ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org//10.23925/1983-3156.2018v20i1p182-198

A importância da função discursiva de designações de relações algébricas para o desenvolvimento do pensamento algébrico

The importance of the discursive function of algebraic relations designations for the development of algebraic thought

CÉLIA FINCK BRANDT[1]

MÉRICLES THADEU MORETTI[2]

CARINE SCHEIFER[3]

FÁTIMA APARECIDA QUEIROZ DIONIZIO[4]

Resumo

A investigação contou com um instrumento de coleta de dados subsidiadas pelas ideias de Raymond Duval relacionadas à aprendizagem da álgebra, aplicado a 115 alunos do 7º e 8º anos de escolas do estado do Paraná no Brasil. Foi analisada uma das questões do instrumento relacionada à ideia de que não são as letras que são importantes, mas as operações discursivas de designação dos objetos feitas por meio da língua natural ou formal. Os resultados encontrados revelaram formas de designação e redesignação diretas e verbais em linguagem natural, numérica ou algébrica ou indiretas e descritivas que implicaram na utilização de letras com utilização de léxicos associativos e, dessa forma, a identificação da atribuição de significação à essas letras pelos alunos.

Palavras-chave: *Álgebra; Registros de Representação discursivos; Ensino Fundamental.*

Abstract

The present research used a data collection instrument subsidized by some of Raymond Duval's ideas related to learning algebra. The instrument was applied to 115 students from the 7th and 8th years in the state of Paraná, in Brazil. One of the questions of the instrument was analyzed in relation to the idea that it is not the letters that are important, but the discursive operations of designating objects, which are made through natural or formal languages. The results revealed specific forms of direct and verbal designation and reassignment in natural, numerical or algebraic language or, indirect and descriptive that implied the use of letters through a process of associative lexicons and, therefore, the assignment of meaning to such letters by students.

Keywords: *Algebra; Discursive Representation records; Elementary school.*

1 Doutora: Professora do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual de Ponta Grossa - brandt@bighost.com.br.
[2] Doutor: Professor do PPGECT / Universidade Federal de Santa Catarina - mthmoretti@gmail.com.
[3] Mestre: Universidade Estadual de Ponta Grossa - carine.scheifer@gmail.com.
[4] Doutoranda: Universidade Estadual de Ponta Grossa - faqdionizio@hotmail.com.

Introdução

Este estudo focalizou as contribuições de Raymond Duval para o ensino e aprendizagem da Álgebra que busca respostas para a seguinte questão: Quais as diferentes maneiras de designar relações algébricas (que envolvem números, letras e operações matemáticas) pelos alunos do oitavo ano do ensino fundamental, por meio de registros de representação discursivos (língua natural, linguagem numérica ou linguagem algébrica)?

Os esforços depreendidos culminaram também na elaboração de um instrumento de coleta de dados, com questões sobre álgebra, propostas a alunos de oitavos anos em algumas escolas da rede pública de ensino do estado do Paraná. Esse instrumento, após aplicações em diferentes turmas de diferentes cidades do estado do Paraná (Arapoti, Araucária e Ponta Grossa), sofreu reformulações para melhor clareza e entendimento dos enunciados propostos. O instrumento, depois de reformulado, foi aplicado novamente, em outras escolas da rede estadual de ensino, das cidades Ponta Grossa e Cascavel, oportunizando o desenvolvimento da pesquisa em diferentes realidades escolares.

Após essas aplicações os pesquisadores voltaram-se ao levantamento e categorização das diferentes formas de designação de relações algébricas, apresentadas pelos alunos e reveladas no instrumento de coleta de dados, a partir de seus registros escritos, cujos resultados serão discutidos no texto em questão.

A referida pesquisa, bem como os critérios para elaboração do instrumento de coleta de dados e as análises realizadas, vêm sendo conduzida por questões relevantes no processo de ensino e aprendizagem sobre um ponto de vista cognitivo e epistemológico segundo Raymond Duval. São elas: O que é o conhecimento matemático? O que ele pode ter de diferente dos outros tipos de conhecimento? Qual a natureza dos objetos e como se dá o acesso a eles? Quais são os sistemas, estruturas ou capacidades do sujeito necessárias ou mobilizadas para o acesso aos objetos, diretamente ou por uma sequência de processos conscientes ou não conscientes? Qual a natureza da relação cognitiva entre esses processos e os objetos?

Essas são questões essenciais levantadas por Raymond Duval por meios das quais se desenvolveram as primeiras discussões que se desencadearam devido à complexidade da compreensão dos conceitos matemáticos e à natureza dos seus objetos. Tal complexidade deve-se ao fato de que os conceitos matemáticos não podem ser observáveis, pois não têm existência física. A situação epistemológica do conhecimento matemático, segundo o autor, é totalmente diferente das demais disciplinas científicas cujos objetos de estudos são acessíveis às percepções dos sujeitos ou por instrumentos.

A forma de apreensão de conceitos matemáticos se dá, unicamente, por meio dos registros de representações: um mesmo objeto pode ser representado por diversos registros, no entanto, só há compreensão em matemática se houver a distinção entre o objeto e sua representação.

A abordagem cognitiva foi levada em consideração no presente estudo que objetiva a superação das dificuldades para o ensino e a aprendizagem da álgebra. Esse ponto de vista é diferente do ponto de vista matemático sobre o ensino da álgebra que, segundo Duval (2011b) é incompatível com o ponto de vista cognitivo. O ponto de vista matemático, segundo o autor, está organizado da seguinte maneira:

i) definição dos conhecimentos globais a serem adquiridos ao final de um ciclo de ensino e dos objetivos finais do ensino da álgebra (estes conhecimentos são estabelecidos pelos matemáticos, pelos didáticos, pelos professores da educação e pelas políticas ministeriais);

ii) definição da decomposição a ser feita em elementos de base que dirão que tarefas e problemas propor, visando um desses elementos de base;

iii) definição da progressão organizada (sobre um ano, um ciclo) para adquirir um desses elementos de base, considerado o mais importante dos três. Essa progressão vai decidir a progressão que deverá será feita em um ano, dois anos e cabe aos professores e aos psicólogos que deverão pensar como fazer e o que fazer para atingir esses objetivos.

No entanto, Duval (2011b) entende que o caminho é inverso: é preciso primeiro levar os alunos a utilizarem as letras para designar relações entre números e operações matemáticas entre esses números e, ao colocá-las na forma de equação começar a trabalhar com as ideias de igualdade e desigualdade. O autor defende que essa ordem é mais complicada e, ao apontar o porquê dessa complexidade, faz um alerta: equacionar um problema fornecido em um registro discursivo não é tarefa fácil. Se não conseguirmos equacionar todo o resto será construído sobre areia. Colocar em equação serve para a realidade. O problema é que, nem os matemáticos e nem os didáticos compreendem o porquê da dificuldade de ir do domínio matemático para a realidade e vice-versa. Para colocar em equação, estes profissionais, há dois séculos procedem da mesma forma e admitem as dificuldades dos alunos para aprender. Os próprios matemáticos afirmam que colocar em equação envolve muitas dificuldades. Eles dizem que o aluno deve reconhecer a incógnita do problema, aceitar designá-la por uma letra e operar sobre ela como ele faz com um número e, também, saber traduzir os dados mais correntemente verbais em uma cadeia de operações escritas com letras e números. No entanto esse caminho é complexo, segundo Duval (2011b), e deve ser objeto da organização do ensino segundo um ponto de vista cognitivo.

Ao defender o ponto de vista cognitivo, Duval (2011b) apresenta cinco ideias que devem ser levadas em consideração e que definirão a decomposição dos objetivos do ensino para a aquisição dos conceitos algébricos: 1ª ideia – contemplar, no ensino, as operações discursivas de designação dos objetos feita por meio da língua natural ou formal; 2ª ideia – propor, no ensino, a elaboração de problemas pelos alunos; 3ª ideia – propor, no ensino, a resolução de problemas com recurso a uma representação auxiliar condicional; 4ª ideia – propor, no ensino, a resolução de problemas reais com fórmulas; 5ª ideia – propor, no ensino, listas abertas de números, para identificação da ocorrência das letras na determinação do padrão de regularidade das relações entre os elementos das listas. Essas ideias serão analisadas adiante.

A aprendizagem da álgebra na perspectiva de Raymond Duval

Antes de aprofundar as elucidações de Raymond Duval sobre a primeira ideia da organização do pensamento algébrico, precisamos compreender alguns conceitos de aspectos gerais da teoria dos Registros de Representação Semiótica relacionados às funções do discurso e suas respectivas operações e, ao mesmo tempo, elucidar suas contribuições para análise das produções dos alunos relacionadas às compreensões dos objetos algébricos.

Mas quais são as funções discursivas que determinam as operações discursivas e o quê representam?

De acordo com Duval (2004, p. 89), a organização de um discurso depende sempre das funções discursivas que cumpre e das operações discursivas realizadas. Isso porque "esse discurso sofre a influência dessas funções e da predominância dada a uma ou outra e da seleção de algumas operações específicas a elas". A análise de um discurso não pode ser realizada apenas sobre suas formas linguísticas de expressão.

O autor afirma que um sistema semiótico é considerado como uma língua, quando permite cumprir todas as funções discursivas, as quais são compreendidas por: a) referencial ou de *designação* para designar objetos, dizer alguma coisa sobre os objetos que designa (sob a forma de uma proposição enunciada), vincular a proposição enunciada com outras em um todo coerente (descrição, inferência,...) e assinalar o valor, o modo ou o status combinado para uma expressão por parte de quem a anuncia (a função referencial é a que designa "[...] sobre o que, ou a propósito do que, vamos enunciar qualquer coisa. As unidades de sentido correspondentes à designação dos objetos não são as palavras, mas as expressões que combinam pelo menos duas palavras." (DUVAL, 2004, p. 78).); b) apofântica, para expressar enunciados completos (a função apofântica implica na operação de constituição de um enunciado completo, que consiste na operação que define uma frase. Pode representar uma afirmação, negação, interrogação, ordem, etc.(DUVAL, 2004)); c) de expansão discursiva, para articular enunciados completos em uma unidade coerente (a função de expansão discursiva implica na operação de articulação de enunciados completos em uma unidade coerente, ou seja, “[...] são aquelas que organizam uma sequência de frases em unidade com um mesmo propósito e que lhe dão uma coerência.” (DUVAL, 2004, p. 79).);d) de reflexividade discursiva, para a transformação de um enunciado completo (a função de reflexividade discursiva implica na operação de transformação potencialmente recorrente de um enunciado completo, que permite a interpretação a partir do vínculo que se estabelece entre o ato intencional e a produção de um enunciado. “Isto quer dizer que uma língua deve permitir explicitar no enunciado mesmo a maneira como o locutor emprega a língua para dizer o que quer dizer.” (DUVAL, 2004, p. 121).

Em cada uma dessas funções discursivas, diferentes operações discursivas podem ocorrer. No caso da função referencial, estão presentes quatro operações possíveis: a) designação pura que consiste na identificação de um objeto; b) categorização simples que identifica um objeto por uma de suas características; c) determinação que torna preciso o campo de aplicação da operação de categorização e; d) descrição que consiste em identificar um objeto pelo cruzamento de diversas operações de categorização. No caso da função apofântica estão presentes as operações de predicação e ato ilocutório, e na função de expansão discursiva as operações de descrição, narração, explicação e raciocínio.

Definidas as funções discursivas e suas respectivas operações discursivas, discutiremos a seguir a primeira ideia que deve ser considerada para o ensino da álgebra, de acordo com Duval (2011b). Foi esta ideia que subsidiou o item dois do instrumento de coleta de dados que será analisado neste artigo: **1ª Ideia – Não são as letras que são importantes, mas as operações discursivas de designação dos objetos feita por meio da língua natural ou formal.**

Em relação às práticas espontâneas de designação dos objetos, a álgebra exige que utilizemos de imediato outro tipo de designação. Os objetos que precisaremos designar são as quantidades, os números, as grandezas ou listas abertas de números que podem ter uma relação entre si.

Eis o exemplo no qual podemos analisar diferentes formas de designação de relações algébricas: **Rita e Carlos tem juntos 54 anos. Rita tem oito anos a mais que Carlos. Quantos anos tem Carlos? Quantos anos tem Rita?**Nesse caso as designações necessárias seriam conforme o Quadro 1.

Quadro 1: Designações necessárias a resolução do problema

	Designação verbal	**Dados numéricos**	**Redesignação verbal**
	Idade de Rita Idade de Carlos Idade dos dois é 54	54	x + y = 54

Designação indireta: descritiva ou funcional	Rita tem 8 a mais que Carlos	(... + 8) uma designação numérica relativa à idade de Rita	x = y + 8
Dupla designação de um mesmo objeto	Idade dos dois juntos 54	54: designação direta; designação relativa à idade dos dois juntos	y + (y + 8) = 54

Fonte: Os autores

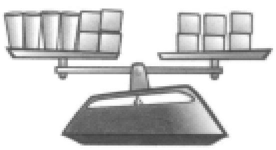
No exemplo é possível verificar diferentes formas de designação: designação direta verbal, redesignação com utilização de letras, designação indireta, designação funcional ou descritiva e dupla designação. Essas diferentes formas de designação exigem percepções e apreensões de natureza cognitiva que nem sempre são fáceis e espontâneas. São apreensões de relações que se estabelecem entre números e operações matemáticas entre esses números em contextos específicos que devem ser exteriorizadas por meio de registros de representação. O que Duval (2011b) propõe é que essa seja uma atividade de ensino específica para oportunizar a aprendizagem da álgebra segundo um ponto de vista cognitivo.

Procedimentos metodológicos de coleta e análise dos dados

Foi desenvolvido um instrumento de coleta de dados, visando à identificação da utilização de conceitos algébricos na resolução das questões propostas aos alunos. Esse instrumento continha quatorze questões e, uma delas, será submetida à análise nesse artigo. Essa questão, apresentada no Quadro 2, compreende uma das cinco ideias colocadas por Duval (2011b) para a aprendizagem da álgebra e para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Quadro 2: Atividade relacionada a 1ª ideia de Duval (2011b): operações discursivas de designação dos objetos

Questão – A balança a seguir só ficou equilibrada quando foi colocado o sexto objeto no prato direito.



Sabendo que cada objeto tem massa igual a 40 gramas, faça o que se pede:
O que acontecerá se colocarmos um objeto de mesma massa somente no prato direito da balança? Justifique. Qual é a massa de cada copo?

Fonte: Os autores

A questão proposta visou investigar as diferentes formas de designação de relações algébricas. Essas formas de designação podem ou não utilizar letras, isto é, uma linguagem algébrica. Elas podem também utilizar a linguagem natural ou a linguagem numérica.

Os dados empíricos coletados, por meio deste instrumento, são compostos por respostas de 115 alunos de oitavo ano de quatro escolas estaduais diferentes. Três destas turmas são do ensino regular do município de Ponta Grossa/PR (turmas nominadas de A, B e C), uma no município de Cascavel/PR (turma nominada por D) e uma turma de Educação de Jovens e Adultos (EJA) - Ensino Médio do município de Ponta Grossa (turma nominada por E). Visando preservar a identidade dos respondentes cada aluno das diferentes turmas foi designado por um número (A1, A2,..., B1, B2,..., C1, C2,..., D1, D2,..., etc.).

Estes dados foram categorizados de acordo com as formas de registro de representação utilizada pelos alunos nas suas resoluções. As análises das respostas dadas serão realizadas com os subsídios teóricos dos estudos de Duval (2004) a respeito das funções discursivas e das operações cognitivas a elas associadas.

Estudos e análises desta questão permitiram a compreensão de que existem sistemas, estruturas ou capacidades, de natureza cognitiva, necessárias que foram mobilizados e desse modo permitiram aos alunos representar padrões de regularidade das relações numéricas envolvendo operações matemáticas entre as massas dos objetos em dois pratos de uma balança, representados por um desenho a eles apresentadas, de forma direta ou por meio de uma sequência de processos conscientes ou não conscientes. Esses sistemas e estruturas foram utilizados para as ações que compreenderam a designação das relações operatórias dessas relações. Essas relações representam uma igualdade cujo padrão de regularidade a ser generalizado, pode ou não envolver letras e, como consequência, a atribuição de significação a essas letras.

Essa designação é uma das funções do discurso e é acompanhada de operações cognitivas de designação pura, categorização simples, determinação ou descrição. É por meio da operação discursiva de designação (denominada de função referencial) que os alunos poderão designar as relações operatórias existentes entre as massas dos objetos colocados nos dois pratos da balança sendo alguns deles conhecidos (as massas dos objetos) e outros não (as massas dos copos). Essas relações poderão ser descritas em língua natural ou por meio da linguagem algébrica.

A representação de um mesmo objeto algébrico pode se dar por meio de diferentes registros de representação, sem perder a referência (DUVAL, 2004). Um aluno pode expressar-se por meio de palavras, esquemas, relações aritméticas, algébricas, gráficos, etc. Esta característica do objeto algébrico é extremamente relevante em nossa análise, pois permite definir três categorias conforme o sistema semiótico utilizado pelo aluno: linguagem natural, linguagem numérica e linguagem algébrica.

Entre os 115 alunos que participaram desta pesquisa, 39 responderam esta questão utilizando a linguagem natural. Dentre estes, somente 4 respondem de forma coerente com o que é solicitado no enunciado, ou seja, expressaram através de suas palavras a sentença matemática que indica o equilíbrio da balança considerando os itens contidos nos pratos. Os demais alunos incluídos nesta categoria deixam a desejar em suas respostas. Alguns confundem sentença matemática com a operação matemática que foi utilizada. Outros ainda respondem de forma incompreensível, como se pode observar no Quadro 3.

A língua natural é utilizada para designação das relações existentes entre a massa dos objetos dos dois lados da balança. Nessa ação entra em cena a função apofântica e o ato ilocutório (o aluno falando ao seu professor que interpreta) e de predicação (frase com sentido, utilizando sujeito, predicado e verbo).

Quadro 3: Respostas apresentadas em Língua Natural

<table>
<tr><th colspan="3">LINGUAGEM NATURAL</th></tr>
<tr><th>ALUNO(S)</th><th>RESPOSTA</th><th>COMENTÁRIOS</th></tr>
<tr><td>B6</td><td>Se a balança está equilibrada, de um lado 6 pesos e do outro 4 pesos e 2 copos, então cada copo tem a metade da massa de um peso.</td><td rowspan="3">Os sujeitos expressam corretamente todas as relações existentes por meio da língua natural.
Partem de uma premissa, fazem uma inferência e chegam a uma conclusão.</td></tr>
<tr><td>C20</td><td>A balança está no meio com o prato esquerdo com 4 copos de 20 gramas e 4 cubos de 40 gramas. E no prato direito há 6 cubos de 40 gramas cada um. Os copos equilibram porque dois copos são o mesmo do cubo de 40 gramas.</td></tr>
<tr><td>D2, D3</td><td>4 copos de 20 g 4 barras de 40g e 6 barras de 40 g formam o mesmo peso.</td></tr>
<tr><td>C2</td><td>Os copos seriam de 50 gramas e os cubos do mesmo prato seria 1kg que daria o mesmo peso.</td><td>O sujeito atribui massa diferente aos objetos, ignorando os dados apresentados no enunciado.</td></tr>
<tr><td>B15, B10, C12, C13, C27, D13, S12</td><td>Divisão</td><td rowspan="7">Os alunos utilizam a língua natural para se referir às operações matemáticas que foram utilizadas para encontrar o valor da massa dos objetos. Neste caso a sentença matemática solicitada foi associada à operação matemática utilizada.</td></tr>
<tr><td>B16</td><td>Dividir os pesos</td></tr>
<tr><td>S11, S22</td><td>Fração</td></tr>
<tr><td>B3</td><td>Equação, Adição e Subtração</td></tr>
<tr><td>B1</td><td>Somando</td></tr>
<tr><td>B7</td><td>Subtrair</td></tr>
<tr><td>C25, C26</td><td>Equação</td></tr>
<tr><td colspan="3">Os demais alunos deram respostas incompreensíveis.</td></tr>
</table>

Fonte: Os autores

A função de expansão discursiva também entra em cena visto que os alunos descrevem o que vêem e, ao mesmo tempo, explicam o raciocínio utilizado para estabelecer a relação entre as massas dos copos e dos objetos. A linguagem natural é o registro de partida de boa parte das repostas dos alunos. Porém, mesmo em linguagem natural, muitos não tiveram êxito para explicar o equilíbrio da balança, o que evidencia a dificuldade desses alunos em relação ao que foi solicitado na atividade. Por essa razão alguns associam a sentença matemática com as operações matemáticas que foram utilizadas. Revelando com isso que no ato ilocutório que se estabelece há necessidade de evidenciar as possíveis interpretações do enunciado pelos alunos. Essas respostas permitem inferir que os alunos utilizaram essas operações para encontrar o valor da massa dos copos de um dos pratos da balança. De fato precisamos somar, subtrair, dividir (fração) e resolver uma equação na qual a massa do copo que é desconhecida precisa ser encontrada.

Os próximos dois quadros apresentam as respostas da categoria das *Relações Aritméticas*. Estas respostas estão divididas em subcategorias: as incorretas (Quadro 4) e as corretas (Quadro 5) com o que foi solicitado aos alunos pelo enunciado da questão.

Quadro 4: Respostas apresentadas com Relações Aritméticas incorretas

<table>
<tr><th colspan="3">RELAÇÕES ARITMÉTICAS – RESPOSTAS INCORRETAS</th></tr>
<tr><th>ALUNO(S)</th><th>RESPOSTA</th><th>COMENTÁRIO</th></tr>
<tr><td>D5</td><td>280k+30</td><td rowspan="5">Respostas incompreensíveis (5 sujeitos)</td></tr>
<tr><td>D18</td><td>24=24</td></tr>
<tr><td>D23</td><td>8, 40 g do lado esquerdo
6, 40 g do lado direito</td></tr>
<tr><td>S8</td><td>4 + 4 = 8
4 + 4 = 8</td></tr>
<tr><td>S21</td><td>4 cop. + 4 objetos + 6 cop. = 40 gramas</td></tr>
<tr><td>B13</td><td>40, 40, 40, 40, 40, 40
40, 40, 40, 40</td><td>Só expressa os valores dos 10 objetos conhecidos, sem estabelecer uma relação entre esses objetos e os copos.</td></tr>
<tr><td>C24</td><td>Numa balança com 4 copos e 4 objetos deu 120g e na outra com 6 objetos deu 120g. Os copos têm 20 g.</td><td>Calculou a massa dos copos e atribuiu esse valor aos objetos e aos copos nos dois pratos da balança.</td></tr>
<tr><td>D1</td><td>C+Q=240 lado esquerdo
Q=40 Q+Q=240
C= Copo
Q=Quadrado</td><td>Designa 4 copos por C e 4 quadrados por Q, o que é incoerente com as igualdades Q=40 e Q+Q=240</td></tr>
<tr><td>S9</td><td>8 x 6 = 48 gramas</td><td>O sujeito multiplica a quantidade de objetos de um da balança pela quantidade de objetos do outro lado da balança. Ao resultado obtido o sujeito atribui uma unidade medida, no caso gramas.</td></tr>
</table>

Fonte: Os autores

Consideramos incompreensíveis aquelas respostas que não permitiram fazer uma inferência sobre o pensamento do aluno. Foram respostas vagas, que não possibilitaram uma interpretação coesa. Duval (2011b) deixa claro que é difícil colocar em equação. Em sala de aula alunos e professores percebem nitidamente esta dificuldade. O processo de ensino atual costuma começar com a ideia de incógnita, designada por letra, para poder operar sobre ela assim como se faz com número. O aluno faz os tratamentos no interior do sistema semiótico, ou seja, a equação proposta, sem compreender, no entanto, o conceito global da equação e o objeto ao qual ela se refere. Duval (2011b) propõe o inverso, ao invés de impor a letra ao aluno, deve deixar com que o aluno recorra a ela quando achar necessário. Assim o processo cognitivo da aprendizagem da álgebra se constrói em um terreno sólido.

Por essa razão a proposta presente na atividade deixa livre as formas de designação das relações entre as massas dos copos e dos objetos. Essas designações podem ocorrer em língua natural ou em linguagem aritmética. O que é importante é interpretar essas respostas, levando em conta o seu valor lógico. Considera-se também a relação da função apofântica que se faz necessária, pois além de designar os objetos, uma língua precisa ser capaz de dizer algo sobre o objeto que designam. Esta função além de compreender as duas operações que podem ser efetuadas de forma isolada ou em conjunto (a predicação e a elocução), pode também ser compreendida a partir de seu conteúdo ou estatuto. O conteúdo compreende os diferentes aspectos pelos quais ela pode ser considerada, enquanto que o estatuto está relacionado ao papel que preenche na organização global do discurso (DUVAL, 1995).

Uma unidade apofântica também pode ter um valor social, epistêmico ou lógico, que em geral não estão explícitos. Duval (2004, p.105) destaca que um enunciado completo pode ter: apenas um valor social; um valor epistêmico e um valor social; ou um valor epistêmico e um valor lógico. O que irá determinar este valor é o contexto do ato do discurso e do universo cognitivo, representacional e relacional dos interlocutores. No caso em questão as formas de designação das relações entre as massas dos objetos e dos copos não apresentaram valor lógico de verdade. Quando se passa de uma expressão referencial para um enunciado completo, muda-se de nível e de critério de constituição do "sentido" de uma expressão. Este "sentido" encontra-se no valor que toma e não no caráter completo ou suficiente das informações que daria sobre um objeto ou situação do mundo. A mesma análise foi realizada nas respostas corretas apresentadas.

No Quadro 5 estão as repostas consideradas coerentes dentro ainda da categoria das Relações Aritméticas:

Quadro 5: Respostas apresentadas com Relações Aritméticas corretas

RELAÇÕES ARITMÉTICAS – RESPOSTAS CORRETAS		
ALUNO(S)	**RESPOSTA**	**COMENTÁRIO**
Sujeito	**Questão 2B**	**Comentário**
B12	20 . 4 + 40 . 4 e 40 . 6 20.4 + 40.4 = 240 40 . 6 = 240	Já identificou a massa dos copos (20 g) e designa essas relações numericamente. Designa cada lado da balança separadamente.
B19	Esquerdo Direito 4 . 4 = 24 - 16 4 . 6 = 24 copo = 8/4 = 2 1 peso = 40 g	Não utiliza o zero na forma escrita (valor equivale a 4). Faz as operações corretamente. De um lado 4.6, isto é, 40 gramas vezes 6 objetos. Do outro lado faz 40 gramas vezes 4 objetos obtendo 16 (ou seja 160) subtraindo de 240, resultado em 80 representado por 8. Divide por 4 copos dá 2, interpretado como 20.
C14, C19, C21	4+4 do lado esquerdo 3+3 do lado direito	Representam o número de objetos de cada lado da balança, isto é, tem 4 copos e 4 objetos no lado esquerdo e 3 + 3 objetos no lado direito.
C3	40+40+40+40+40+40=240 (flechas mostrando um lado e o outro da balança). 40+40+40+40+40+40=240	Do lado direito se refere aos 6 objetos valendo 40 gramas cada um e do lado esquerdo atribuindo a dois copos o valor de 40 gramas também
C7, C10	40+40+40+40+40+40 direito 20+20+20+20+40+40+40+40 esquerdo	Designa a relação de cada lado da balança aritmeticamente, já estabelecendo a relação de igualdade, mas não faz isso numa única sentença.

D8, D9	80g+160g=240g 40x6=240g	Expressaram corretamente a massa de cada prato separadamente, por meio de uma relação aritmética.
C15	240=240 $240 \neq 240$ (+40) Anotações na balança	Designa o total de massa dos dois pratos da balança e designa a relação da desigualdade se fosse acrescentado mais um objeto a um dos pratos da balança.

Fonte: Os autores

Essas relações apresentadas dizem algo sobre as massas dos copos e dos objetos nos dois pratos da balança. A função de expansão discursiva permite a interpretação das respostas e a compreensão das respostas apresentadas pelos alunos. Duval (2004) expressa particularidades da função discursiva referencial e aponta ainda algumas considerações sobre os léxicos para as operações de designação, visto que nem todos os léxicos permitem cumprir as quatro operações de designação e para compreendê-los melhor, ele os distingue dois grandes tipos de léxicos: os sistemáticos e os associativos. O léxico sistemático permite somente a operação de designação pura e não as de categorização ou de determinação. Esses léxicos apresentam a restrição de não permitirem designar mais que os objetos que pertencem a um domínio particular. Um léxico é associativo quando remete a diversidade de objetos e de fenômenos do meio físico e do entorno sociocultural e não apenas um conjunto de objetos teoricamente elementares. Os léxicos associativos são próprios das línguas naturais e não são restritos a nenhum domínio particular de objetos. Nas respostas apresentadas foram utilizados léxicos sistemáticos uma vez que as sentenças apresentadas utilizaram valores numéricos.

A função de expansão discursiva permite "articular diversos enunciados completos na unidade coerente de uma narração, de uma descrição, de uma explicação ou de um raciocínio" (DUVAL, 2004, p. 94). O autor afirma que uma língua não deve apenas expressar enunciados completos, mas também deve vinculá-los em uma unidade discursiva tematicamente contínua e semanticamente não tautológica, que compreende o relato, a descrição, a explicação, o comentário, a argumentação, a dedução, o cálculo, entre outros (DUVAL, 2004). As unidades discursivas identificadas caracterizaram descrições, explicações e cálculos que permitiram fazer inferências a respeito do raciocínio dos alunos. Os professores esperam de imediato que as letras entrem em cena, porém isso não ocorre. No entanto, não significa que as respostas estejam erradas, ao contrário, é importante estar atento à interpretação dos alunos em relação à sentença matemática solicitada.

Isto quer dizer que uma língua precisa vincular diferentes enunciados relativos ao mesmo tema, de forma a explicar melhor o assunto, mas sem cair na redundância. Esta função é importante por permitir que o interlocutor faça inferências e torne explícito o que, no discurso, está implícito. Ou seja, o discurso diz mais do que parece dizer, isso ocorre por meio das operações discursivas, e estas, por sua vez, pelos modos de progressão do discurso. No Quadro 6 estão presentes as respostas que já apresentam letras e, por essa razão, foram, por nós, caracterizadas como algébricas. Destacamos as que se aproximam do valor lógico de verdade das que não caracterizam um valor lógico de verdade. Importante será o professor perceber as primeiras tentativas de expressar as relações entre as massas dos copos e dos objetos não tendo o valor das massas dos copos conhecidas. As inferências possibilitadas anunciam a trajetória da evolução do pensamento algébrico dos alunos que precisa ser levada em conta no momento do ensino.

Quadro 6: Respostas apresentadas com Relações Algébricas incorretas

RELAÇÕES ALGÉBRICAS – RESPOSTAS INCORRETAS		
SUJEITO(S)	**RESPOSTA**	**COMENTÁRIO**
D11	$E=40$	Incompreensível
D20	$x=40$	
E7	X	
E5	$4x \quad 4 . 40 x$ $= 6 . 4$	Quase consegue estabelecer a sentença, no entanto para o lado esquerdo designa os 4 copos por x e substitui os 4 objetos por 40 e ainda chama de x e iguala ao outro lado já substituindo as massas dos copos por 40 (registrando, no entanto 4). Aqui o aluno tenta associar o valor desconhecido a uma letra e o faz de forma equivocada sem deixar de evocar os valores apontados no enunciado e os objetos visualizados na figura.
E6	$4x + 4.40 = 6.4$	Esse aluno aproxima-se um pouco mais, no entanto substitui a massa dos objetos do lado direito da balança por 4 e não 40.
B18	$8x = 6y$	Designação errada dos corpos dos dois pratos da balança, na qual a massa total dos 4 copos e dos 4 objetos foram designados por 8x e os outros seis objetos do lado direito por 6y. Nesse sentido infere-se que o aluno considera que a massa dos copos e objetos será a mesma. Por essa razão tem que denominar a massa dos objetos do lado direito da balança por y como sendo de valor diferente dos objetos do lado esquerdo da balança. O valor verdade da sentença fica comprometido.
C1, C18	$6+y=14$ $8+x=14$	Designaçãoda relação de igualdade de cada prato da balança em relação ao número de objetos. Nesse caso 6 objetos mais um número de objetos representado por y dará os 14 objetos existentes e do outro os 8 objetos mais um número de objetos representado por x também deverá ser igual aos 14 objetos.
C30	$4C+40+40=640$	Designação por C da massa dos copos, mas o não estabelecimento correto da relação, devido à consideraçãoda massa de dois objetos somente e da indicação de uma equivalência equivocada.
C6	$x+200=240$	Designação dos quatros copos por x e adição de 200 gramas já considerando mais 40 gramas de um objeto que também deveria ser acrescentado do lado esquerdo, para não desequilibrar a balança. No entanto o esquecimento da adição desse mesmo objeto ao prato do lado direito.
S1	$240 = 240$ $4y + 4x = 6$	Estabelecimento da relação correta, porém o esquecimento da representaçãodo lado direito por 6x ou 6y como do lado esquerdo.
S16	$40 \neq x$	Designação por x dos copos e de que cada copo não pesará 40 g.
S2	$x = 240 + 240$	Expressão do total dos dois pratos da balança por meio dessa sentença.
S4, S18	$40 + 4x = 240$	Designaçãodos copos por x, mas erroà atribuição de 40 g para os dois objetos do lado esquerdo.
S5	$4x + 2y = 6y$	Designação dos copos por x e dos objetos por y, mas representação errada de somente dois objetos do lado esquerdo. Tentativa de igualar os coeficientes numéricos.
C23	$4x+6=14$	Incompreensível. Se o sujeito indicasse 4+x no lugar de 4x, poderíamos inferir que ele estaria fazendo uma relação da quantidade total de objetos da balança.

Fonte: Os autores

O sujeito E7 ao responder somente “x”, não se expressa por meio de uma representação, e tampouco como signo. Pois conforme esclarece Duval (2011a, p.38) “as representações semióticas são as frases em linguagem natural, as equações, e não as palavras, os algarismos e as letras”. Diz ainda que “é apenas no interior de um sistema semiótico que alguma coisa pode funcionar como signo” (DUVAL, 2011a, p.30).

As inferências possibilitadas e apresentadas no quadro apontam para a forma de trabalho do professor com seus alunos para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Ao identificar as inconsistências e fragilidades, abre-se o caminho para a reorganização da prática educativa, tendo por foco a superação das dificuldades dos alunos e as orientações necessárias para que eles reflitam sobre suas respostas junto ao professor ou colegas. O primeiro passo será a tomada de consciência dessas inconsistências ou fragilidades por meio de dissonâncias cognitivas provocadas pelo professor para, na sequência, apresentar novas respostas que também serão foco de análises.

Vamos prosseguir apresentando respostas corretas de natureza algébrica e com as respectivas análises realizadas.

Quadro 7: Respostas apresentadas com Relações Algébricas corretas

RELAÇÕES ALGÉBRICAS – RESPOSTAS CORRETAS		
SUJEITO(S)	**RESPOSTA**	**COMENTÁRIO**
C29	4y+4x=6x	Designação da massa dos copos por y e da massa dos objetos por x. Essa relação está correta, pois a substituição do valor de x por 40 permite a obtenção da massa dos copos.
S3	y.4 + x.4 = x.6 y.4 + 40.4 = 40.6	
C8, C28	4x+4=6	Designação dos copos por x e não designaçãodos objetos por y colocando somente o número de objetos. Nesse caso a letra x designa o número de copos e não a massa dos copos.
E1, E3	4x + 4 . 40 = 240 4x + 160 = 240 x = 20	Designação da massa dos copos por x e substituiçãodas massas dos objetos por 40 e dessa forma a representação por meio da sentença matemática e resoluçãoda equação.
E2, E9, E12, E13, E14, E16	4x + 4.40 = 6.40	
E4, E15	x + 160 = 240	Designação por x dos quatro copos e criaçãoda sentença com substituiçãodo valor de cada objeto por 40. Essa designação é diferente, pois a letra x se refere aos 4 copos. O valor da massa encontrado no final é dividido por 4 para se referir à massa de cada copo individual.
S10	x + 10 = 14	Designação dos 4 copos por x e adição dos objetos dos dois lados da balança. A sentença matemática revela a quantidade de elementos (objetos e copos) existentes na situação, no caso os 14 elementos ao todo. Na realidade o sujeito não conseguiu representar a relação existente entre os pratos da balança por meio de uma sentença e sim os elementos existentes. Essa relação assim designada não deixa de estar correta, pois o aluno me diz que um número de copos mais 10 objetos representam no total 14 elementos (entre copos e objetos)
S7	x são os objetos, y os copos.	Por meio da expansão discursiva na forma semântica, é possível inferir que as relações estabelecidas entre os dois lados da balança são feitas por meio da língua natural e são de natureza cognitiva, pois o sujeito equipara os objetos

	Sendo assim y é metade de x. $4y + 10x =$	dos dois lados da balança e verifica que a massa de dois desses objetos equivale à massa dos 4 copos, portanto cada copo tem a metade da massa de cada objeto. Ao passar para a linguagem algébrica o sujeito não consegue estabelecer as relações entre os dois lados da balança e expressa matematicamente a quantidade de copos e de objetos sem saber indicar o resultado.

Fonte: Os autores

Antes de proceder com as análises será necessário apresentar aspectos relacionados à função de expansão discursiva que é operada de dois modos, por substituição ou acumulação, e por quatro formas de expansões distintas (expansão lexical, expansão formal, expansão natural, expansão cognitiva). Os diferentes textos podem combinar várias formas de expansão, mas Duval (2004) afirma que todos utilizam pelo menos uma dessas quatro formas. Essas quatro formas podem mais bem observadas no Quadro 8.

Quadro 8: As quatro formas de expansão discursiva de uma expressão

Mecanismos de expansão	**Similaridade interna** (continuidade sem um terceiro enunciado)	**Similaridade externa** (continuidade com um terceiro enunciado)
Similaridade semiótica (são recuperados alguns significantes)	Expansão LEXICAL (recuperação do sentido de uma mesma unidade do vocabulário sob um modo fonético-auditivo ou gráfico-visual) Associações verbais, ocorrências Linguagem do inconsciente	Expansão FORMAL (recurso exclusivo aos símbolos: notações, escrita algébrica,...) Raciocínio dedutivo (proposições de estrutura funcional) Cálculo proposicional, cálculos de predicados
Similaridade semântica Lei de Frege: Significantes diferentes e mesmo objeto. (Invariância referencial estrita ou global)	Expansão NATURAL (somente o conhecimento da linguagem corrente é suficiente) Descrição, Narração Argumentação retórica Silogismo aristotélico (proposição de estrutura temática predicativa) Raciocínio pelo absurdo	Expansão COGNITIVA (exige o conhecimento de definições, regras e leis para um domínio de objetos) Explicação Raciocínio dedutivo (proposição de estrutura temática condicional) Raciocínio pelo absurdo

Fonte: Duval (2004, p.119)

Segundo Duval (2004) a similaridade semiótica compreende a elaboração de enunciados por meio da repetição dos mesmos signos ou das mesmas palavras (por exemplo, o pelo do cachorro ou a frase vou pelo lado de dentro) e a similaridade semântica acontece quando há uma invariância referencial entre os enunciados, o que faz com que haja uma continuidade temática entre os enunciados, permitindo um progresso contínuo (por exemplo um número positivo e $x > 0$). O autor também destaca que a similaridade semiótica e a similaridade semântica não garantem a continuidade do discurso. Neste caso se faz necessário considerar uma segunda dimensão, que é a necessidade ou não de se recorrer a um terceiro enunciado.

Nas sentenças matemática apresentadas é possível identificar uma similaridade semântica, pois as sentenças matemáticas elaboradas têm por referência o mesmo objeto da figura apresentada. Em ambas as representações (uma em língua materna e outra algébrica) o valor desconhecido é explicitado: “encontre a massa dos copos” equivale a 4x em que x representa a massa de cada copo. Em outros casos as letras podem ser utilizadas para representar o número de objetos e copos dos dois pratos da balança: 20x + 4.40 = 6.40.

O caso mais comum é quando a passagem de um enunciado para sua expansão acontece de forma direta, sem a necessidade de um terceiro enunciado, que compreende a chamada de similaridade interna de dois enunciados (DUVAL, 2004). Quando a passagem é indireta, com a necessidade de mediação explícita ou implícita de um terceiro enunciado, Duval (2004) denomina esse caso de similaridade externa. Ele também afirma que “não há expansão discursiva de um enunciado que não se baseie na combinação de uma similaridade semiótica ou semântica e de uma similaridade interna ou externa” (DUVAL, 2004, p. 119).

Essas considerações nos permitem inferir que por vezes precisamos recorrer a um terceiro enunciado para fazer as inferências e, em outros essas inferências podem ser realizadas de forma direta. Isso ocorre nos casos de sentenças com valor lógico de verdade ou de falsidade. Nas sentenças corretas as inferências são possibilitadas pelo valor verdade lógico e nos casos das incorretas as inferências precisam identificar as fragilidades e inconsistências e, por essa razão, precisam recorrer a enunciados explicativos dessas fragilidades e inconsistências.

As similaridades permitirão atribuir significação ao uso das letras pelos alunos e, ao mesmo tempo, esclarecer as formas de conduzir a prática educativa voltada para o ensino da álgebra. Essa forma de proceder deverá levar em consideração as formas de designação de relações entre quantidades conhecidas e desconhecidas passando por formas com utilização da língua natural, caminhando para a utilização da linguagem numérica e culminando na utilização da linguagem algébrica. Essa trajetória aqui identificada e apresentada pode dar indícios de um bom caminho para a sala de aula em se tratando do desenvolvimento do pensamento algébrico.

Considerações Finais

A partir dos dados analisados é possível perceber, entre outras, uma das essenciais considerações que Duval (2009) defende sobre o ensino da matemática, que é a importância de se trabalhar com diversas representações semióticas de um mesmo objeto matemático. Esta diversidade é absolutamente necessária e inevitável à conceitualização, pois os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis à percepção. Partirá do aluno a necessidade de trabalhar com as representações destes objetos, cabendo ao professor conduzir as atividades para que o processo de conceitualização se dê de forma espontânea, permitindo ao aluno desenvolver sua capacidade cognitiva, superando com isso, a barreira da linguagem natural e da linguagem aritmética, para que se obtenha a capacidade de pensar algebricamente sabendo articular essas e outras linguagens de sistemas semióticos diferentes.

Nesse texto procuramos evidenciar as contribuições de Raymond Duval para a aprendizagem da álgebra.

As diferentes formas de designação das relações entre números, operações aritméticas e incógnitas de igualdades podem ser realizadas de três formas distintas: por meio da língua natural (uma designação direta) por meio de uma linguagem aritmética (igualmente uma designação direta com utilização de léxicos sistemáticos, isto é, os próprios números) e por meio de uma linguagem algébrica significando uma redesignação ainda direta com a utilização de léxicos associativos que representarão ora o número de objetos ou copos, ora a massa desses objetos ou copos. A linguagem algébrica implica nessa redesignação, pois os alunos precisarão utilizar letras para representar as relações já percebidas e expressas para si mesmo: a massa de 4 objetos (4x) mais a massa de 4 copos (4y) é igual à massa de 6 objetos (6x). A função desses léxicos será interpretada no momento da designação indireta que será descritiva ou funcional. Isso também ocorre quando a designação indireta não é correta. Nessas situação é possível a realização de inferências por parte do professores considerando o ato ilocutório da função apofântica. É o caso, por exemplo da designação indireta das relações existentes por meio da sentença 4x+4=6. Nesse caso podemos demos inferir que o aluno quis dizer: 4 copos mais 6 objetos é igual a 6 objetos, o que equivale: a massa de 4 copos com a massa de 4 objetos é igual a massa de seis objetos. No caso das relações entre as massas dos copos e dos objetos distribuídos nos dois pratos da balança essa designação será descritiva. É no momento dessa designação descritiva que a utilização da letra será identificada. Por exemplo: Na sentença 4x + 4y = 6y, x é utilizado para designar a massa dos copos e y a massa dos objetos. Já na sentença 4 + 4x = 6, x representa o número de copos e seu valor estabelece a relação entre a massa de um objeto e um copo, isto é, cada dois copos representam um objeto ou um copo tem metade da massa de um objeto.

As diferentes designações das relações apresentadas pelos alunos revela como as letraspoderão ser introduzidas no ensino. As situações poderão ser apresentadas aos alunos e ao professor cabe a forma de conduzir os alunos à passagem das designações diretas e verbais às redesignações também diretas e verbais com a utilização de léxicos associativos. Cabe ao professor, também, no momento do ensino a solicitação das designações indiretas para identificar a significação atribuída às letras pelo próprio aluno e a tomada de consciência dessa significação.

A questão proposta no instrumento de coleta de dados da pesquisa apresentou resultados relacionados à primeira ideia de Duval (2011b) sobre a importância da função referencial de designação antes do ensino de letras propriamente dito para a aprendizagem da álgebra.

Esses resultados contribuem, ao mesmo tempo, para a disseminação das ideias de Raymond Duval em relação à aprendizagem da álgebra e, como consequência, suas contribuições para a organização da prática educativa pelo professor e para a compreensão das respostas apresentadas pelos alunos em questões que envolvem a álgebra.

Referências

DUVAL, R. **.** *Sémiósis et pensée humaine:*registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Suisse: Peter Lang, 1995.

_______, R. *Semiosis y pensamiento humano:* registros semióticos y aprendizajesintelectuales. Santiago de Cali: Peter Lang, 2004.

_______, R. *Semiósis e Pensamento Humano:*registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

_______, R. *Ver e ensinar a matemática de outra forma:*entrar no modomatemático de pensarosregistros de representaçõessemióticas. Org. Tânia M. M. Campos. Trad. Marlene Alves Dias. São Paulo: Proem Editora, 2011a.

_______, R. *Deux regards opposes sur les points critiques sur l'enseignement de l'algèbre au collège (11-15 ans).* Palestra proferida no Programa de Pós Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso em 2011b.

Texto recebido: 05/10/2017
Texto aprovado: 13/03/2018