

## **Un estudio comparado de los contenidos de muestreo en la Educación Secundaria Obligatoria en Chile**

**A comparative study of sampling contents in the Chilean curriculum for compulsory secondary education**

---

KAREN RUIZ-REYES<sup>1</sup>

NURIA BEGUÉ<sup>2</sup>

CARMEN BATANERO<sup>3</sup>

JOSÉ MIGUEL CONTRERAS<sup>4</sup>

### **Resumen**

*Los últimos cambios curriculares han introducido el muestreo, base de la inferencia, como un contenido fundamental en el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria, aunque encontramos diferencias en las orientaciones curriculares de diferentes países. El objetivo de este trabajo es analizar la presentación del tema en los lineamientos curriculares chilenos de esta etapa educativa y comparar con las directrices españolas, los estándares americanos y las recomendaciones del proyecto GAISE. Se utiliza el enfoque Ontosemiótico para poner de manifiesto los elementos comunes y no comunes del tema en estas orientaciones, así como para mostrar la complejidad del tema.*

**Palabras clave:** *muestreo, análisis curricular, educación secundaria, significado institucional pretendido.*

### **Abstract**

*Recent curricular changes introduce sampling, which is the base of inference, as a fundamental content in the compulsory secondary school curricula; however we find different approaches in the curricular guidelines in various countries. The aim of this work is characterizing the way in which the concept is dealt with in the Chilean curricular guidelines for this educational stage and to compare with the Spanish guidelines, the American Standards and the recommendations in the GAISE project. We use the ontosemiotic approach to highlight these differences and reveal the topic complexity.*

**Keywords:** *statistical inference, sampling, ontosemiotic approach, curricular analysis, institutional meaning.*

---

<sup>1</sup> Master en Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Didáctica de la Matemática - karenruizreyes@gmail.com

<sup>2</sup> Master en Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Didáctica de la Matemática - nbegue@correo.ugr.es

<sup>3</sup> Doctora en Ciencias Matemáticas, Catedrática, Universidad de Granada, Didáctica de la Matemática - batanero@ugr.es

<sup>4</sup> Doctor en Didáctica de la Matemática, Profesor Contratado Doctor, Universidad de Granada, Didáctica de la Matemática - jmcontreras@ugr.es

## Introducción

La inferencia estadística es una herramienta esencial en muchas ramas de la actividad humana, donde se utiliza en la realización de estudios y toma de decisión. Este hecho explica que su enseñanza esté presente en la Universidad y la formación profesional, así como en alguna modalidad de Bachillerato con el fin de preparar a los futuros profesionales (BATANERO, 2013). Sin embargo, a pesar de ser uno de los temas más enseñados, es también uno de los que peor se comprenden y aplican, debido a la gran cantidad de conceptos y procedimientos que intervienen en la inferencia y al corto tiempo que se dedica a su enseñanza.

La teoría del muestreo analiza la forma de recoger las muestras y las propiedades de las mismas para asegurar que las conclusiones a partir de ellas sean fiables. Al ser la base de la inferencia, es importante que los estudiantes logren una comprensión suficiente del muestreo, antes de continuar con el estudio de otros temas, como el contraste de hipótesis y el intervalo de confianza, pues de lo contrario, los errores de comprensión del muestreo van a proyectarse en los contenidos posteriores (BURRILL; BIEHLER, 2011).

El muestreo fue incluido en su lista de ideas fundamentales por Heitele (1975), por ser un vínculo entre estadística y probabilidad. Según este autor, los procesos de muestreo no solo son frecuentes en la ciencia o vida profesional, sino también en la vida diaria, pues argumenta que nuestro conocimiento se construye observando muestras de parcelas de la realidad, que es demasiado compleja para ser observada en su totalidad. Un ciudadano informado necesita entender la forma en que los resultados de una encuesta fueron determinados a partir de una muestra de la población estudiada; asimismo, debe juzgar la validez y fiabilidad de los resultados a partir de la información de la forma en que seleccionó la muestra, así como apreciar que los resultados están sujetos a errores de muestreo (FRANKLIN et. al, 2007). Los estudiantes se encuentran con estas encuestas cuando leen la prensa o ven Internet o la televisión, ya que a menudo se informan noticias de elecciones, estudios científicos o económicos basados en muestreo.

La necesidad actual de una capacidad mínima para comprender el muestreo y las condiciones adecuadas en que debe realizarse ha originado una tendencia en educación

estadística a introducir de manera informal contenidos de inferencia a lo largo del currículo. Por ejemplo, Zieffler et al. (2008) apoyan el desarrollo del razonamiento estadístico informal, que según los autores, tiene una fuerte base en el muestreo, pues consistiría en “el modo en que los estudiantes usan su conocimiento estadístico informal para apoyar inferencias sobre características desconocidas de una población basándose en muestras observables” (p. 44).

A pesar de la importancia del tema resaltada en los apartados anteriores, la investigación didáctica sobre el muestreo es escasa, y se centra principalmente en la evaluación de la comprensión del tema por los estudiantes (ver, por ejemplo, los resúmenes de estas investigaciones en CASTRO-SOTOS et al., 2007; o HARRADINE; BATANERO; ROSSMAN, 2011). Para completar dichas investigaciones, la finalidad de nuestro trabajo es analizar la forma en que introduce y se va ampliando el muestreo en las directrices curriculares chilenas, con niveles progresivos de complejidad. Este es un punto no tratado en investigaciones previas; sin embargo, es necesario para prever la comprensión progresiva del concepto por parte del estudiante.

En lo que sigue se comparan los contenidos de muestreo en el currículo chileno con los de otras directrices internacionales. Utilizamos algunas ideas del enfoque ontosemiótico (GODINO, 2002; 2012; GODINO; BATANERO; FONT, 2007) para mostrar las diferencias entre las orientaciones curriculares analizadas.

## **Antecedentes**

En nuestro análisis tendremos en cuenta que, de acuerdo con Rubin, Bruce y Tenney (1991), la idea de muestra posee dos características complementarias: representatividad y variabilidad. La representatividad de una muestra nos indica que la muestra se parece, en cierto modo, a la población, mientras que la variabilidad indica que una muestra puede ser diferente de otra, por lo que al enjuiciar, pensar e inferir en base a una única muestra es necesario la cautela y el espíritu crítico. Sin embargo, mientras que la representatividad es percibida en forma intuitiva por la mayoría de las personas, la variabilidad pasa, en cambio, desapercibida o es minimizada, debido a la tendencia a buscar patrones deterministas en los fenómenos aleatorios (BATANERO, 2013; OLIVEIRA; CORDANI, 2016).

Además, en situaciones de muestreo es necesario trabajar con tres tipos de distribuciones (HARRADINE; BATANERO; ROSSMAN, 2011; KADIJEVICH; KOKOL-VOLJ; LAVICZA, 2008), que podrían ser confundidas por los estudiantes:

- *La distribución teórica de probabilidad que modela los valores de una variable aleatoria tomada de una población o un proceso.* Dicha distribución depende del valor de uno o varios parámetros que son generalmente desconocidos. Con frecuencia se utiliza la distribución normal, que queda especificada por dos parámetros, su media  $\mu$  y desviación típica  $\sigma$ , o la distribución binomial, cuyo principal parámetro es la proporción de éxitos  $p$ .
- *La distribución del conjunto de datos en una muestra aleatoria simple.* Desde esta muestra, se definen distintos estadísticos tales como la media muestral, la desviación típica muestral o la proporción muestral, que pueden usarse para estimar en forma aproximada los valores que toman los parámetros de la distribución teórica.
- *La distribución muestral de un estadístico.* Cuando, en vez de considerar una única muestra, imaginamos todas las posibles muestra del mismo tamaño de la población el estadístico resultante en todas ellas es una variable aleatoria. Por tanto, tiene una distribución de probabilidad que describe todos los posibles valores que puede tomar el estadístico muestral en todas las posibles muestras. Esta distribución es la que cuesta más trabajo visualizar, pues se trabaja generalmente con una única muestra y es difícil pensar en todas las otras muestras posibles.

Tendremos también en cuenta las investigaciones sobre comprensión del muestreo recogidas en Castro-Sotos et al. (2007) y Harradine, Batanero y Rossman (2011).

## **Marco Teórico**

En nuestro análisis nos basamos en el enfoque ontosemiótico, que considera la actividad matemática como un conjunto de prácticas realizadas en la resolución de problemas (GODINO, 2002; 2012; FONT; GODINO; GALLARDO, 2013). En este enfoque se diferencia entre prácticas institucionales (aceptadas por una institución, por ejemplo, de enseñanza) y personales (específicas de una persona). El significado de un objeto sería el conjunto de prácticas asociadas a dicho objeto y puede ser asimismo institucional y

personal. Para ser más precisos, en nuestro trabajo el análisis del objeto matemático muestreo se realiza desde la faceta institucional y en particular, se trata de caracterizar la forma en que se contempla en los documentos curriculares oficiales.

En el análisis se tendrá también en cuenta los diferentes tipos de objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas que en el marco teórico citado pueden ser de diferente naturaleza:

- *Situaciones-problemas*. Aquellas en las que surge la actividad matemática, en nuestro caso las situaciones que motivan la idea de muestreo; por ejemplo, determinar la composición de una muestra en el muestreo estratificado o estimar las características de una población a partir de una muestra.
- *Lenguaje*. Son los términos, expresiones simbólicas, tablas o gráficos usados para representar la información proporcionada en una situación problemática, las operaciones y objetos utilizando en su resolución y las soluciones encontradas. Por ejemplo, las palabras población, muestra, aleatoria, independiente, estimador, error de muestreo, así como las expresiones simbólicas y los gráficos utilizados en el lenguaje matemático.
- *Conceptos*. Son los objetos matemáticos que se utilizan implícita o explícitamente en la actividad matemática y que pueden ser definidos. Asociados a la idea de muestreo aparecen, entre otros, los de población, elemento, muestra, variable, distribución, estadístico y parámetro.
- *Propiedades o proposiciones* que relacionan entre sí los conceptos. Un ejemplo en probabilidad es que la variabilidad de la distribución muestral es menor al aumentar el tamaño de las muestras.
- *Procedimientos*. Incluyen los algoritmos, operaciones o técnicas que constituyen parte de la enseñanza; entre otras las distintas técnicas de muestreo o de estimación de los parámetros.
- *Argumentos*. Son las justificaciones empleadas para mostrar la validez de una proposición o de la solución a un problema. Estas justificaciones incluyen las habituales en matemática, como la inducción, deducción o el análisis-síntesis.

Todos estos objetos están relacionados, entre sí, formando configuraciones, que serán epistémicas si son propias de una institución matemática o de enseñanza y cognitivas si son específicas del estudiante.

## **Metodología**

En nuestro trabajo tratamos de identificar las diferentes configuraciones epistémicas relacionadas con el muestreo en el currículo chileno y compararlas con las que se deducen de otras orientaciones curriculares. En primer lugar, se analizan las Bases Curriculares de enseñanza secundaria (MINEDUC, 2013) para la Educación Secundaria Obligatoria en Chile, por ser el documento curricular actualmente vigente y de cumplimiento obligatorio en toda la Nación. Estas directrices se comparan con las orientaciones españolas actualmente vigentes del Currículo Básico español, que también se implementan obligatoriamente en todo el territorio español (MECD, 2015). Además, comparamos con los estándares americanos NCTM (2000) y CCSSI (2010) y el proyecto GAISE (FRANKLIN et al., 2007), ya que estos documentos son utilizados como referentes internacionales para la educación estadística y han influido como tales en el desarrollo del contenido estadístico del currículo chileno. Todos estos documentos son igualmente tenidos en cuenta en los diferentes artículos analizados en nuestra recopilación de antecedentes.

Sobre dichos documentos curriculares se ha efectuado un análisis exhaustivo de los párrafos relacionados con el muestreo. Al mismo tiempo, se ha elaborado una categorización de los diferentes objetos matemáticos relacionados con el contenido de muestreo, utilizando las categorías propuestas en el EOS (GODINO, 2002; 2012). Este análisis se complementa con la descripción de las orientaciones metodológicas que se consideran en el currículo.

Nuestro análisis se reduce a las etapas de educación secundaria obligatoria, pues, como indica Watson (2004) la presencia de este tema en la escuela primaria es muy escasa y sólo descriptiva, lo que puede ser debido a la creencia en la dificultad del mismo para los estudiantes.

## **El muestreo en el currículo chileno**

La enseñanza secundaria en Chile, se compone de seis cursos de carácter obligatorio, los cuatro primeros (séptimo y octavo básico y primero y segundo medio), en los que enfocamos el análisis se corresponden a los cuatro cursos de Enseñanza Secundaria Obligatoria en España. En este ciclo educativo, los contenidos se organizan en cuatro ejes temáticos: Números, Álgebra y funciones, Geometría y Probabilidad y Estadística.

De acuerdo con las Bases Curriculares (MINEDUC, 2013), el eje de Probabilidad y Estadística pretende que los estudiantes realicen análisis, inferencias y obtengan información a partir de datos estadísticos. Se espera formar estudiantes críticos que puedan utilizar la información para validar sus opiniones y decisiones, determinando por ejemplo las interpretaciones erróneas de un gráfico y posibles manipulaciones intencionadas que se pueden hacer con los datos.

Además, se trata que los estudiantes diseñen experimentos de muestreo aleatorio para inferir sobre características de poblaciones; registren datos desagregados cada vez que tenga sentido; utilicen medidas de tendencia central, de posición y de dispersión para resolver problemas. El foco de este eje radica en la interpretación y visualización de datos estadísticos, en las medidas que permitan comparar características de poblaciones y en la realización de simulación y en la realización de experimentos aleatorios sencillos, para construir desde ellos la teoría y modelos probabilísticos.

En Chile, los Programas de Estudio; proponen para la Enseñanza Secundaria Obligatoria los objetivos de aprendizaje relacionados con el muestreo, presentados en el Cuadro 1, donde se han incluido las técnicas combinatorias, que en los textos chilenos se definen utilizando la idea de muestra con y sin reemplazamiento, idea resaltada por Heitele (1975).

Cuadro 1: Objetivos de Aprendizaje del Muestreo en la Educación Secundaria Obligatoria chilena (MINEDUC, 2013)

Curso	Objetivos de Aprendizaje
Séptimo Básico (12 – 13 años)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Estimar el porcentaje de algunas características de una población desconocida por medio del muestreo.</li> <li>- Representar datos obtenidos en una muestra mediante tablas de frecuencias absolutas y relativas, utilizando gráficos apropiados, de manera manual y/o con software educativo. (p. 108)</li> </ul>
Primero Medio (14 – 15 años)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Resolver diversos problemas que involucren técnicas combinatorias para el cálculo de probabilidades</li> <li>- Utilizar y establecer estrategias para determinar el número de muestras de un tamaño dado, que se pueden extraer desde una población de tamaño finito, con y sin reemplazo</li> <li>- Formular y verificar conjeturas, en casos particulares, acerca de la relación que existe entre la media aritmética de una población de tamaño finito y la media aritmética de las medias de muestras de igual tamaño extraídas de dicha población, con y sin reemplazo (p.20)</li> </ul>
Segundo Medio (15 – 16 años)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Emplear elementos del muestreo aleatorio simple para inferir sobre la media de una población.</li> <li>- Calcular medias muestrales.</li> <li>- Verificar que, a medida que el número de pruebas crece, la media muestral se aproxima a la media de la población. (p.124-125)</li> </ul>

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 2: Criterios de evaluación sobre muestreo en el currículo chileno

Curso	Criterios de Evaluación
Séptimo Básico	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Infieren sobre la composición de una población incógnita pequeña mediante un muestreo aleatorio, por medio de temas que interesen, como encuestas entre los estudiantes del 7° nivel;</li> <li>- Infieren porcentajes representativos de la muestra y luego comparan con la realidad</li> <li>- Identifican las muestras aleatorias y no aleatorias a base de ejemplos dados</li> <li>- Elaboran modelos para el muestreo aleatorio en la población del 7° nivel</li> <li>- Analizan las muestras obtenidas para ver coincidencias o diferencias</li> <li>- Confeccionan tablas de frecuencias absolutas y relativas de los datos obtenidos en las muestras. (p. 131 - 132)</li> </ul>
Primero Medio	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Determinan la cardinalidad de un espacio muestral utilizando el principio multiplicativo en diversos experimentos aleatorios.</li> <li>- Obtienen el número de muestras aleatorias posibles de un tamaño dado que se pueden extraer, sin reposición, desde una población de tamaño finito, aplicando el número combinatorio.</li> <li>- Seleccionan la técnica combinatoria apropiada para resolver problemas que involucren el cálculo de probabilidades, acorde a los requerimientos de cada problema.</li> <li>- Establecen estrategias para determinar el número de muestras de un tamaño dado, con o sin reemplazo, que se pueden extraer desde una población de tamaño finita.</li> <li>- Calculan el promedio de cada una de las muestras de igual tamaño extraídas desde una población.</li> <li>- Calculan el promedio de todos los promedios de muestras de igual tamaño extraídas desde una población.</li> <li>- Realizan diferentes comparaciones entre la media de una población con la media de cada uno de los promedios de muestras de igual tamaño extraídas desde una población.</li> <li>- Conjeturan acerca de la relación que existe entre la media de una población y el promedio de cada uno de los promedios de muestras de igual tamaño extraídas desde una población.</li> <li>- Verifican, utilizando herramientas tecnológicas, la conjetura formulada. (p. 70 - 72)</li> </ul>
Segundo Medio	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Producen muestras aleatorias de una población, utilizando diferentes métodos.</li> <li>- Emplean medios computacionales para hacer inferencias de una población.</li> <li>- Calculan la media muestral de pruebas independientes de experimentos probabilísticos.</li> <li>- Realizan experimentos con medias muestrales y establecen resultados</li> <li>- Extraen muestras de una población y calculan sus medias.</li> <li>- Analizan las medias obtenidas de las muestras, cuando el número de datos de las muestras aumenta. (p. 80 - 81)</li> </ul>

Fuente: Elaboración propia

Vemos que los objetivos incluyen, además de la idea de población y muestra, y la determinación del número de muestras en condiciones dadas, la de estimación y la relación entre los estadísticos (como la media muestral) y los parámetros (como la media poblacional), aunque usando un lenguaje menos formal. Se considera también el análisis informal de la ley de los grandes números (aplicada a la media). Se comienza en

séptimo básico por las actividades informales de estimación y la representación de datos de muestras, siguiendo los dos años siguientes por el estudio de las técnicas combinatorias, y el análisis de conjeturas sobre la media de una población y las medias muestrales, para pasar a la relación entre media muestral y poblacional en el segundo medio.

Además, se sugieren los criterios de evaluación por cursos contenidos en el Cuadro 2, donde se observa que dichos criterios son más detallados que los objetivos de aprendizaje. Igualmente dichos contenidos incluyen propiedades de las muestras, así como técnicas de cálculo, incluyendo la tecnología y se enfatiza la comparación e interpretación. También se incorporan actividades informales de inferencia.

El anterior análisis muestra que en estos cursos se trabaja con los tres tipos de distribuciones que intervienen en el proceso de muestreo (HARRADINE; BATANERO; ROSSMAN, 2011):

- *La distribución teórica de probabilidad* de la población se contempla desde séptimo básico, siempre que se hace referencia a la población, a su media o a su proporción.
- *La distribución del conjunto de datos en una muestra aleatoria simple.* Desde séptimo básico se representan y analizan datos de muestras aleatorias, calculando también sus estadísticos y representando su distribución.
- *La distribución en el muestreo de un estadístico* o distribución de probabilidad de todos los posibles valores que puede tomar el estadístico muestral en relación con las posibles muestras se trabaja en 1° y 2° medio especialmente en 2° medio, en relación con la producción de muestras aleatorias y el establecimiento de inferencias informales sobre la población.

Por un lado, las directrices curriculares abogan por la introducción gradual de los contenidos asociados a la Estadística. De hecho, la enseñanza se inicia en torno al aspecto más descriptivo de la misma donde el interés recae en la distribución de un conjunto de datos dados, a partir de los cuales calcular los parámetros de posición y dispersión.

Gradualmente se incorpora el concepto de muestreo y con ello la tarea de valorar la representatividad de la muestra. Igualmente se aprecia una aproximación informal hacia la inferencia estadística, donde el objetivo es que el estudiante sea capaz de valorar la

muestra apoyándose en el cálculo de diversos parámetros. Además, se incluyen las técnicas de selección de muestras con el objetivo de que el estudiante identifique la condición de aleatoriedad para la formación de las mismas. En definitiva, se pretende que el estudiante se familiarice con el quehacer estadístico a lo largo de la etapa.

## **Objetos matemáticos contemplados y comparación con otros currículos**

Como se ha indicado nos planteamos el objetivo mostrar detalladamente la complejidad del tema, para lo cual se ha procedido a identificar los diferentes tipos de objetos matemáticos descritos en el enfoque ontosemiótico (GODINO; 2002, 2012). Dicha identificación se realiza mediante un análisis de contenido (BERNETE; 2013), una metodología sistemática que utiliza criterios definidos de análisis para realizar inferencias sobre el contenido de un texto. Igualmente nos basamos en un proceso inductivo y cíclico que implica la producción inicial de las categorías consideradas en el análisis, que fueron depuradas mediante la comparación con los documentos analizados y refinamiento de dichas categorías.

Cuadro 3: Situaciones-problemas considerados en los currículos

Situaciones problema	Currículo chileno	Currículo español	NCTM	CCSSI	GAISE
Identificar las muestras aleatorias y no aleatorias	x	x	x	x	x
Determinar el número de muestras de tamaño dado, de una población de tamaño finito, con y sin reemplazo	x	x			x
Valorar la representatividad de una muestra		x	x		
Determinar la composición de una población a partir del muestreo	x		x	x	
Elaboran modelos para el muestreo aleatorio	x	x			x
Relacionar la media aritmética de una población finita y la media aritmética de las medias de muestras	x			x	
Relacionar la proporción de una población y la proporción de una muestra	x			x	
Estimar algunas características de una población desconocida por medio del muestreo.	x	x	x	x	x

Fuente: Elaboración propia.

Este análisis se ha realizado no solo sobre el currículo chileno, sino sobre las directrices curriculares españolas y americanas. En los Cuadros 3 a 7 se presenta la clasificación obtenida de dichos objetos matemáticos, mostrando su presencia o ausencia en el currículo chileno, la organización curricular de España (MECD, 2015), las orientaciones aportadas por el NCTM (2000) y CCSSI (2010) y el Proyecto GAISE (FRANKLIN et al., 2007). Una primera ojeada a estos cuadros nos permite comprobar la complejidad conjeturada sobre el tema, debido a la cantidad y variedad de objetos matemáticos considerados, que además se relacionan entre sí. Se observa igualmente que, tanto en Chile como en España, se tienen en cuenta prácticamente todos los objetos matemáticos asociados al muestreo en el informe GAISE (FRANKLIN et al., 2007), NCTM (2000) y CCSSI (2010), siendo más completos que lo recomendado en las anteriores directrices. Las situaciones problemas identificadas se dividen en las relacionadas con el muestreo en sí mismo (tipos y número de muestras) y las que tratan de la estimación de la media o la proporción o la puesta en relación de estos valores en la población y la muestra. La mayor variedad de situaciones-problema corresponde al currículo chileno; en especial en el español, NCTM e informe GAISE no se trata de la puesta en relación explícita de los parámetros y estadísticos; mientras en el chileno o NCTM no se resalta el estudio de la representatividad de las muestras, posiblemente porque dicha propiedad ha resultado ser intuitiva para la mayoría de los estudiantes (HARRADINE; BATANERO; ROSSMAN, 2011).

Cuadro 4: Lenguaje considerado en los currículos

Lenguaje		Currículo chileno	Currículo español	NCTM	CCSSI	GAISE
Términos, expresiones, fórmulas y expresiones algebraicas		x	x	x	x	x
Gráficos	Diagrama de Barra	x	x	x	x	x
	Diagrama de Sectores	x	x	x	x	x
	Histogramas	x	x	x	x	x
	Polígonos de frecuencia	x	x	x	x	x
	Diagrama de Caja	x	x	x	x	x
	Diagrama de árbol	x	x	x	x	x
Tablas de frecuencia, listados de datos		x	x	x	x	x

Fuente: Elaboración propia.

Como podemos apreciar en el Cuadro 4, los distintos tipos de lenguaje están presentes en todos los currículos, por lo que no hemos encontrado apenas diferencias en lo que se refiere al lenguaje. Cabe señalar que en las diferentes directrices se presenta una variedad de gráficos estadísticos a estudiar y se hace hincapié en el paso de una

representación a otra, es decir, pasar la información entregada en una tabla a un gráfico y viceversa.

Cuadro 5: Conceptos considerados en los currículos

Conceptos	Currículo chileno	Currículo español	NCTM	CCSSI	GAISE
Conceptos combinatorios: variaciones, permutaciones y combinaciones	x	x		x	
Experimento aleatorio	x	x	x	x	X
Espacio muestral (finito o infinito, sucesos equiprobables o no, probabilidad conocida o no)	x	x	x	x	x
Variable estadística, distribución	x	x	x		x
Muestra (con y sin reemplazamiento, Aleatoria, sistemática, estratificada, no probabilística, Ordenadas o no, Repitiendo elementos o no)	x	x	x	x	x
Tamaño de la muestra	x	x	x	x	
Población (Elemento, finita o no)	x	x	x	x	x
Probabilidad (Clásica, Frecuencial)	x	x	x	x	x
Media Muestral	x		x		x
Representatividad Muestral		x	x	x	x
Sesgo en muestreo		x	x		x
Variabilidad			x	x	x
Media, mediana, moda	x	x	x	x	x
Cuartiles	x	x			x

Fuente: Elaboración propia.

También se ha encontrado gran similitud en los conceptos, siendo la principal diferencia la inclusión en los currículos español y chileno de los conceptos combinatorios, a los que no se da tanta relevancia en los otros documentos, en relación con el tema de muestreo (aunque pueden aparecer asociados al estudio de la probabilidad).

Cuadro 6. Propiedades consideradas en los currículos

Propiedades	Currículo chileno	Currículo español	NCTM	CCSSI	GAISE
Principio Multiplicativo	x				
Población finita o infinita	x	x	x	x	x
Representatividad de una muestra en función del método de extracción		x	x	x	
Variabilidad de la muestra en función del tamaño			x	x	x
Aproximación de la frecuencia relativa a la probabilidad mediante la simulación o experimentación	x	x		x	x
Propiedades de las medidas de posición	x	x		x	

Fuente: Elaboración propia.

El currículo chileno no aborda en profundidad la idea de la variabilidad, según el tamaño muestral, en el sesgo en el muestreo. Tampoco se enfatiza en este nivel

educativo las relaciones entre media o proporción de la población y en la muestra. Este sería un tema a reforzar, ya que en algunas investigaciones previas sobre muestreo se ha mostrado la dificultad de los estudiantes para comprender la variabilidad en las diferentes muestras.

Respecto a las propiedades, se destaca el principio multiplicativo en el currículo chileno, que sin embargo es más deficiente en el estudio de la representatividad y variabilidad de la muestra.

Cuadro 7: Procedimientos considerados en los currículos

Objetos	Currículo chileno	Currículo español	NCTM	CCSSI	GAISE
Realizar encuestas	x	x	x	x	x
Representar la distribución de frecuencias mediante tablas o gráficas	x	x	x	x	x
Calcular las medidas de centralización	x	x	x	x	x
Diagrama de árbol (espacio muestral)	x	x			
Obtener todas las posibles muestras de una población finita	x	x		x	
Calcular el número de muestras diferentes de una población finita	x				
Estimar una proporción, media o frecuencia esperada en una muestra conocida la población	x	x	x		
Estimar una proporción, media o frecuencia esperada en una población, conocida la muestra	x	x	x		
Dada una muestra de resultados, decidir si el método de selección fue aleatorio	x		x	x	
Comparar datos de una muestra con una población	x	x	x	x	x
Decidir si un método de muestreo es adecuado o diferenciar tipos de muestreo	x	x	x	x	
Dados los resultados de una muestra y el tamaño de la población decidir la composición más probable de la población	x				
Calculan el promedio de todos los promedios de muestras de igual tamaño extraídas desde una población y analizan la relación	x	x			
Analizan las medias obtenidas de las muestras, cuando el número de datos de las muestras aumenta.	x				
Usar la distribución muestral para realizar inferencias informales		x	x	x	
Fases de un estudio estadístico		x	x		x
Utilizar herramientas tecnológicas	x	x	x	x	x
Verifican, utilizando herramientas tecnológicas, las conjeturas formulada.	x	x	x	x	x

Fuente: Elaboración propia.

En la parte procedimental, todos los currículos, además de contemplar la representación gráfica y cálculo de estadísticos, enfatizan la necesidad de realizar encuestas y consideran como contenido a enseñar las fases asociadas a un estudio estadístico, las cuales reflejan los pasos sugeridos en el ciclo de investigación definido por Wild y Pfannkuch (1999). Todos ellos insisten en el uso de herramientas tecnológicas y en la necesidad de que el estudiante no solamente calcule los diferentes parámetros, sino que sea capaz de relacionar el valor obtenido con los datos recogidos y, a su vez, proporcione conclusiones en relación a la característica de la población objeto de análisis.

El análisis del Cuadro 7 también muestra que el currículo chileno en esta etapa educativa introduce la estadística inferencial de manera informal; por ejemplo, incluye como procedimiento calcular el promedio de todos los promedios de la muestra de igual tamaño extraídas desde una población y analizar su relación. Por su parte, el currículo español sólo contempla procedimientos asociados a la estadística descriptiva. Por otro lado, el número de procedimientos diferentes es mucho mayor en MINEDUC (2013); por ejemplo, se recomienda que los estudiantes realicen experimentos de muestreo aleatorio para inferir sobre características de poblaciones; registren datos desagregados cada vez que tenga sentido; usen medidas de tendencia central, de posición y de dispersión en la resolución de problemas.

### **Implicaciones didácticas**

Como hemos discutido, la importancia del muestreo implica la necesidad de que los estudiantes logren una comprensión adecuada del mismo, evitando en lo posible el uso de heurísticas incorrectas y la aparición de sesgos asociados, como los descritos, por ejemplo, por Oliveira y Cordani (2016).

El análisis realizado del currículo chileno nos indica que tanto en este currículo, como en el español se propone una introducción gradual de los contenidos asociados al tema, en línea con lo propuesto por Batanero (2013) para lograr un correcto desarrollo inferencial en el estudiante. El estudio del muestreo se inicia en Séptimo Básico (12 años) en torno al aspecto más descriptivo del mismo, caracterizando las muestra aleatorias y no aleatorias y realizando actividades de representación de los datos de la muestra y cálculo de sus estadísticos resumen, aunque también se sugieren actividades informales de inferencia a partir de las muestra. A partir de Primero Medio (14 años) se

incluyen las técnicas combinatorias aplicadas al cálculo del número de muestras con ciertas condiciones. Además, se incluyen las técnicas de selección de muestras con el objetivo de que el alumno identifique la condición de aleatoriedad para la formación de las mismas. Igualmente se sugiere la puesta en relación entre las características de las muestras y poblaciones y la comprobación de conjeturas sobre dicha relación. Es en Segundo Medio (15 años) que se propone la experimentación sobre el muestreo y el estudio de las propiedades de las distribuciones muestrales empíricas así obtenidas. Con todo ello, la propuesta curricular se dirige a la educación del razonamiento inferencial intuitivo del estudiante y lo prepara para una comprensión más formal del tema en los últimos años de enseñanza media.

El análisis comparativo del currículo chileno con otros currículos muestra algunas diferencias que merece la pena tener en cuenta para una mejor planificación del diseño curricular futuro y de la acción docente. Destacamos por otro lado que el currículo chileno no contempla conceptos como el sesgo y la variabilidad muestral. Aunque las ideas de representatividad y variabilidad muestral pudieran estar presente implícitamente en la sugerencia de realizar en Séptimo Básico experimentos con medias muestrales y establecer resultados, no las hemos encontrado explicitadas en el currículo chileno de esta etapa educativa, mientras que si se contemplan en la mayoría de los otros currículos. Sería necesario que el profesor en el aula explicitara y discutiera estas ideas con los estudiantes para evitar la aparición de los sesgos descritos por Oliveira y Cordani (2016).

El currículo chileno es más rico en el aspecto procedimental porque considera un número mayor de tareas que den lugar a la necesidad del muestreo. Esta es una oportunidad que puede usar el profesor para mejorar el interés de los estudiantes hacia el estudio de la estadística.

**Agradecimientos:** Proyectos EDU2016-74848-P (FEDER, AEI), FCT-16-10974 (FECYT), Beca CONICYT PFCHA 72160521 y Grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

## Referencias

BATANERO, C. Del análisis de datos a la inferencia: Reflexiones sobre la formación del razonamiento estadístico. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, v. 8, n. 11, p. 277-291, 2013.

BERNETE, F. Análisis de contenido. *Conocer lo social: estrategias y técnicas de construcción y análisis de datos*. Madrid: Universidad Complutense, 2013.

BURRILL, G.; BIEHLER, R. Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education – A joint ICMI/IASE study*. Dordrecht: Springer, p. 57-69, 2011.

CASTRO-SOTOS, A. E.; VANHOOF, S.; NOORTGATE, W.; ONGHENA, P. Students' misconceptions of statistical inference: A review of the empirical evidence from research on statistics education. *Educational Research Review*, v.2, n.2, p. 98-113, 2007.

CCSSI. Common Core State Standards for Mathematics. Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers, 2010.

FONT, V.; GODINO, J. D.; GALLARDO, J. The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, v. 82, n.1, p. 97–124, 2013.

FRANKLIN, C.; KADER, G.; NEWBORN, D.; MORENO, J.; PECK, R.; PERRY, M.; SCHEAFFER, R. Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) Report: a pre-k–12 curriculum framework, 2007.

GODINO, J. D. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 22, n. 2 y 3, p. 237-284, 2002.

GODINO, J. D. Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI*. Jaén: SEIEM, p. 49 – 68, 2012.

GODINO, J. D. BATANERO, C. Y FONT, V. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, v. 39, n. 1-2, p. 127-135, 2007.

HARRADINE, A.; BATANERO, C.; ROSSMAN, A. Students' and teachers' knowledge of sampling and inference. En BATANERO, C.; BURRILL, G.; READING, C. (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A Joint ICMI/IASE Study*. New York: Springer. 2011

HEITEL, D. An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, v. 6, n. 2, p. 187-205, 1975.

KADIJEVICH, D.; KOKOL-VOLJC, V.; LAVICZA, Z. Towards a suitable designed instruction on statistical reasoning: Understanding sampling distribution with technology. En BATANERO, C.; BURRILL, G.; READING, C.; ROSSMAN, A. (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 18 Conference and IASE 2008 Round Table Conference*. Monterrey: International Statistical Institute. 2008. Recuperado em 20 de Mayo de 2016 de: [https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/rt08/T4P9\\_Kadijevich.pdf](https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/rt08/T4P9_Kadijevich.pdf).

MECD. *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Madrid: Autor, 2015.

MINEDUC. *Matemática Educación Media. Bases Curriculares*. Santiago de Chile: Unidad de Currículum y Evaluación, 2013.

NCTM. *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Autor, 2000.

OLIVEIRA, C. R.; CORDANI, L. K. Julgando sob incerteza: heurísticas e vieses e o ensino de probabilidade e estatística-Judging under uncertainty: heuristics and biases and teaching of probability and statistics. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 18, n. 3, p. 1265-1289. 2016

RUBIN, A.; BRUCE, B.; TENNEY, Y. Learning about sampling: trouble at the core of statistics, En D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics*. Dunedin, New Zealand: International Statistical Institute. 1991. Recuperado em 20 de Mayo de 2016 de [iase-web.org/documents/papers/icots3/BOOK1/A9-4.pdf](http://iase-web.org/documents/papers/icots3/BOOK1/A9-4.pdf).

WATSON, J. Developing reasonig about samples. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*. Dordrechy: Kluwer, 2004.

WILD, C.; PFANNKUCH, M. Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, v. 67, n. 3, p. 221-248, 1999.

ZIEFFLER, A.; GARFIELD, J.; DELMAS, R.; READING, C. A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal*, v. 7, n. 2, p. 40-58, 2008.

Texto recebido: 22/05/2017

Texto aprovado: 01/11/2017