, mas que foi apresentada no enunciado apenas por conta e a partir de um conteúdo matemático. Por conseguinte, há uma mescla entre elementos da vida prática e da matemática escolar no enunciado da questão, o que consideramos uma questão com uma *roupagem da vida real*¹⁴.

Em relação às considerações realísticas, a questão é do tipo 2: *problemas que requerem considerações extra-matemáticas particulares*. A linguagem utilizada, o modo como foi estruturada e a disposição das informações nas três frases do enunciado da questão podem ter exercido influência na interpretação e utilização da idéia de

¹⁴ Outras caracterizações para essas questões são dadas, por exemplo, por Skovsmose (2000), que fala em ambientes para aprendizagem, que combina tipos de referências e paradigmas de prática em sala de aula (paradigma do exercício e cenários para investigação). Nesse caso, nossa questão estaria situada, no paradigma do exercício que faz referência a uma semi-realidade.

recorrência e, também, no desempenho dos alunos. Estes mostraram pouca familiaridade com a estrutura gramatical, em relação à idéia de recorrência e à expressão explicativa que aparece na segunda frase do enunciado da questão - *A cada dia, a partir do primeiro, entregou 7 telegramas a mais que no dia anterior*. Assim, como em Wilson (2004) e D'Ambrosio *et al.* (2007), parece que o modo como a linguagem está articulada no enunciado foi um dos aspectos que influenciou o desempenho dos alunos. Em um contexto com roupagem da vida real o enunciado do problema envolve linguagem natural e linguagem matemática, tendo como referência elementos da matemática escolar (a idéia de recorrência, operações aritméticas) e elementos da vida “real” (carteiro, telegramas, dias da semana). As relações construídas tendo como referência esses “dois mundos” parecem ter tido influência nas maneiras como os alunos utilizaram a idéia de recorrência.

Discussões sobre as maneiras de interpretar enunciados de questões de matemática e como essas interpretações se relacionam com a elaboração de estratégias para resolver um problema é uma prática desejável, mas ainda não freqüente nas salas de aulas. As diferenças entre “mundos” (matemático, da vida “real”, fantasioso) aos quais os enunciados das questões fazem referência e são constituídos, se explicitadas e discutidas poderiam facilitar que os alunos reconhecessem como movimentar-se neles e entre eles.

Em relação às maneiras como os alunos utilizaram a idéia de recorrência e o modo como estas se inter-relacionaram com as interpretações do enunciado da questão constatamos que, em vários casos, eles utilizaram a idéia de recorrência pautados na interpretação apenas da primeira frase, sendo que essa delimitou e modificou as estratégias elaboradas e a própria operacionalização da idéia de recorrência, visto que em alguns casos ela está presente em apenas alguns dias.

Para que o processo de resolver problemas, se torne uma das atividades mais presentes em sala de aula, não basta que o aluno domine conceitos e idéias matemáticas para ter condições de aplicá-las. É preciso mais, afinal, quando um aluno resolve uma questão, seus conhecimentos, suas experiências, suas considerações realísticas, os contextos que constituem ao lidar com ela fazem parte e influenciam o processo de resolução. A linguagem do enunciado, como a disposição e organização das informações (qualitativas e quantitativas) podem ter também um papel significativo no desempenho dos alunos. Na escola, o processo de resolver um problema engloba todo um amálgama

de elementos que influenciam o desempenho dos alunos. E foi isso que pretendemos mostrar com este trabalho.

Referências

- BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Lisboa: Edições, 1977. Tradução: Luís Antero e Augusto Pinheiro.
- BOALER, J. When do girls prefer football to fashion? An analysis of female under achievement in relation to realistic mathematics contexts. **British Educational Research Journal**, Oxford, v. 20, n. 5, p.551-564, 1994. Disponível em: <http://www.sussex.ac.uk/education/documents/boaler_18_-_football_and_fashion.pdf>. Acesso em: 18 out. 2009.
- BORASI, R. Brainstorming about errors. **Focus on Learning Problems in Mathematics**. v. 7, n. 3, p.91-103, 1985.
- _____. Exploring Mathematics through the Analysis of Errors. **For the Learning of Mathematics**. v. 7, n. 3, p.2-8, nov. 1987.
- _____. **Reconceiving Mathematics Instruction: A Focus on Errors**. Norwood: Ablex Publishing Corporation, 1996.
- BURIASCO, R. L. C.; FERREIRA, P. E. A.; CIANI, A. B. Avaliação como Prática de Investigação (alguns apontamentos). **BOLEMA: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro - UNESP, v. 33, n. 22, p.69-95, 2009.
- CELESTE, L. B. **A produção escrita de alunos do Ensino Fundamental em questões de Matemática do PISA**. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008. Disponível em: <<http://www.uel.br/grupo-estudo/gepema/03%20publicacoes.htm>>. Acesso em: 18 out. 2009.
- COOPER, B. Testing national curriculum mathematics: some critical comments on the treatment of ‘real’ context in mathematics. **The Curriculum Journal**, Milton Keynes, n. 3, p.231-243, 1992.
- COOPER, B.; HARRIES, T. Children’s responses to contrasting ‘realistic mathematics’ problems: just how realistic are children ready to be? **Education Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 49, n. 1, p.1-23, 2002.
- COOPER, B.; HARRIES, T. Children’s use of realistic considerations in problem solving: some english evidence. **Journal of Mathematical Behavior**, New Brunswick, v. 22, n. 4, p.449-463, 2003.
- CURY, H. N. Concepções sobre matemática e práticas avaliativas: as possíveis relações. **Estudos em Avaliação Educacional**, São Paulo, v. 14, n. 14, p.65-82, jul/dez. 1996.
- _____. A análise de erros na construção do saber matemático. In: Jornada Regional de Educação Matemática, 14., 2006, Passo Fundo. **Anais...** Passo Fundo: UPF, 2006. CD-ROM.
- D’AMBROSIO, B., KASTBERG, S.; LAMBDIN, D. Designed to differentiate: what is NAEP measuring? In: KLOOSTERMAN, P.; LESTER JR, F. (Ed.) **Results and**

interpretations of the 2003 mathematics assessments of the National Assessment of Education Progress. Reston, VA: NCTM, 2007.

DALTO, J. O. **A Produção Escrita em Matemática:** análise interpretativa da questão discursiva de Matemática comum à 8ª série do Ensino Fundamental e à 3ª série do Ensino Médio da AVA/2002. 2007. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina. Disponível em: <<http://www.uel.br/grupo-estudo/gepema/03%20publicacoes.htm>>. Acesso em: 18 out. 2009.

FERREIRA, P. E A. **Análise da produção escrita de professores da Educação Básica em questões não-rotineiras de matemática.** 2009. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009. Disponível em: <<http://www.uel.br/grupo-estudo/gepema/03%20publicacoes.htm>>. Acesso em: 18 out. 2009.

FREUDENTHAL, H. **Revisiting Mathematics Education.** Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

GARNICA; A. V. M. História Oral e Educação Matemática. In: **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.** BORBA, M. C.; ARAUJO, J. L. (orgs.) Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

LINS, R.C. Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática. In: **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas.** BICUDO, M.A.V. (ed). São Paulo: Unesp, 1999.

NAGY-SILVA, M. C; BURIASCO, R. L. C. Análise da Produção Escrita em Matemática: algumas considerações. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 11, n. 3, p.449-511, 2005. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/ciedu/v11n3/11.pdf>>. Acesso em: 18 out. 2009.

NEGRÃO DE LIMA, R. C. **Avaliação em Matemática: análise da produção escrita de alunos da 4ª. série do Ensino Fundamental em questões discursivas.** 2006. Dissertação (Mestrado em Educação) - Departamento de Educação, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2006. Disponível em: <<http://www.uel.br/grupo-estudo/gepema/03%20publicacoes.htm>>. Acesso em: 18 out. 2009.

SKOVSMOSE, O. **Cenários para investigação.** 2000. Disponível em: <<http://www.spce.org.pt/sem/01Ole.pdf>>. Acesso em: 19 out. 2009.

SHANNON, A. Task Context and Assessment. In: **Assessing Mathematical Proficiency.** SHOENFELD, A. H. (Ed.) Cambridge: Cambridge University Press, 2008. Disponível em: <<http://www.msri.org/communications/books/Book53/files/13shannon.pdf>>. Acesso em: 18 out. 2009.

TREFFERS, A. **Three Dimensions:** A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction – The Wiskobas Project. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1987.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. **Assessment and realistic mathematics education.** Utrecht: CD-β Press/Freudenthal Institute, Utrecht University, 1996. Disponível em: <<http://igitur-archive.library.uu.nl/dissertations/2005-0301-003023/title.pdf>>. Acesso em: 18 out. 2009.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. The role of context in assessment problems in mathematics. **For the Learning Mathematics**, Quebec, v. 25, n. 2, p.2-9, 2005. Disponível em: <<http://www.fi.uu.nl/~marjah/documents/01-Heuvel.pdf>>. Acesso em: 18 out. 2009.

VIOLA DOS SANTOS, J. R. **O que alunos da escola básica mostram saber por meio de sua produção escrita em matemática**. 2007. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007. Disponível em: <<http://www.uel.br/grupo-estudo/gepema/03%20publicacoes.htm>>. Acesso em: 18 out. 2009.

VIOLA DO SANTOS, J. R.; BURIASCO, R. L. C. Características dos problemas que os alunos constroem a partir do enunciado das questões. **BOLEMA**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro - UNESP, v. 22, n. 32, p.147-160, 2009. Disponível em: <<http://cecemca.rc.unesp.br/ojs/index.php/bolema/article/view/2076/2262>>. Acesso em: 18 out. 2009.

WILSON, L. D. On Tests, Small Changes Make a Big Difference. **Teaching Children Mathematics**, Reston, v. 11, n. 3, p.134-137, 2004.