

A Geometria Hiperbólica nos currículos escolares e universitários

Hyperbolic Geometry in school and university curricula

ELIAS SANTIAGO DE ASSIS¹

Resumo

A presente pesquisa, de natureza qualitativa, tem como objetivo verificar de que forma os currículos dos cursos de licenciatura em matemática no Brasil contemplam o ensino da geometria hiperbólica. Além disso, busca-se fazer um paralelo entre esses currículos e as propostas curriculares do ensino básico no que diz respeito a abordagem dessa geometria não euclidiana. Neste sentido, foram analisadas as ementas curriculares de trinta e cinco cursos e as diretrizes curriculares dos estados em que tais cursos estão alocados. Os resultados obtidos revelam que a geometria hiperbólica ainda não detém o mesmo espaço ocupado pela geometria euclidiana tanto no ensino superior quanto na educação básica. A despeito da possibilidade de se abordar diversos conceitos das geometrias não euclidianas por meio de softwares de geometria dinâmica não foram encontradas referências ao uso dessa ferramenta nos componentes curriculares analisados.

Palavras-chave: Geometria hiperbólica; Currículo; Formação de professores.

Abstract

The present research, of qualitative nature, aims to identify how the curricula of mathematics undergraduate courses in Brazil contemplate the teaching of hyperbolic geometry. In addition, we try to make a parallel between these curricula and the curricular proposals of basic education about the teaching of the non-Euclidean geometries. In this sense, they were analyzed the curricular proposals of thirty-five courses and as the curricular guidelines of the states in which such courses are allocated. The results show that hyperbolic geometry does not yet have the same space occupied by Euclidean geometry in both higher education and basic education. Despite the possibility of the utilization of dynamic geometry softwares in the teaching of non-Euclidean geometries, no references were found to the use of this tool in the analyzed curricula.

Keywords: Hyperbolic Geometry; Curriculum; Teachers training.

¹ Doutor em Ciências da Educação (Universidade do Minho); Professor da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB); e-mail: elyassantiago@gmail.com

Introdução

O presente trabalho tem como objetivo verificar de que forma os currículos dos cursos de licenciatura em matemática no Brasil contemplam o ensino da geometria hiperbólica. Nesta perspectiva, foram analisados a matriz curricular ou o projeto político pedagógico de trinta e cinco cursos de licenciatura em matemática presentes em universidades brasileiras que possuem programas de pós-graduação *stricto sensu* em matemática pura ou aplicada (em nível acadêmico ou profissional). A opção por estes cursos de licenciatura deve-se ao entendimento que os mesmos constituem ambientes promissores para a abordagem das geometrias não euclidianas, em particular da geometria hiperbólica, tendo em vista a possibilidade de prolongamento de tais estudos em cursos de mestrado ou doutorado em matemática. A presença (ou não), nesses currículos, de outros tipos de geometrias não euclidianas (do táxi, esférica, fractal, topológica) não diz respeito ao escopo desta pesquisa.

A análise dos currículos dos cursos de licenciatura em matemática, com o olhar sobre a formação em geometria hiperbólica, se justifica por diversos motivos. A matriz curricular dos cursos e as ementas dos componentes curriculares refletem o entendimento dos colegiados ou departamentos de matemática das instituições de ensino superior acerca dos elementos necessários à formação dos discentes. Tais currículos expressam os valores defendidos pelos sujeitos que os constituíram e revelam os saberes que devem ser explorados e aqueles que devem ser suprimidos. Se determinado professor de matemática não teve acesso aos conceitos da geometria hiperbólica, é plausível considerar que os seus alunos conceberão a geometria de Euclides como a única geometria do universo.

Com a constatação da consistência da geometria hiperbólica, no século XIX, a discussão sobre a existência de uma única geometria do universo não tem mais sentido nos estudos da ciência (EVES, 2008). Conforme pontuava o matemático russo Lobachewsky, não há uma geometria univocamente verdadeira, o que há são geometrias convenientes (BOYER, 1996). Deve-se, portanto, levar em consideração a possibilidade de oferecer aos futuros professores de matemática alguma formação acerca de outros tipos de geometria além da euclidiana.

O surgimento da geometria hiperbólica

Se comparada à geometria euclidiana, a geometria hiperbólica é relativamente nova. Pelo menos dois milênios separam a publicação da obra *Os Elementos* de Euclides das descobertas dos matemáticos Janos Bolyai e Nikolai Lobachewsky (SOUZA, 1993). Ao longo desse período assistiu-se ao absolutismo das ideias euclidianas entendidas como a única leitura possível do universo, do ponto de vista geométrico (EVES, 2008; BOYER, 1996). Entretanto, apesar de *Os Elementos* ter se tornado uma obra consagrada, não era consenso entre os matemáticos o entendimento da independência do quinto postulado de Euclides com relação aos quatro primeiros postulados. Matemáticos como Ptolomeu, Proclus, Nasiredin, Wallis, Saccheri, Lambert, Legendre, Gauss, Bolyai e Lobachewsky se debruçaram sobre a tentativa de mostrar que o quinto postulado era um teorema provado a partir dos postulados anteriores (BARBOSA, 2008).

De acordo com uma versão equivalente ao quinto postulado de Euclides, atribuída ao matemático Playfair, “por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada” (BONGIOVANNI; JANN, 2010, p. 39). O matemático Janos Bolyai, ao substituir este postulado por uma de suas negações, isto é, ao assumir a existência de uma reta e de um ponto fora dela pelo qual passam pelo menos duas paralelas, descobriu “um novo e estranho universo” (BARBOSA, 2008, p. 42), conforme ele mesmo revelou em carta direcionada ao seu pai, o também matemático Wolfgang Bolyai. Resultados semelhantes foram encontrados, à época, pelo matemático russo Nikolai Ivanovich Lobachewsky. Surge a geometria hiperbólica, um tipo particular das chamadas geometrias não euclidianas.

O conjunto de resultados comuns a geometria euclidiana e a geometria hiperbólica é dito pertencente a chamada geometria absoluta ou neutra. As consequências do quinto postulado de Euclides demarcam as distinções entre os dois modelos de geometria. Ao contrário do que ocorre na geometria de Euclides, na geometria hiperbólica a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é inferior a 180° . Além disso, nesta geometria não euclidiana, não há retângulos, o teorema de Pitágoras não é satisfeito, retas paralelas não são equidistantes e dois triângulos são semelhantes se, e somente se, são congruentes (BARBOSA, 2008).

A estranheza provocada pelo conjunto de resultados elencados no parágrafo anterior pôs em xeque a consistência da geometria hiperbólica. Entretanto, na segunda metade do

século XIX, o matemático francês Henri Poincaré apresentou um modelo de geometria hiperbólica, conhecido como o *disco de Poincaré*, encerrando o impasse quanto à validade dessa geometria. Neste modelo, pontuam Ribeiro e Gravina (2013), o plano é a região limitada por uma circunferência. A interseção não vazia de quaisquer dois discos constitui as retas do modelo. De acordo com Andrade (2008), à luz dos postulados da geometria euclidiana são verificados, no disco de Poincaré, todos os postulados da geometria hiperbólica. Desta forma, se ainda houver dúvidas sobre a validade da geometria hiperbólica, “ela também recairá sobre a consistência da geometria euclidiana” (ANDRADE, 2008, p. 21). Além do disco de Poincaré, existem outros modelos de geometria hiperbólica: semi-plano de Poincaré, modelo de Beltrami, modelo de Klein (TERDIMAN, 1989).

O ensino da geometria hiperbólica

A consistência da geometria hiperbólica torna plausível o debate acerca da sua inserção no currículo dos cursos de formação de professores de matemática. De acordo com Brito (1995), é importante que os professores tenham conhecimento acerca dos fatos históricos e filosóficos que culminaram no aparecimento das geometrias não euclidianas, em particular da geometria hiperbólica. Além disso, destacam Eves (2008) e Ribeiro (2012), estudar os modelos não euclidianos de geometria é necessário para a relativização do conceito de verdade absoluta. De acordo com Reis (2006, p. 9), tais estudos auxiliam na “percepção, compreensão, descrição e interação [do sujeito] com o espaço em que se vive”.

A despeito das justificativas para a inserção da geometria hiperbólica nos currículos dos cursos de formação de professores, algumas pesquisas sinalizam que tal inclusão tem ocorrido de forma tímida. Ao investigar oito cursos de licenciatura em matemática do Rio Grande do Sul, Leivas (2009) constatou que apenas dois deles tratavam da geometria hiperbólica e o faziam por meio de projetos extracurriculares. Este mesmo autor analisou o conhecimento em geometria hiperbólica de noventa alunos de um curso de licenciatura em matemática de seis universidades do mesmo estado. Leivas (2013) constatou que a maior parte dos participantes não detinha conhecimentos mínimos de geometria hiperbólica.

De acordo com Ribeiro (2012), não há nos cursos de licenciatura em matemática uma preocupação com o ensino de geometria hiperbólica porque este tipo de geometria não

aparece no currículo da educação básica. Da mesma forma, pontua este autor, este tipo de geometria não euclidiana não está presente no ensino básico em virtude da sua ausência no ensino superior. Com relação a geometria, as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) para os cursos de licenciatura em matemática fazem menção à necessidade de se contemplar, nestes cursos, “conteúdos matemáticos presentes na educação básica” (BRASIL, 2001, p.6). Apesar de não haver referência explícita à geometria euclidiana nas DCN, a tradição em torno do seu ensino induz a conclusão de que é este o tipo de geometria referenciado no texto.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o ensino de matemática fazem referência à quebra do paradigma de absolutismo da geometria euclidiana e pontuam a existência de “uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem remodelar a realidade do espaço físico” (BRASIL, 1998, p. 24). Hansen (1998) também defende o ensino da geometria hiperbólica na educação básica desde que seja desprovido do rigor axiomático.

Na última década se iniciou o processo de implantação do novo currículo de matemática das escolas do Estado do Paraná, o qual prevê a iniciação às geometrias não euclidianas no âmbito da educação básica. A partir daí ocorreu um crescimento no número de pesquisas produzidas neste estado acerca da aprendizagem da geometria hiperbólica, um tipo de geometria não euclidiana. (CALDATTO; PAVANELLO, 2014; LOVIS; FRANCO, 2015; RIBEIRO; SANTOS; FERREIRA, 2011; SOUZA; LUCCAS, 2015). Não obstante o que vem ocorrendo no Paraná, há lacunas de investigações dessa natureza (tanto no âmbito do ensino básico quanto do ensino superior) em grande parte território nacional.

A despeito das mudanças curriculares realizadas no Estado do Paraná, Caldatto e Pavanello (2014) assinalam a inexistência de uma formação continuada para professores voltada para o tratamento das geometrias não euclidianas em sala de aula. Em uma pesquisa que envolveu um conjunto de vinte e sete professores da educação básica do mesmo estado, Lovis e Franco (2015) constataram a discrepância entre a formação desses sujeitos no que concerne às geometrias não euclidianas. Seis professores não tinham noção alguma acerca desses modelos de geometrias. Treze professores tinham noções mínimas a respeito das geometrias não euclidianas como, por exemplo, o entendimento de que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo difere de 180° . Oito professores tinham conhecimentos mais amplos a respeito. Dos participantes

somente três viram noções de geometrias não euclidianas nos cursos de graduação em matemática.

Lovis, Franco e Barros (2014) buscaram identificar as dificuldades encontradas por um grupo de quarenta e um professores da educação básica, ainda no estado do Paraná, no que tange os conteúdos da geometria hiperbólica. De acordo com estes autores, os principais entraves encontrados pelos participantes foram: a falta de conhecimento acerca de determinados resultados da própria geometria euclidiana e a dificuldade de lidar com as representações dos objetos geométricos no plano hiperbólico.

De acordo com Camargo (2012), Murari (2011), Ribeiro (2012) e Souza e Luccas (2015), as dificuldades de aprendizagem da geometria hiperbólica podem ser minimizadas por meio da utilização de softwares educacionais. Segundo Murari (2011, p. 190), os softwares ajudam os aprendizes a “elaborar e testar as conjecturas, além do que se pode dar um dinamismo às construções com os recursos do arrastar, movimentar e animar”. Dentre os softwares de geometria dinâmica que podem ser utilizados para esse fim, Murari (2011) destaca: Geometricks, Cabri-Géomètre II, Cinderella, iGeom, GeoGebra, Cabri-Géomètre II, Kali e Tess. Há também o software NonEuclid, assinalam Souza e Luccas (2015).

Ribeiro, Santos e Ferreira (2011) constataram que um grupo de dezesseis estudantes do curso de licenciatura em matemática de uma universidade estadual do Paraná conseguiu, por meio de construções no *Geogebra*, diferenciar a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo em ambas as geometrias, euclidiana e hiperbólica. De acordo com Ferreira (2011, p. 8), “é possível ensinar geometria hiperbólica usando um software de geometria dinâmica, como o Geogebra, desde que se respeitem os conteúdos das séries escolares dos aprendizes e se tome cuidado na construção do conceito de métrica”.

Através de uma sequência de atividades didáticas realizadas no software *NonEuclid*, Souza e Luccas (2015) buscaram analisar a aprendizagem de geometria hiperbólica de cinco estudantes de uma universidade pública também do Paraná. Três estudantes conseguiram formular adequadamente o quinto postulado na geometria hiperbólica. No que diz respeito à soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, quatro dos cinco estudantes fizeram inferências corretas.

Rocha (2008) recorreu ao software *Cinderella* para investigar a aquisição de conhecimentos de geometria hiperbólica em um grupo de onze alunos de um curso de mestrado profissional em matemática de uma universidade de São Paulo. O autor

constatou que o software ajudou os participantes a compreenderem o comportamento de retas paralelas no disco de Poincaré e permitiu-lhes interiorizar os conceitos da geometria hiperbólica.

Tendo em vista a formulação de uma proposta de ensino de geometria hiperbólica através do *Cabri-Géomètre*, Cabariti (2004) analisou algumas construções geométricas desenvolvidas no software por um grupo de seis professores da rede pública do estado de São Paulo. As construções foram feitas no disco de Poincaré e consistiram na comparação de resultados de ambas as geometrias, euclidiana e hiperbólica. A autora percebeu que os participantes tiveram dificuldades em identificar os resultados provenientes da geometria absoluta. A métrica hiperbólica também lhes provocou algumas inquietações. Após construir a mediatriz de um segmento, os participantes verificaram a equidistância de alguns de seus pontos com relação às extremidades do segmento. Tal verificação ocorreu porque as representações imagéticas parecem ferir a equidistância em virtude da métrica utilizada.

Metodologia da pesquisa

A despeito de quantificar a presença da geometria hiperbólica em alguns cursos de licenciatura em matemática de universidade brasileiras, esta pesquisa destina-se a dar significados a esses números na perspectiva de identificar e compreender os valores atribuídos pelos currículos a este tipo de geometria. Não há a intenção de generalizar resultados, mas sim de compreendê-los o que insere esta pesquisa no paradigma qualitativo de investigação (COUTINHO, 2013).

Foram analisados os Projetos Políticos Pedagógicos (PPP) de trinta e cinco cursos de licenciatura em matemática. Em cada PPP, investigou-se a presença da geometria hiperbólica nas ementas dos componentes curriculares. Além disso, foram analisadas as Propostas Curriculares (PC) dos estados em que tais cursos são oferecidos. Os objetos de investigação foram, portanto, os seguintes documentos: os PPP e as PC.

O PPP de um curso é um documento que apresenta as competências e habilidades que deverão ser desenvolvidas pelos estudantes. Neste documento encontram-se as descrições de cada componente curricular quanto a sua carga horária, ementa, objetivos, metodologia, avaliação e referências bibliográficas. De acordo com Veiga (2000, p. 183), através do PPP são apresentados “os focos decisórios do currículo”, revelando que

tipo de perfil profissional se pretende formar. O currículo é carregado de intencionalidade não havendo, portanto, neutralidade em sua construção.

As PC ou Diretrizes Curriculares Estaduais são orientações apresentadas por cada estado quanto aos conteúdos, metodologias e avaliações empregados nos componentes curriculares da educação básica. Procuram dar certa uniformidade aos processos educativos sem desconsiderar as peculiaridades regionais dentro de um mesmo estado. De acordo com Galian (2014, p. 663), as PC muitas vezes “resultam de processos de recontextualização das escolhas assumidas centralmente em relação ao currículo a ser implementado nas escolas brasileiras”. Por “escolhas assumidas centralmente” entende-se as Leis de Diretrizes e Bases da Educação (LDB) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

Quanto aos procedimentos adotados, tem-se aqui uma pesquisa documental. Segundo Piana (2009, p. 122), este tipo de pesquisa é “realizada a partir de documentos, contemporâneos ou retrospectivos, considerados cientificamente autênticos (não fraudados)”. De acordo com Bravo (1991), documentos são produções humanas que revelam as concepções e interesses desses sujeitos acerca dos mais variados temas. No âmbito da pesquisa documental, tais produções são selecionadas e analisadas tendo em vista as questões da pesquisa (KRIPKA; SCHELLER; BONOTTO, 2015). A seleção dos documentos exige do investigador “uma capacidade reflexiva e criativa não só na forma como compreende o problema, mas nas relações que consegue estabelecer entre este e seu contexto, no modo como elabora suas conclusões e como as comunica” (SILVA; DAMACENO; MARTINS; SOBRAL; FARIAS, 2009, p. 4556).

A opção pela pesquisa documental se justifica por alguns fatores. Trata-se de “uma fonte rica de dados” (GIL, 2002, p. 62) e, além disso, “não implica altos custos, não exige contato com os sujeitos da pesquisa e possibilita uma leitura aprofundada das fontes” (PIANA, 2009, p. 122). O êxito neste tipo de pesquisa está relacionado à forma como o pesquisador seleciona e interpreta as informações tendo em vista os objetivos da investigação (KRIPKA; SCHELLER; BONOTTO, 2015).

Nesta investigação foram escolhidos os cursos de licenciatura em matemática de universidades que possuem programas de pós-graduação (*stricto sensu*) em matemática pura ou aplicada, em nível acadêmico ou profissional. A relação com os nomes das instituições de ensino superior (IES) foi obtida no site da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, Capes, a partir do endereço <http://www.capes.gov.br/cursos-recomendados> (última visualização em 20 de junho de

2017) e pode ser encontrada no anexo deste trabalho. A escolha destes cursos se deve a presença das geometrias não euclidianas, como a geometria Riemanniana (CARMO, 2005), em programas de mestrado ou doutorado em matemática, o que, teoricamente, potencializa as chances de se contemplar a geometria hiperbólica nos cursos de graduação. Isto não significa que os cursos de licenciatura em matemática não observados nesta investigação não possam conter as geometrias não euclidianas (e, em particular, a geometria hiperbólica) em suas matrizes curriculares.

Resultados

Em todos os trinta e cinco cursos analisados há algum componente curricular voltado para a apresentação dos conteúdos de geometria euclidiana plana numa perspectiva axiomática. Há ainda, em muitos casos, componentes curriculares que abordam o ensino de geometria (euclidiana) no âmbito da educação básica.

A geometria hiperbólica aparece, de alguma forma, no currículo de vinte e três cursos. Este número corresponde a aproximadamente 65,7% do total analisado. Em alguns casos, este tipo de geometria não euclidiana é contemplado em componentes curriculares obrigatórios, em outros casos percebe-se a sua incidência em componentes optativos. Qualquer que seja o caso, não há referências ao uso de softwares de geometria dinâmica no processo de ensino e aprendizagem.

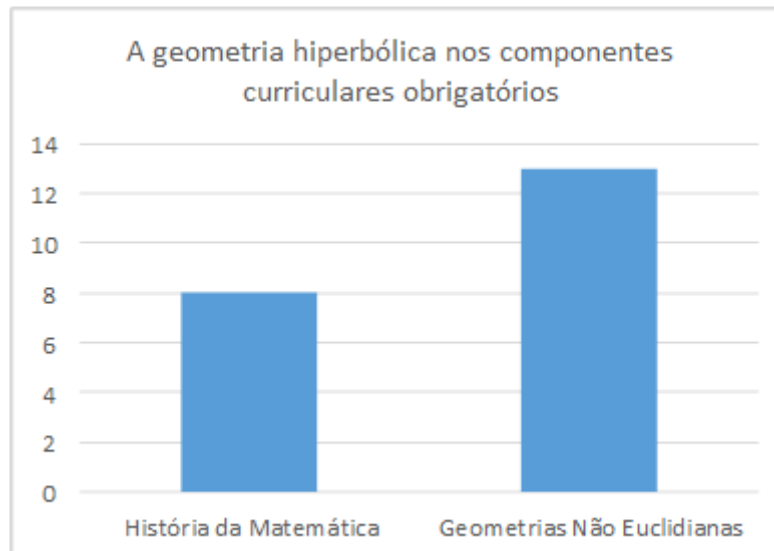
Ao contrário da geometria euclidiana plana que aparece nos primeiros semestres dos cursos de licenciatura em matemática em 88,25% dos casos observados, a geometria hiperbólica, quando aparece em componentes curriculares obrigatórios, raramente é contemplada nos anos iniciais.

Dos vinte e três cursos que oferecem algum tipo de estudo em geometria hiperbólica, dezessete o fazem por meio de componentes obrigatórios. Desta forma, se na análise aqui estabelecida fossem excluídos os componentes curriculares optativos, a geometria hiperbólica passaria a integrar um pouco menos de 50% dos cursos investigados, em vez de 65,7% como já citado.

A geometria hiperbólica aparece no currículo obrigatório dos cursos de duas formas distintas, a saber: através de componentes que tratam de questões históricas ou filosóficas da matemática; ou por meio de componentes que tratam de conceitos (propriamente ditos) da geometria dentro de um contexto não euclidiano. O Gráfico 1

apresenta a ocorrência dos conteúdos de geometria hiperbólica nesses dois tipos de componentes curriculares, denominados aqui (por simplicidade) como *história da matemática* e *geometrias não euclidianas*, nessa ordem.

Gráfico 1 - Componentes curriculares obrigatórios que abordam elementos da geometria hiperbólica



Como se pode perceber no Gráfico 1, a maior incidência da abordagem de conteúdos de geometria hiperbólica ocorre em componentes que tratam dos diversos tipos de geometrias não euclidianas. Nesse caso, os alunos costumam ter acesso a noções básicas dessa geometria. Nem sempre ocorre uma abordagem aprofundada tendo em vista que a ementa destes componentes curriculares também prevê o estudo de outras geometrias não euclidianas como a esférica e a projetiva.

Na ementa do componente curricular *história da matemática*, em oito cursos (Cf. Gráfico 1), foram encontradas referências ao surgimento da geometria hiperbólica. Tal número é passível de ampliação tendo em vista que em sete cursos a ementa do mesmo componente curricular não é pré-determinada. Nesses casos, a flexibilização na composição do componente atribui ao professor uma grande autonomia na escolha dos conteúdos a abordar.

O número de componentes curriculares apresentado no Gráfico 1, a saber, vinte e um, revela que em alguns dos dezessete cursos de tratam da geometria hiperbólica em seu currículo obrigatório, tal abordagem nem sempre ocorre em um único componente curricular.

No que diz respeito aos componentes curriculares optativos, a geometria hiperbólica não aparece por meio de componentes dedicados às discussões de natureza histórica e filosófica. Em sete cursos, esta geometria não euclidiana divide espaço com o tratamento de outras geometrias e, em um único curso, encontra-se um componente optativo voltado quase que exclusivamente para a geometria hiperbólica.

Não há incongruência entre a incidência de discussões acerca da geometria hiperbólica em vinte e um componentes curriculares obrigatórios e em oito optativos e o número total de vinte e três cursos que abordam essa geometria. Tal aparente divergência ocorre porque em alguns desses cursos há mais de um componente curricular que contempla essa geometria não euclidiana.

A presença da geometria hiperbólica nos componentes curriculares dos cursos está sintetizada na Tabela 1. Nesta tabela, tais componentes curriculares, obrigatórios e optativos, estão divididos em três grupos: geometrias não euclidianas (onde são abordados os diversos tipos de geometria, inclusive a hiperbólica); geometria hiperbólica (onde as discussões giram quase que exclusivamente em torno deste tipo de geometria); história da matemática (onde a geometria hiperbólica é apresentada por meio de elementos históricos ou filosóficos).

Tabela 1 - A geometria hiperbólica nos componentes obrigatórios e optativos

Componentes curriculares	Geometrias não euclidianas	Geometria hiperbólica	História da matemática
Obrigatórios	13	0	8
Optativos	7	1	0

Como se pode observar na Tabela 1, na maior parte dos casos a geometria hiperbólica é apresentada em componentes obrigatórios, sobretudo em discussões que envolvem os diversos tipos de geometrias não euclidianas. Somente em um único componente, desta vez optativo, verifica-se a ocorrência de discussões centradas exclusivamente na geometria hiperbólica.

No que diz respeito a educação básica, há na proposta curricular vigente no estado do Ceará uma referência a existência de outros modelos de geometrias diferentes do euclidiano. Menciona-se a existência de “uma discussão referente à geometria e suas partes, onde se destacariam a Euclidiana Plana e a Não-Euclidiana, a Espacial, a Métrica e a Descritiva” (CEARÁ, 2008, p. 18). Não há, porém, orientações ou determinações

acerca do ensino de geometrias não euclidianas. Dentre os cursos de licenciatura investigados, um, e somente um, encontra-se em uma universidade daquele estado. Neste curso, cujo currículo foi atualizado no ano de 2005, o estudo das geometrias não euclidianas, e em particular da geometria hiperbólica, aparece em um componente curricular optativo.

No estado do Paraná existe uma recomendação mais explícita acerca do ensino da geometria hiperbólica. No tratamento deste tipo de geometria, as diretrizes curriculares do estado divulgadas em 2008 propõem a exploração dos conceitos de pseudo-esfera, pontos ideais, triângulo hiperbólico e a soma das medidas dos seus ângulos internos (PARANÁ, 2008). Dos cursos de licenciatura pesquisados, três são de universidade do estado do Paraná. Nas matrizes curriculares destes três cursos são encontrados componentes curriculares obrigatórios que tratam de geometrias não euclidianas. O estudo desse tipo de geometria tem o intuito de “possibilitar ao aluno o entendimento da geometria como um estudo do espaço a partir de sua estrutura métrica” (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ, 2008, p. 9). Em das universidades paranaenses investigada o currículo foi atualizado no ano de 2007 e em outra no ano de 2008. A matriz curricular da terceira universidade foi acessada por meio do site do curso. Nele não havia dados acerca da data de atualização do projeto político pedagógico.

As diretrizes curriculares do estado de São Paulo não fazem menção direta à geometria hiperbólica, mas reconhecem a importância de se estudar os diversos tipos de geometrias. No documento, publicado pela Secretaria do Estado em 2011, recomenda-se “uma reflexão sobre as diversas formas de conceber o espaço” para “inspirar [a apresentação de] algumas noções de geometrias não euclidianas” (SÃO PAULO, 2011, p. 40).

Oito cursos investigados pertencem a universidades paulistas. Metade desses cursos contempla a geometria hiperbólica em suas matrizes curriculares as quais foram atualizadas nos anos de 2006, 2010, 2012 e 2015. A presença dessa geometria nesses currículos visa proporcionar aos alunos o “conhecimento sobre a existência de outras geometrias, distintas da geometria euclidiana, suas origens históricas e o motivo pelo qual são estudadas” (UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA, 2015, p. 207). Dessa forma, deve-se levar os discentes a perceberem as “modificações sobre a própria concepção da natureza da matemática” (UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC, 2010, p. 18). Por meio desses estudos, pretende-se ainda ressaltar “as diferentes formas de

utilização e os campos de aplicação destas geometrias” (UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA, 2015, p. 207). Os cursos que, em seu núcleo curricular obrigatório, não contemplam o ensino de geometria hiperbólica tiveram os seus currículos atualizados em 2007, 2014 e 2015 (dois cursos).

Não foram encontrados registros acerca do ensino de geometrias não euclidianas, na educação básica, nos seguintes estados: Alagoas, Amazonas, Bahia, Pará, Espírito Santo, Goiás, Maranhão, Minas Gerais, Pernambuco, Piauí, Rio de Janeiro, Rio Grande do Sul, Santa Catarina e Sergipe. Em sete desses estados há universidades que contemplam a geometria hiperbólica nas matrizes curriculares obrigatórias dos cursos de licenciatura em matemática.

Discussão

A presença da geometria hiperbólica na matriz curricular obrigatória de aproximadamente metade dos cursos analisados em detrimento da presença da geometria euclidiana em todos os cursos revela a supremacia da segunda com relação à primeira. Se, por um lado, não há uma única geometria verdadeira (EVES, 2008), por outro, a tradição histórica que laureou a geometria de Euclides como o modelo geométrico ideal ainda mantém a sua influência sobre os currículos acadêmicos. No que diz respeito à educação básica, a situação não é diferente. Somente em três dos dezessete estados que contêm universidades pesquisadas, há algum tipo de menção às geometrias não euclidianas nas diretrizes curriculares. A consistência da geometria hiperbólica assegurada no século XIX (ANDRADE, 2008) não foi suficiente para que a mesma pudesse adentrar os espaços escolares, ainda que minimamente.

É possível que se justifique a ausência da geometria hiperbólica no currículo dos cursos de licenciatura em matemática pelo seu caráter mais abstrato e menos intuitivo. Contudo, de acordo com Projeto Político Pedagógico (PPP) de alguns cursos, estudar este tipo de geometria é claramente recomendável. Com efeito, segundo os PPP, em consonância com Brito (1995), os futuros professores de matemática precisam conhecer os desdobramentos históricos em torno do Axioma das Paralelas que culminaram na descoberta da geometria hiperbólica. É uma forma de perceber que a matemática é uma ciência construída por homens que através de erros e acertos foram dando importantes contribuições para o seu desenvolvimento. Ademais, ao abalar o absolutismo do modelo euclidiano, vigente à época, o surgimento da geometria hiperbólica foi importante para

se refazer a concepção de verdade absoluta na matemática (EVES, 2004; RIBEIRO, 2012). Elementos dessa natureza reforçam a importância de se abrir um espaço para as geometrias não euclidianas nos componentes curriculares *história da matemática* apesar de haver registros desse tipo em apenas oito cursos dentre aqueles analisados.

Os componentes curriculares que se prestam ao estudo dos conceitos da geometria hiperbólica são igualmente importantes no currículo. Conforme mencionado nos PPP e corroborado por Reis (2006), este tipo de estudo possibilita ao aluno ter uma visão mais holística sobre o espaço além de fazê-lo entrar em contato com outras métricas para além da euclidiana. De acordo com a Tabela 1, disposta na seção anterior, discussões dessa natureza são esperadas em treze componentes curriculares obrigatórios e oito optativos. Em apenas um desses componentes, há discussões centradas quase que exclusivamente na geometria hiperbólica. Trata-se de um componente curricular optativo. Por outro lado, em todos os cursos analisados há discussões centradas na geometria de Euclides, em componentes obrigatórios. A discrepância é nítida. O ensino de geometria previsto nas diretrizes curriculares nacionais para os cursos de licenciatura em matemática (BRASIL, 2001) é entendido como o ensino da geometria euclidiana.

Ao analisar oito cursos de licenciatura em matemática em universidades do Rio Grande do Sul, Leivas (2009) percebeu a ausência da geometria hiperbólica no currículo básico desses cursos. Conforme se pode perceber na seção anterior, tal realidade também é contemplada em outros estados brasileiros. Enquanto estados como Paraná e São Paulo dispõem de estudos sobre a geometria hiperbólica em, pelo menos, três e quatro cursos universitários, respectivamente, há estados em que tais estudos não são contemplados. De fato, se em cada um dos dezessete estados contemplados com esta pesquisa houvesse pelo menos um curso de licenciatura em matemática (dentre aqueles aqui analisados) que abarcasse os estudos em geometria hiperbólica em sua matriz curricular obrigatória não poderia haver três e quatro desses cursos no Paraná e São Paulo, respectivamente. Com efeito, se assim o fosse haveria um total de vinte e três cursos com componentes obrigatórios acerca de geometrias não euclidianas em vez de dezessete conforme pontuado na seção anterior.

De acordo com Ribeiro (2012), a ausência da geometria hiperbólica nos cursos de licenciatura está relacionada com a sua ausência na educação básica. Os currículos dos cursos do estado do Paraná ajudam a corroborar esta tese. Por outro lado, o que ocorre no estado de São Paulo ajuda, parcialmente, a refutá-la.

No estado do Paraná, a geometria hiperbólica é contemplada tanto na educação básica quanto no ensino superior (no que tange os cursos analisados). A inserção das geometrias não euclidianas nas diretrizes curriculares da educação básica ocorreu quase que concomitantemente com a atualização dos currículos em dois dos três cursos universitários analisados.

Em São Paulo, as geometrias não euclidianas são referenciadas na proposta curricular de 2011. Dos cursos analisados, oito pertencem a universidades desse estado. Cinco deles tiveram seus PPP atualizados a partir do ano de 2012. Três desses cursos não levaram em consideração as diretrizes curriculares da educação básica na composição das suas matrizes curriculares obrigatórias.

No Ceará, a proposta curricular para o ensino de matemática é do ano de 2008 enquanto que o projeto pedagógico do curso analisado é de 2005. A elaboração das diretrizes curriculares estaduais não levou em consideração a ausência de componentes curriculares obrigatórios que tratam das geometrias não euclidianas em, pelo menos, uma universidade do estado. Por lado, tais diretrizes revelam-se em consonância com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) que defendem o estudo da diversidade de modelos geométricos tendo em vista a melhor compreensão do espaço físico.

A entrada das geometrias não euclidianas nas atualizações das matrizes curriculares dos cursos atende a formação dos futuros professores. Contudo, os professores que concluíram a graduação em matemática anteriormente possivelmente não tiveram acesso a essa mesma formação. Muitos deles já atuam na educação básica e, em sua maioria não estão preparados para lidar com a exposição de conteúdos de outras geometrias diferentes da euclidiana. Nesses casos, uma alternativa a considerar consiste nos cursos de formação continuada. Segundo Caldato e Pavanello (2014), cursos dessa natureza não vem ocorrendo no estado do Paraná. Resta verificar o que está ocorrendo nos estados de São Paulo e Ceará.

Na formação continuada ou até mesmo na formação inicial dos professores pode-se recorrer ao uso de softwares iterativos para a apresentação de conceitos de geometria hiperbólica. Neste sentido, Rocha (2004) propõe o uso do Cabri-Géomètre, Rocha (2008) sugere o Cinderella, Ribeiro, Santos e Ferreira (2011) indicam o Geogebra e Souza e Luccas (2015) recomendam o NonEuclid. Apesar da variedade de softwares de geometria dinâmica, em nenhum dos currículos analisados foi proposta a sua utilização no processo de ensino e aprendizagem dessa geometria não euclidiana.

Conclusões

Apesar da quebra do absolutismo do modelo euclidiano há dois séculos, o ensino de geometria na maior parte do Brasil continua assentada na herança deixada por Euclides de Alexandria. Na educação básica, por ensino de geometria geralmente entende-se “ensino de geometria euclidiana”, a despeito das propostas curriculares de três estados (Ceará, Paraná e São Paulo) defenderem também o ensino de outros tipos de geometria. Somente no Paraná há menção explícita à geometria hiperbólica.

No ensino superior percebe-se um esforço maior quanto a inserção da geometria hiperbólica no currículo (comparando-se com a educação básica). Contudo, este tipo de geometria costuma ser apresentado em componentes que tratam dos diversos tipos de geometrias não euclidianas o que pode tornar a sua exposição menos aprofundada.

A geometria hiperbólica aparece nos currículos obrigatórios de dezessete cursos, praticamente a metade do número de cursos analisados. Tal fato aponta para um desnível na formação inicial dos futuros professores de matemática do país no que diz respeito a geometria hiperbólica. Consequentemente, a introdução deste tipo de geometria não euclidiana na educação básica exige cuidados. A elaboração das PC dos estados, em especial do Ceará, Paraná e São Paulo (onde o ensino de geometrias não euclidianas é vislumbrado), deve levar em consideração o tipo de formação que os professores têm recebido.

Os dados levantados nesta pesquisa indicam que o espaço atribuído à geometria hiperbólica nos cursos de licenciatura em matemática é passível de ampliação. Este tipo de geometria não euclidiana é contemplado em vinte e três cursos e costuma aparecer das seguintes formas: através da história da matemática ou por meio de componentes curriculares voltados para as geometrias não euclidianas. Há uma maior incidência da geometria hiperbólica em componentes obrigatórios (presente em dezessete cursos) do que em optativos. No primeiro caso, foram identificados vinte e um componentes curriculares; no segundo, oito. Qualquer que seja o caso, trata-se de componentes curriculares presentes na segunda metade dos cursos. Em nenhum deles houve menção à utilização de softwares no processo de ensino e aprendizagem.

Como ampliação desta pesquisa é recomendável analisar os PPP dos cursos de licenciatura em matemática dos estados que não foram aqui contemplados. Desta forma,

pode-se ter uma visão panorâmica do que ocorre no território nacional. Ademais, sugere-se a realização de pesquisas envolvendo professores universitários com o intuito de saber o posicionamento desses atores acerca da inserção da geometria hiperbólica nos currículos escolares e acadêmicos.

Com relação à educação básica, pode-se também analisar os livros didáticos adotados no Ceará, no Paraná e em São Paulo. Desta forma é possível perceber se a literatura selecionada está em conformidade com o ementário proposto nas PC desses estados.

Referências

ANDRADE, P. F. A. *Introdução à geometria hiperbólica plana: o disco de Poincaré*. Fortaleza: Editora da UFC, 2008.

BARBOSA, J. L. *Geometria hiperbólica*. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

BONGIOVANNI, V.; JAHN, A. P. *De Euclides às geometrias não euclidianas*. In: Revista Iberoamericana de Educacion Matemática, n. 22, p. 37-51, 2010, jun.

BOYER, C B. *História da matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. 2.ed.. São Paulo: Blucher, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. *Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura*. Brasília: MEC/SEF, 2001.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: matemática*. Brasília: CNE/CES, 1998.

BRAVO, R. S. *Técnicas de investigação social: Teoria e ejercicios*. Madrid: Paraninfo, 1991.

BRITO, A. J. *Geometrias não-euclidianas: um estudo históricopedagógico*. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação. Campinas, SP, 1995.

CABARITI, E. *Geometria hiperbólica: uma proposta didática em ambiente informatizado*. 2004. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

CALDATTO, M. E.; PAVANELLO, R. M. *O processo de inserção das geometrias não euclidianas no currículo da escola paranaense: a visão dos professores participantes*. In: Bolema, Rio Claro (SP), v. 28, n. 48, p. 42-63, 2014.

CAMARGO, K. C.A. *A expressão gráfica e o ensino de geometrias não euclidianas*. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2012.

CARMO, M. P. *Geometria Riemanniana*. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

CEARÁ (Estado). Superintendência de Educação. *Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática*. Fortaleza, 2008.

- COUTINHO, C. P. *Metodologia de investigação em ciências sociais e humanas*. 2ª edição. Coimbra: Edições Almedina, 2013.
- EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Tradução Hygino Domingues. São Paulo: Editora Unicamp, 2008.
- FERREIRA, L. *Uma proposta de ensino de geometria hiperbólica: “construção do plano de Poincaré” com o uso do software geogebra*. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Maringá, 2011.
- GALIAN, C. V. A. *Os PCN e a elaboração de propostas curriculares no Brasil*. In: *Cadernos de Pesquisa*, v. 144, n. 153, p. 648-669, 2014.
- GIL, A. C. *Como elaborar projetos de pesquisa*. São Paulo: Atlas, 2002.
- HANSEN, V. L. *Changes and trends in geometry curricula*. In C. Mammana, & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century*. London: Kluwer Academic Publishers, p. 235-242, 1998.
- KRIPKA, R. M. L.; SCHELLER, M.; BONOTTO, D. L. *Pesquisa documental: considerações sobre conceitos e características na pesquisa qualitativa*. In: VI Simpósio Internacional de Educação e Comunicação. Atas, p. 243-247, 2015.
- LEIVAS, J.C.P. *Imaginação, Intuição e Visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática*. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2009.
- LEIVAS, J. C. P. *Geometrias não euclidianas: ainda desconhecidas por muitos*. In: *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v.15, n.3, p. 647-670, 2013.
- LOVIS, K. A.; FRANCO, V. S. *As concepções de geometrias não euclidianas de um grupo de professores de matemática da educação básica*. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 29, n. 51, p. 369-388, 2015.
- LOVIS, K. A.; FRANCO, V. S.; BARROS, R. M. O. *Dificuldades e obstáculos apresentados por um grupo de professores de matemática no estudo da geometria hiperbólica*. *Zetetiké*, Unicamp, v. 22, n. 42, p. 11-29, 2014.
- MURARI, C. *Experenciando materiais manipulativos para o ensino e a aprendizagem de matemática*. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 187-211, 2011.
- PARANÁ (Estado). Superintendência de Educação. *Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática*. Curitiba, 2008.
- PIANA, M. C. *A construção da pesquisa documental: avanços e desafios na atuação do serviço social no campo educacional*. São Paulo: Editora Unesp, 2009.
- REIS, J. D. A. D. S. *Geometria esférica por meio de materiais manipuláveis*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). UNESP, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2006.

RIBEIRO, G. F., SANTOS, T. S.; FERREIRA, L. *Construção de atividades para o ensino de geometria hiperbólica*. In: VI Encontro de Produção Científica e Tecnológica. Anais, p. 1-16, 2011.

RIBEIRO, R. D. G. L. *O ensino das geometrias não euclidianas: um olhar sob a perspectiva da divulgação científica*. Dissertação (Mestrado). Universidade de São Paulo, Faculdade de Educação, São Paulo, 2012.

RIBEIRO, R. S.; GRAVINA, M. A. *Disco de Poincaré: uma proposta para explorar geometria hiperbólica no geogebra*. In: Revista Professor de Matemática On-line, Rio de Janeiro, v. 1, n. 1, p. 53-66, 2013.

ROCHA, M. V. *Uma proposta de ensino para o estudo da geometria hiperbólica em ambiente de geometria dinâmica*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

SÃO PAULO (Estado). Superintendência de Educação. *Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática*. São Paulo, 2011.

SILVA, L. R. C.; DAMACENO, A. D.; MARTINS, M. C. R.; SOBRAL, K. M.; FARIAS, I. M. S. *Pesquisa documental: alternativa investigativa na formação docente*. In: IX Congresso Nacional de Educação. Anais. Paraná: PUC, p. 4554-4566, 2009.

SOUZA, A. C. C. *Aspectos históricos das geometrias não euclidianas*. Bolema, Rio Claro-SP, v. 8, n. 9, 1993.

SOUZA, M. L.; LUCCAS, S. *Geometria hiperbólica: possibilidades para o ensino do conhecimento geométrico não euclidiano*. Espacios, v. 36, n. 12, 2015.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ. Pró-Reitoria de Graduação. *Projeto Político Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática*. Maringá, 2008.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA. Pró-Reitoria de Graduação. *Projeto Político Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática*. Presidente Prudente, 2015.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC. Pró-Reitoria de Graduação. *Projeto Político Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática*. Santo André, 2010.

VEIGA, I. P. A. *Projeto Político Pedagógico: Continuidade ou Transgressão para Acertar?* In: O que há de novo na educação superior: Do projeto pedagógico à prática transformadora. CASTANHO, S., CASTANHO, M. E. L.M. (orgs.) – Campinas, SP: Papirus, 2000 (Coleção Magistério: Formação e Trabalho Pedagógico).

TERDIMAN, E. W. *A geometria hiperbólica e sua consistência*. Dissertação (Mestrado em Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1989.

Texto recebido: 20/06/2017

Texto aprovado: 01/11/2017

Anexo

Os PPP dos cursos ou as matrizes curriculares com as respectivas ementas foram encontradas em páginas da internet. A tabela 2 apresenta a relação de sites onde tais documentos foram localizados. A última data de atualização foi 18 de junho de 2017.

Tabela 2 - Páginas da internet onde foram encontradas as ementas dos componentes curriculares

Programas de Componentes Curriculares na Internet	
Universidade	Site
FUFSE	https://www.sigaa.ufs.br/sigaa/link/public/curso/curriculo/718
FUFPI	http://leg.ufpi.br/subsiteFiles/cc/arquivos/files/Licenciatura%20Matem%C3%A1tica%202011.pdf
UNB	https://condoc.unb.br/matriculaweb/graduacao/curriculo.aspx?cod=1325
USP-SP	https://uspdigital.usp.br/jupiterweb/listarGradeCurricular?codcg=45&codcur=45024&codhab=1&tipo=N
USP-SC	https://uspdigital.usp.br/jupiterweb/listarGradeCurricular?codcg=55&codcur=55030&codhab=300&tipo=N
UNICAMP	https://www.ime.unicamp.br/graduacao/disciplinas
UEL	http://www.uel.br/prograd/?content=catalogocursos/catalogo_2016/cursos/matematica.html
UEM	http://www.dma.uem.br/novapagina/?q=node/6
UNESP-Bauru	http://www.fc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/graduacao/gradecurricular/1505/
UNESP-PP	http://www.fct.unesp.br/#!/graduacao/matematica/projeto-pedagogico/
UNESP-RC	http://igce.rc.unesp.br/#!/graduacao/matematica/sobre-o-curso/projeto-pedagogico-a-partir-de-2015/
UFBA	http://www.mat.ufba.br/disciplinas/discipli.htm
UFPB	http://www.mat.ufpb.br/dmufpb/index.php/ementario
UFAL	http://www.im.ufal.br/lista-licenciatura/matriz-curricular-lista-licenciatura
UFMG	http://mat.ufcg.edu.br/pgmat/ppc-e-resolucoes/

UFG	https://sistemas.ufg.br/consultas_publicas/resolucoes/arquivos/Resolucao_CEPEC_2012_1121.pdf
UNIFEI	https://portalacademico.unifei.edu.br/files/material/ppc/C01_MLI.pdf
UFJF	http://www.ufjf.br/matematica/curso/licenciatura-em-matematica-diurno/matriz-curricular-licenciatura-em-matematica-diurno/
UFMG	
UFPE	https://www.ufpe.br/grdmat/index.php?option=com_content&view=article&id=312:ln&catid=31:lc&Itemid=240
UFSC	http://mtm.grad.ufsc.br/projeto-pedagogico/
UFSM	http://w3.ufsm.br/coordmat/index.php/2014-09-15-21-49-45/curriculo-detalhado
UFSCAR	http://www.dm.ufscar.br/graduacao/index.php/graduacao/cursos-e-curriculos/42-cursos-curriculos-e-projetos-pedagogicos
UFU	http://www.portal.famat.ufu.br/node/270
UFV	http://www.mtm.ufv.br/?page_id=13
UFABC	http://prograd.ufabc.edu.br/lm
UFAM	http://www.ice.ufam.edu.br/ensino/graduacao/ementas
UFC	https://si3.ufc.br/sigaa/public/curso/relatorio_curriculo.jsf
UFES	http://www.matematica.ufes.br/grade-da-licenciatura
UFMA	https://sigaa.ufma.br/sigaa/link/public/curso/curriculo/15899623
UFPA	http://www.matematica.icen.ufpa.br/index.php?option=com_content&view=article&id=105&Itemid=70
UFPR	http://www.mat.ufpr.br/graduacao/matematica/curriculo/lic_dia.html
UFRJ	http://www.im.ufrj.br/licenciatura/
UFRGS	http://euler.mat.ufrgs.br/~comgradmat/resolucoes/licmat_projeto.pdf
UFF	http://www.uff.br/sites/default/files/mat_ppc_do_curso.pdf

Os PCs dos estados em que as universidades elencadas na tabela 2 estão situadas também foram encontrados em páginas da internet. Somente o PC de um estado, a saber, o Amazonas não foi encontrado. Nesse caso, foram analisadas as diretrizes curriculares da educação municipal de sua capital, a cidade de Manaus.