ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i1p294-314

Registros em língua natural das superfícies quádricas: análise semiótica e possibilidades de uso de novos registros

Records in natural language of quadric surfaces: semiotic analysis and possibilities of using new records

SÉRGIO FLORENTINO DA SILVA[1]
MÉRICLES THADEU MORETTI[2]

Resumo

Levando em conta a teoria dos registros de representações semióticas de Raymond Duval, sobretudo em relação a abordagem de interpretação global de propriedades figurais, as funções discursivas da linguagem e a operação semiótica e cognitiva de conversão, neste trabalho, proporemos analisar os registros em língua natural das superfícies quádricas (não cilíndricas e não degeneradas) presentes em livros do Ensino Superior. Tais análises evidenciaram que esses registros pesquisados recorrem, mesmo que nem sempre de forma explícita, a variáveis visuais e a propriedades globais das figuras e que apresentam potencial para contemplar diversas funções discursivas, tais como, a apofântica que reflete a capacidade de designação de algo sob a forma de uma proposição matemática, a expansão discursiva que permite ligações entre proposições matemáticas de forma coerente além da operação de conversão. Ao adicionarmos a essa discussão o Princípio de Extensão de Bento de Jesus Caraça, indicaremos possibilidades do uso de novos registros para as cônicas.

Palavras-chave: Superfícies Quádricas; Interpretação Global; Funções Discursivas da Linguagem.

Abstract

Taking into consideration Raymond Duval's theory of the records of semiotic representations, especially in relation to the global interpretation approach of figurative properties, the discursive functions of language and the semiotic and cognitive operation of conversion, we propose to analyze the records in natural language of the quadric (non-cylindrical and non-degenerated) surfaces present in Higher Education books. Such analyzes have evidenced that these researched records recur, although not always explicitly, to visual variables and to the global properties of the figures and that present the potential to contemplate several discursive functions, such as the apophantic, which reflects the capacity to designate something under the form of a mathematical proposition, the discursive expansion that allows connections between mathematical

[1] Doutorando em Educação Científica e Tecnológica pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Professor de Matemática do Departamento de Cultura Geral do Instituto Federal de Santa Catarina (IFSC). Endereço para correspondência: Rua José Lino Kretzer 608, São José, SC, CEP: 88103-310 Brasil. *E – mail:* sergio.florentino@ifsc.edu.br.
[2] Doutor em Didática da Matemática pela ULP/Estrasburgo – França. Professor permanente do PPGECT/UFSC. Endereço para correspondência: Campus Universitário Trindade – CFM/PPGECT. CEP 88.040-900 – Florianópolis-SC, Brasil. *E-mail*: mthmoretti@gmail.com

propositions in a coherent way, in addition to the conversion operation. When we add to this discussion Bento de Jesus Caraça's Principle of Extension, we indicate possibilities of using new records for the conics.

Keywords: Quadric Surfaces; Global Interpretation; Discursive Functions of Language.

Introdução

Analisar gráficos não só de curvas mais também de superfícies é uma prática recorrente que não é exclusiva de pesquisadores e estudantes da área de Matemática. Do ponto de vista escolar, o estudo de curvas está constantemente presente nos Ensinos Fundamental, Médio e, ainda, em diversos cursos tanto de graduação quanto de pós-graduação. Já o estudo de superfícies geralmente inicia-se em cursos de graduação e pós-graduação. O entendimento dos gráficos permite compreender diversas situações que são tanto internas quanto externas a Matemática: Corrêa e Moretti (2014, p. 39) entendem que esboçar um gráfico é "[...] uma ferramenta matemática muito importante nos tempos atuais por tornar possível a representação de diversos fenômenos e situações."

No Ensino Superior, dentre os tipos de superfícies incluem-se as que são conhecidas pelo nome genérico de *superfícies quádricas*. Tendo como base que os registros em língua natural são importantes não apenas para a comunicação, mas também para a aprendizagem em matemática, buscamos a literatura especializada para analisarmos os termos usados para as quádricas não cilíndricas e não degeneradas (elipsoides; hiperboloides de uma e duas folhas; cones quádricos elípticos; paraboloides elípticos e hiperbólicos).[3]

Nosso referencial teórico foi a Teoria dos Registros de Representações Semióticas (TRRS) de Raymond Duval, sobretudo no que diz respeito a *Abordagem de Interpretação Global de Propriedades Figurais* e as *Funções Discursivas Referencial*, *Apofântica* e *Expansão* e, ainda, a operação cognitiva e semiótica de conversão. Quanto a essas funções, a referencial é a que permite designar objetos, a apofântica é a que reflete a capacita de dizer alguma coisa a respeito dos objetos que designam em forma de uma proposição matemática e a expansão discursiva é a que permite ligações entre proposições matemáticas de forma coerente. Para ler detalhadamente a respeito das Funções Discursivas da Linguagem acesse Duval (2004), Brandt; Moretti e Bassoi (2014),

[3] Quando dissermos quádricas, neste texto, estamos nos referindo apenas as que são não cilíndricas e não degeneradas.

Dionízio; Brandt e Moretti (2014) e Dionízio; Brandt (2014). Nesses trabalhos há uma série de exemplos práticos além da discussão das operações discursivas que cada função discursiva da linguagem possui.

A pesquisa recaiu nos livros didáticos de Leithold (1994), Winterle (2000), Anton (2002) e Lehmann (2007), pois em relação a outros livros clássicos que observamos os escolhidos nos pareceram ser os que mais desenvolveram registros em língua natural para as quádricas dentro da perspectiva da TRRS.

As análises dão indicativos de que os termos desses autores têm potencial para dizer algo dos objetos sobre a forma de uma proposição matemática (*Função Apofântica*), para religar a outras proposições matemáticas de forma coerente (*Expansão Discursiva*) e realizar conversões, por isso, na perspectiva da TRRS, pensamos que eles podem trazer contribuições significativas para a aprendizagem. Entretanto, por vezes, eles possuem alguns problemas principalmente decorrentes do uso da Função Referencial.

Apropriamo-nos de algumas contribuições dos autores que pesquisamos para, mediante as possibilidades da Função Referencial, propormos o que chamaremos de registros *básicos* em língua natural.[4] Justificamos o adjetivo *básico* por entender que nossas propostas de registros são elaboradas a partir de unidades significantes *básicas*.

Nossas propostas escolheram variáveis visuais que pensamos expor propriedades globais da figura. Nelas fizemos articulações explícitas entre os registros em língua natural com as unidades simbólicas e as variáveis visuais tomadas, pois, trata-se de aprendizagens não naturais e sim do tipo semióticas que o ensino não deve negligenciar. Além disso, tendo como base o Princípio de Extensão de Caraça, a seguir, tentamos fazer com que um termo usado para uma das quádricas fosse, na medida do possível, usado para as outras:

> [...] o homem tem tendência a generalizar e estender todas as aquisições do seu pensamento, seja qual for o caminho pelo qual essas aquisições se obtêm, e a procurar o maior rendimento possível dessas generalizações pela exploração metódica de todas as suas consequências. (CARAÇA, 1951, p. 10).

Abordagem de Interpretação Global de Propriedades Figurais

Para Duval (2011a) a *compreensão integral* (ou *integrativa*) dos gráficos só é possível com o que ele definiu como Abordagem de Interpretação Global de Propriedades

[4] Veremos que os registros que propomos são mistos, pois, mesmo que predominantemente sejam em língua natural, também possuem elementos do registro simbólico. A opção em usar o termo “registro em língua natural” se deve apenas pela referida predominância.

Figurais. Nesse entendimento, não nos limitamos em apenas “olhar” um desenho no papel ou em um *software* que representa uma equação e nem nos reduzimos a analisar elementos pontuais ou particulares presentes num gráfico. Mais do que isso, na concepção dessa teoria, a potencialidade da aprendizagem (integral) têm exigências mais amplas e específicas que necessitam de uma abordagem que permita a *interpretação global das propriedades figurais* e que, com isso, possibilita efeitos duradouros na aprendizagem dos alunos.

Para tanto, recorre-se ao Método de Análise e Identificação das Variáveis Cognitivas que permite identificar as *unidades significantes simbólicas* (pertinentes ao registro simbólico) e as correspondentes *unidades significantes cartesianas* (pertinentes ao registro cartesiano e também chamadas de *variáveis visuais*). De maneira mais específica, para a identificação dessas unidades significantes (básicas) fazem-se todas as modificações possíveis num dos registros de representação e observam-se quais delas geram modificações no outro registro. Deve-se variar, dentro de um mesmo registro, uma unidade significante e manter todas as outras constantes e ver o que ocorre no outro registro. Na utilização desse método, de acordo com Duval (2003, 2009, 2011b), a distinção das unidades significantes de um sistema semiótico é feita recorrendo ao clássico princípio de oposição utilizado pelos linguistas a partir de Ferdinand de Saussure. Nesse princípio, os signos são entendidos não de forma isolada e sim em sua forma relacional opositiva, pois, como esclarece Duval (2011b, p. 30), “os signos só podem ser reconhecidos como signos por meio das relações de oposição que eles têm com os outros signos no interior de um sistema. ” Logo, nesse princípio, *o valor* de um signo é constituído pela diferença em relação a outros signos que constituem um sistema.

Em todo esse processo de análise e identificação, que é central na TRRS, a discriminação das variáveis visuais é particularmente pouco evidente, mas, infelizmente, em geral é negligenciado no ensino. De qualquer maneira, o adequado reconhecimento dessas variáveis permite que se identifique o que é visualmente diferente de modo significativo. Sem ele, não temos como identificar as unidades significantes simbólicas correspondentes e, consequentemente, a compreensão integral em matemática é comprometida. Além disso, essas unidades são orientadoras e intermediarão as transformações entre registros distintos (conversões). Não obstante, não é suficiente conhecê-las sendo necessário coordená-las a partir das regras de correspondência semiótica e, sobretudo, realizar as conversões. Portanto, há um processo semiótico que inclui claras identificações, delimitações e regras de articulações entre distintos registros.

Dessa forma, não se trata de uma aprendizagem que seja obtida de maneira automática, imediata ou natural e, por isso, o professor não deve negligenciar essas questões.

Análises e propostas de registros básicos em língua natural

Esta seção trata das análises e propostas dos registros em língua natural das quádricas. Na primeira subseção apresentaremos os registros em língua natural dos autores que pesquisamos e nas seguintes faremos as análises e as propostas.

Registros em língua natural das quádricas presentes nos livros didáticos

Para facilitar a leitura inicialmente apresentamos, no Quadro 1, as equações das quádricas padrão.

Quadro 1 – Equações das quádricas padrão

Quádrica	**Equações**		
Elipsoides	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$		
Hiperboloides de uma folha	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
Hiperboloides de duas folhas	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
Cones quádricos elípticos	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$	$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$
Paraboloides elípticos	$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$	$y=\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}$	$x=\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$
	$z=-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$	$y=-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}$	$x=-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}$
Paraboloides hiperbólicos	$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$	$z=-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$	$y=+\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}$
	$y=-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}$	$x=+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}$	$x=-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$

Fonte: Os autores

Sabemos que um hiperboloide de uma folha padrão pode estar em três posições diferentes no sistema cartesiano (*abrindo em z, em y ou em x*) e que conforme é essa posição há uma equação correspondente. Por isso há três equações para essa quádrica no Quadro 1. O comentário análogo vale para as demais quádricas que esse quadro se refere. Veremos que nossas propostas de registros em língua natural consideram essa questão e que, além disso, para cada uma dessas posições (ou equações) propomos um correspondente registro básico em língua natural.

A seguir apresentaremos, em forma de quadros, os registros em língua natural dos autores que pesquisamos.

Quadro 2 – Registros em língua natural propostos por Leithold (1994)

Registros em língua natural sem o acréscimo de adjetivos[5]	Adjetivos sugeridos pelo autor do livro
Elipsoide	1 – "Se dois números quaisquer desses três [a, b e c] forem iguais, teremos um elipsoide de revolução que também será chamado de **esferoide**." (p. 889, grifo do autor); 2 – "Um esferoide para o qual o terceiro número seja maior que os outros dois iguais são chamados de **prolato** (alongado nos polos). [...] tem o formato de uma bola de futebol americano. " (p. 889, grifo do autor); 3 – "Um esferoide **oblato** será obtido se o terceiro número for menor do que os outros, que são iguais. " (p. 889, grifo do autor); 4 – "Se todos os três números a, b e c [...] forem iguais [...] será uma **esfera**. " (p. 889, grifo do autor).
Hiperboloide de uma folha	5 – Hiperboloide *elíptico* de uma folha (p. 889, grifo nosso); 6 – "[...] o eixo desse hiperboloide é *z*." (p. 890); 7 - "Se $a = b$, a superfície é um hiperboloide de revolução para o qual o eixo é a reta contendo os eixos conjugados [eixo perpendicular ao que contém os focos]." (p. 890).
Hiperboloide de duas folhas	8 - Análogo a 5 (p. 890); 9 - "Se $a = b$, a superfície é um hiperboloide de revolução no qual o eixo é a reta contendo o eixo transverso." (p. 890).
Cone quádrico elíptico	10 – "O cone circular reto gerado pela rotação de $y = x$ em torno do eixo *x.*"(p. 905, exercício 11 da seção das respostas).[6]
Paraboloide elíptico	11 – "O paraboloide de revolução gerado pela rotação $y^2 = 9z$ em torno do eixo *z.*"(p. 905, exercício 9 da seção das respostas).
Paraboloide hiperbólico	12 - Não encontrado.[7]

Fonte: Leithold (1994)

Quadro 3 – Registros em língua natural propostos por Winterle (2000)

Registros em língua natural sem o acréscimo de adjetivos	Adjetivos sugeridos pelo autor do livro
Elipsoide	1 - "Elipsoide de revolução em torno do eixo Oz." (p. 216); 2 - "elipsoide, centro (-2, 1, 3), eixo maior paralelo a Oz." (p. 230).
Hiperboloide de uma folha	3 – Análogo a 1. (p. 218); 4 - "[...] hiperboloide de uma folha ao longo do eixo Oz." (p. 129); 5 – "hiperboloide de uma folha, centro (3, -1, -4), eixo paralelo a Oy." (p. 230).
Hiperboloide de duas folhas	6 - Análogo a 1, 4 (p. 220) e 5 (p. 230);
Cone quádrico elíptico	7 - Análogo a 1 e 4 (p. 223); 8 – "superfície cônica, *vértice* (0, -2, 1), eixo paralelo a Ox." (p. 230, grifo nosso).
Paraboloide elíptico	9 - Análogo a 1, 4 (p. 221) e 8 (p. 230).
Paraboloide hiperbólico	6 - Análogo a 4 (p. 222).

Fonte: Winterle (2000)

[5] Na primeira coluna dos quadros são apresentados os termos clássicos e de uso comum. Na segunda, são os termos específicos usados pelo autor do livro em análise.
[6] As citações 10 e 11 foram retiradas da seção que apresenta as respostas dos exercícios. Elas referem-se, respectivamente, aos exercícios 11 e 9 de Leithold (1994, p. 905).
[7] Este objeto nunca pode ser de revolução.

Quadro 4 - Registros em língua natural propostos por Anton (2002)

Registros em língua natural sem o acréscimo de adjetivos	Adjetivos sugeridos pelo autor do livro
Elipsoide	1 - Não encontrado.
Hiperboloide de uma folha	2 - “Hiperboloide de uma folha, o eixo é o eixo *y*.” (p. 574).
Hiperboloide de duas folhas	3 - “Hiperboloide de duas folhas separadas pelo plano *yz*.” (p. 574).
Cone quádrico elíptico	4 - “[...] cone circular que se abre ao longo do eixo *z*.” (p. 238). 5 - “Cone elíptico com eixo *x* como eixo.” (p. 574).
Paraboloide elíptico	6 - “[...] paraboloide circular que se abre ao longo do eixo *z* positiva [...]”. (p. 238). 7 - “Paraboloide circular aberto para baixo no eixo *z* negativo.” (p. 574).
Paraboloide hiperbólico	8 - “[...] paraboloide hiperbólico assentado no eixo *y* [...]”. (p. 239). 9 - “paraboloide hiperbólico montado nos eixos *x* e *z*”. (p. 574).

Fonte: Anton (2002)

Note que diferente dos demais autores, ao se referir aos elipsoides Anton (2002) não inclui adjetivos tais como “de revolução”, “oblato”, “prolato”, “esferoide”, “alongado” e “encurtado”. Dessa forma, linguisticamente não há diferenciação entre os tipos de elipsoides. Cabe ainda a ressalva que numa seção a parte[8] Anton (2002) trata das superfícies esféricas sem, contudo, relacioná-las como um tipo de elipsoide.

Quadro 5 - Registros em língua natural propostos por Lehmann (2007)

Registros em língua natural sem o acréscimo de adjetivos	Adjetivos sugeridos pelo autor do livro
Elipsoide	1 - “[...] elipsoide de revolução ou esferoide [...] elipsoide alongado [...] elipsoide encurtado [...] superfície esférica [...]”. (p. 378).
Hiperboloide de uma folha	2 - “[...] hipérbole de uma folha que se encontra ao longo do eixo coordenado [...]”. (p. 379); 3 – “[...] hiperboloide de revolução de uma folha que pode ser gerado pela rotação da hipérbole $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ e $x = 0$ em torno do eixo Z.” (p. 379).
Hiperboloide de duas folhas	3 – Análogo a 2 e 3 (p. 381).
Cone quádrico elíptico	4 – “[...] superfície cônica quádrica cujo eixo se encontra ao longo do eixo Z.” (p. 379)
Paraboloide elíptico	5 – Análogo 2 e 3 (p. 382-383);
Paraboloide hiperbólico	7- “[...] se encontra ao longo do eixo coordenado [...]”. (p. 379)

Fonte: Lehmann (2007)

Em capítulo anterior ao das quádricas, especificamente o que discute as superfícies de revolução, Lehmann (2002, p. 365) ainda expõe os seguintes termos: “[...]

[8] Trata-se da seção 4.1 do livro de Anton (2002).

superfície de revolução cujo eixo de revolução é o eixo *Z*.” Para as que o eixo de revolução é o eixo coordenado, Lehmann (2002, p. 365, grifo do autor) ainda acrescenta: “[...] superfície que se encontra *ao longo* deste eixo.”

Registros em língua natural dos elipsoides

Conforme mostram os Quadros 2, 3, 4 e 5 nos casos em que o elipsoide possui três eixos congruentes é comum o uso do termo *superfície esférica* ou *esfera.*

Nos casos em que o elipsoide possui dois eixos congruentes é comum o termo *esferoide*. Nesses casos os adjetivos *prolato, oblato, alongado* e *encurtado* também são acrescentados. Entre os quatro termos, por uma questão de simplicidade e recorrência, preferimos *alongado e encurtado.* Neste último ainda podemos usar o adjetivo *achatado.* Quando os três eixos possuem medidas diferentes encontramos apenas seguinte contribuição de Winterle (2000, p. 230): “elipsoide, centro (-2, 1, 3), eixo maior paralelo a Oz.” Nela temos unidades significantes que permitem fazer conversões e expansões discursivas que envolvam o eixo maior. Porém, esses termos não permitem inferir qual a posição dos outros eixos (médio e menor) e, por isso, esse registro não abre possibilidades de conversões ou expansões discursivas que envolvem os outros eixos que não sejam o eixo maior.

Vemos ainda que é recorrente o uso do adjetivo *de revolução* para os casos em que o elipsoide é uma superfície de revolução.[9] Caso o estudo tenha como foco as superfícies de revolução, pensamos que o uso desse adjetivo é semanticamente interessante pelo fato de que chama a atenção para uma interessante propriedade global da figura – a revolução. Particularmente se o interesse for expor o eixo de revolução, então o registro “elipsoide de revolução em torno do eixo Oz”, de Winterle (2000, p. 216), mostra-se vantajoso. Porém, note que ao dizermos apenas *elipsoide de revolução* não diferenciamos os elipsoides do tipo esferoide dos que são do tipo superfície esférica. Além disso, nos esferoides e nas superfícies esféricas está implícita, mesmo que sejam necessárias expansões discursivas, a ideia de revolução.

Feito a análise dos termos usados pelos autores dos livros que pesquisamos, partiremos, a partir do Quadro 6, para nossas propostas de registros básicos em língua natural para os elipsoides na posição padrão. Nesse quadro e nos seguintes a parte em itálico são

[9] Um elipsoide que tem os três eixos com medidas diferentes não é de revolução.

acréscimos nossos nos termos clássicos da literatura. Além disso, as colunas 2 e 3 desses quadros são as correspondentes designações que tomamos e que entendemos que devem ser destacadas explicitamente no ensino ao usarmos nossos registros em língua natural, pois, trata-se de aprendizagens não naturais e sim do tipo semióticas que o ensino não deve negligenciar. Considere ainda o sistema cartesiano $\alpha\beta\gamma$ e note que nesse sistema os eixos coordenados são os eixos α, β e δ e que qualquer deles pode ser o eixo x, y ou z sempre, claro, diferentes entre si.

Quadro 6 - Propostas de registros *básicos* em língua natural para os elipsoides padrão

Registros básicos em língua natural	**Variáveis visuais**	**Unidades significantes simbólicas correspondentes**[10]
Elipsoide *em* α *e* β	- Os três eixos (maior, menor e médio) do elipsoide têm medidas diferentes; - e o eixo maior está contido no eixo α e o eixo médio está contido no eixo β. **Comentário:** por expansão discursiva o eixo menor está contido no terceiro eixo coordenado.	- Os denominadores dos três termos quadráticos são diferentes; - entre os três termos quadráticos o maior denominador está sobre a variável α^2, o médio está sobre β^2 e o menor está sobre a outra variável quadrática.
Superfície esférica *com* $R = R_0$	- Os três eixos têm medidas iguais; - medida do raio R é R_0.	- Os denominadores dos três termos quadráticos são iguais; - o denominador de cada termo quadrático é numericamente igual ao quadrado da medida do raio.
Esferoide alongado *em* α	- Dois eixos têm medidas iguais e o terceiro eixo tem medida maior que os outros dois; - o eixo maior está contido no eixo α. **Comentário:** por expansão discursiva os eixos menores do elipsoide estão contidos nos eixos β e γ.	- Entre os três denominadores dos termos quadráticos, dois são iguais e o terceiro é maior que os outros dois; - entre os três termos quadráticos o maior denominador está sobre a variável α^2.
Esferoide achatado *em* α	- Dois eixos têm medidas iguais e o terceiro eixo tem medida menor que os outros dois; - o eixo menor está contido no eixo α. **Comentário:** por expansão discursiva os eixos maiores do elipsoide estão contidos nos eixos β e γ.	- Entre os três denominadores dos termos quadráticos, dois são iguais e o terceiro é menor que os outros dois; - entre os três termos quadráticos o menor denominador está sobre a variável α^2.

Fonte: Os autores

[10] Em todo este artigo estamos considerando que as equações estão expressas numa forma tal que: num dos membros da equação haja apenas termos quadráticos; os numeradores dos coeficientes numéricos desses termos têm modulo igual a 1; no outro membro haja apenas um termo linear com coeficiente igual a 1 ou apenas um termo numérico igual a 1 ou 0.

No quadro anterior vemos que nas variáveis visuais tomadas as unidades significantes simbólicas correspondentes são provenientes da identificação dos denominadores dos termos quadráticos da equação e de relações ou operações envolvendo esses denominadores (relação de ordem; posição em relação às variáveis; raiz quadrada, ...). Nos parágrafos seguintes detalharemos essas variáveis e as correspondentes unidades.

Primeiro, nossas propostas de registros básicos em língua natural tomou a comparação entre o tamanho dos eixos do elipsoide como variável visual e, com isso, ela assume três valores: os três eixos têm medidas diferentes (*elipsoide em α e β*); dois eixos têm medidas iguais e o terceiro tem medida diferente (*esferoide*); as medidas dos eixos são iguais (*superfície esférica*) e as chamaremos de diâmetro. Em ordem, esses valores se correspondem algebricamente com as seguintes relações entre os denominadores dos termos quadráticos da equação: os três denominadores são diferentes; dois são iguais e um é diferente; os três são iguais.

Em cada um dos casos descritos no parágrafo anterior ainda tomamos variáveis visuais específicas.

Para as *elipsoides em α e β* a posição dos eixos maior, médio e menor no sistema cartesiano também configura uma variável visual que possui seis valores visuais. Podemos entender esse número pelo Princípio Fundamental da Contagem (PFC). Conforme sabemos, no sistema cartesiano xyz o eixo maior pode estar em três posições (contido no eixo x, y ou z). Escolhido uma dessas possibilidades, o eixo médio tem duas possibilidades e, consequentemente, o eixo menor tem apenas a possibilidade restante. Logo, pelo PFC, são 3.2.1 = 6 possibilidades. Note que ao dizermos *elipsoide em α e β* estamos considerando, *em ordem*, que o eixo maior e médio estão contidos respectivamente nos eixos α e β. Algebricamente para analisarmos esses seis valores devemos identificar, em relação aos termos quadráticos, qual tem maior, médio e menor denominador.

Para os *esferoides* a comparação entre o tamanho do eixo com medida diferente em relação ao outros dois com medidas iguais também configura uma variável visual. Com isso, temos os dois seguintes valores visuais: alongado; achatado. Algebricamente basta identificarmos em relação aos termos quadráticos se o denominador diferente é maior (alongado) ou menor (achatado) que os dois iguais. Ainda para os *esferoides* a posição do eixo alongado (ou achatado) em relação aos eixos coordenados também configura uma variável visual que possui os seguintes valores visuais: alongada (ou achatado) no eixo x, y ou z. Nesse caso, algebricamente devemos identificar em relação aos termos quadráticos qual possui maior (menor para os achatados) denominador. Temos, portanto, seis tipos de esferoides (3 alongados e 3 achatados).

Quando o tamanho dos eixos é igual (superfície esférica com $\mathrm{R} = \mathrm{R}_0$) consideramos que tamanho do raio $\mathrm{R} = \mathrm{R}_0$ como uma variável visual que possui infinitos valores. Algebricamente a identificação da raiz quadrada de um dos denominadores dos termos quadráticos permite determinar tais valores visuais.[11]

Como exemplo[12], considere a equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$. Qual dos tipos de elipsoide é? Inicialmente observe que os denominadores dos três termos quadráticos são 4, 4 e 9. Comparando seus valores é fácil ver que dois deles são iguais (4 = 4) e o terceiro (9) é maior que os outros dois. Logo, trata-se de um esferoide alongado. Como o maior denominador está sobre a variável y^2 concluímos que é um *esferoide alongado em* y. Em termos gráficos, os eixos menores do elipsoide estão sobre os eixos x e z e o eixo maior está sobre o eixo y. As medidas dos semieixos menores e do semieixo maior são respectivamente iguais a $\sqrt{4} = 2$ e $\sqrt{9} = 3$ unidades de comprimento. Assim, podemos ter um esboço do registro cartesiano e, claro fazer conversões e expansões discursivas envolvendo os registros em língua natural.

Conforme mostra o quadro anterior, nos apropriamos de alguns termos dos autores pesquisados. Em nosso caso, fizemos articulações explícitas entre os registros em língua natural com as unidades simbólicas e as variáveis visuais tomadas e chegamos a treze possibilidades. Pensamos que essa articulação não é natural e, portanto, elas devem ser trabalhadas. Porém, por vezes constatamos que os livros analisados excluem, sobretudo algebricamente, tais articulações.

Registros em língua natural dos hiperboloides, cones quádricos elípticos e paraboloides elípticos

Analisando os Quadro 2, 3, 4 e 5, para os casos dos hiperboloides, dos cones e dos paraboloides que são do tipo de revolução, vemos que é bastante recorrente o uso do adjetivo *revolução* ou *rotação* seguido dos termos *em torno do eixo* α. Da mesma forma que discutimos para os elipsoides, no sentido de destacar variáveis relacionadas a superfícies de revolução pensamos que os citados termos são interessantes.

[11] Caso a equação da superfície esférica esteja na forma $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, então devemos identificar a raiz quadrada do termo independente dessa equação.

[12] Na Tese do primeiro autor deste artigo haverá outras aplicações.

Sem fazer uma designação clara, e talvez recorrendo apenas a aspectos intuitivos ou apenas como um código, Winterle (2000) e Lehmann (2007) usam termos semelhantes a *hiperboloide de uma/duas folhas/cones quádricos elípticos/paraboloide elíptico ao longo do eixo* α. Porém, o que significa isso? Especificamente no estudo das superfícies de revolução que tem um dos eixos coordenados como eixo de revolução, Lehmann (2007) propõe termos correlacionando-os as interseções. De maneira mais específica, segundo esse autor,

> Se eixo coordenado é o eixo de revolução, [...] então as seções da superfície por planos perpendiculares ao eixo são todas circunferências cujos centros se encontram sobre o referido eixo. Diz-se então que a superfície *se encontra ao longo deste eixo.* (p. 365, grifo do autor)

Como vemos, os termos criados por Lehmann (2017) *para as superfícies de revolução* não são apenas códigos e não se limitam aos aspectos intuitivos. Ao invés disso, o autor refere-se aos objetos de forma bem delimitada e formal. Entretanto, conforme já dito, Lehmann (2007) usa esses termos para superfícies que não são de revolução sem designar o sentido de tal uso.

No caso dos hiperboloides de uma folha, o registro “hiperboloide *elíptico* de uma folha”, de Leithold (1994, p. 889, grifo nosso), destaca uma elipse. Porém, como nessa superfície há infinitas interseções por planos que definem elipses, surge a seguinte questão: qual plano determina essa elipse? Mesmo com esses problemas, fazendo algumas delimitações pensamos que a ideia de destacar uma ou até infinitas elipses obtidas por interseções pode ser um recurso interessante para diferenciar os tipos de hiperboloides, os tipos de cones quádricos e os tipos de paraboloides elípticos no que tange a sua posição no sistema cartesiano.

Para os cones quádricos elípticos e paraboloides elípticos, conformem consta no Quadro 4, Anton (2002) faz uso dos termos *que se abre.*[13] Porém, o que significa isso? Eles recorrem apenas aos aspectos intuitivos? Sem uma delimitação formal esses termos podem apresentar problemas com relação à Função Referencial e, ainda, limitam-se a propor codificações. Mesmo assim, mediante algumas delimitações vislumbramos potencial nesses termos. Retomaremos os citados potenciais mais adiante.

Antes, recordamos que para o caso dos hiperboloides, cones quádricos elípticos e paraboloides elípticos padrão as interseções com planos paralelos (coincidentes ou

[13] Na Tese do primeiro autor deste artigo haverá uma discussão a respeito do uso dos termos *que se abre* para as cônicas.

distintos) a um dos planos coordenados, que consideramos como variáveis visuais, determinam infinitas elipses ou cônicas degeneradas (valores visuais). Genericamente, chamaremos de eixo α o eixo coordenado perpendicular a esses planos. Visualmente, para essas superfícies é significativo que os eixos maior e menor (ou diâmetro) dessas elipses aumentam de tamanho à medida que elas se afastam da origem seguindo na direção do eixo α. Para os paraboloides elípticos padrão essas elipses são determinadas apenas no sentido positivo do eixo α (indicaremos por α_+) ou apenas no sentido negativo do eixo α (indicaremos por α_-). O referido aumento dá a noção de que as elipses estão abrindo e, por isso, a elas usaremos os termos "elipses abrindo". Além disso, convencionaremos que ao dizermos "elipse perpendicular ao eixo α" queremos dizer que o plano que contém essa elipse é perpendicular a esse eixo.[14]

A partir da posição das elipses abrindo em relação aos eixos coordenados podemos reconhecer *as diferentes posições padrão* e, ainda, propor registros linguísticos conforme mostra quadro seguinte. Nele, perceba que estendemos o uso do termo *abrindo*, recorrente nas cônicas, para diferentes os tipos de quádricas. Note ainda que deixamos explícitas as articulações entre os registros em língua natural com as unidades simbólicas e as variáveis visuais tomadas.

Quadro 7 - Propostas de registros *básicos* em língua natural para os hiperboloides, cones e paraboloides elípticos padrão

Registros básicos em língua natural	**Variável visual**	**Unidade simbólica correspondente**
Hiperboloide de uma folha/duas folhas/cone quádrico elíptico *abrindo em* α.	"Elipses abrindo perpendiculares" ao eixo coordenado α.	A variável quadrática α^2 tem coeficiente com sinal diferente das outras duas variáveis quadráticas.
Paraboloide elíptico *abrindo em* α_+.	Elipses abrindo perpendiculares ao semieixo α_+.	A variável linear é α; as variáveis quadráticas têm coeficientes com sinal positivo.
Paraboloide elíptico *abrindo em* α_-.	Elipses abrindo perpendiculares ao semieixo α_-.	A variável linear é α_-; as variáveis quadráticas têm coeficientes com sinal negativo.

Fonte: Os autores

Na análise de nossas propostas inicialmente retomamos que um hiperboloide de uma folha/duas folhas/cones quádricos elípticos padrão pode estar em três posições diferentes no sistema cartesiano (*abrindo em* z, *em* y *ou em* x) e que conforme é essa posição há

[14] Podem-se obter elipses nas interseções dessas quádricas com planos *não* perpendiculares a um dos eixos coordenados. Porém, quando essas superfícies estiverem nas posições padrão ou transladadas usaremos os termos "elipses abrindo" apenas para as elipses determinadas nas interseções com planos que são perpendiculares a um dos eixos coordenados. Já para as posições rotacionadas usaremos os termos "elipses abrindo" apenas para as que são determinadas nas interseções com planos perpendiculares a um dos eixos de simetria dessas quádricas.

uma equação correspondente. Daí perceba que em nossas propostas essa relação biunívoca é mantida isso por que para cada uma dessas posições (ou equações) há um correspondente registro básico em língua natural. Para entender tal questão, basta constatar que no sistema cartesiano xyz as elipses abrindo podem ser perpendiculares ao eixo x, ou ao eixo y ou ao eixo z. Nesses casos, a unidade simbólica correspondente que permite tal identificação é o termo quadrático com sinal diferente. Essa, por sua vez, recorre a outras duas unidades significantes: que sinal é esse (positivo ou negativo)? Que variável quadrática é essa? Assim, nas posições padrão, nossas propostas contemplam os 3 tipos de hiperboloides de uma folha, os 3 tipos de hiperboloides de duas folhas e os 3 tipos de cones quádricos elípticos.

Para os paraboloides elípticos as elipses abrindo podem estar em 6 posições. No sistema cartesiano xyz tratam-se das elipses abrindo perpendiculares ao semieixo x_+, ou x_-, ou y_+, ou y_-, ou z_+ ou z_-. As unidades simbólicas correspondentes são a variável linear e o sinal dos coeficientes dos termos quadráticos. Quando esse sinal for positivo as elipses são perpendiculares ao semieixo α_+ e quando eles forem negativos elas são perpendiculares ao semieixo α_-. Assim, nas posições padrão, nossas propostas contemplam os 3 tipos de paraboloides elípticos abrindo em α_+ e os 3 tipos de paraboloides elípticos abrindo em α_-. Além disso, análogo ao que dissemos no parágrafo anterior a relação um para um é mantida (uma posição padrão – uma equação - um registro básico em língua natural).

As designações presentes em nossas propostas de registros em língua natural permitem expansões discursivas e conversões (em duplo sentido). Para isso, claro, é necessário termos certos conteúdos principalmente no que diz respeito a interseções com planos. Como exemplo de aplicação, considere a quádrica de equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. Nela, entre outras, podemos elaborar perguntas como as seguintes: que quádrica é essa (1)? Que eixo coordenado às elipses abrindo são perpendiculares (2)? Qual seu registro básico em língua natural dessa quádrica? Para discutir essas perguntas, inicialmente cabe identificarmos na equação as seguintes unidades significantes simbólicas: um dos membros da equação tem três termos quadráticos sendo dois com coeficientes positivos e um negativo; no outro membro temos apenas o número 1. Diante dessas unidades, temos um hiperboloide de uma folha padrão e assim respondemos a questão (1). Além disso, como z^2 é a variável quadrática que tem coeficiente com sinal diferente das outras duas variáveis quadráticas, então graficamente temos que as “elipses abrindo” dessa superfície são perpendiculares ao eixo z e, consequentemente, também sabemos que linguisticamente se trata de um *hiperboloide de uma folha abrindo em* z. Dessa forma, sem contar que identificamos a posição da quádrica no sistema cartesiano, respondemos questões (2) e (3). Outras possibilidades de questionamentos são os seguintes: qual a equação dos planos que determinam as elipses abrindo? Prove algebricamente que a interseção desses planos com a quádrica determinam elipses. Conforme já dissemos, as elipses abrindo são perpendiculares ao eixo z (ou paralelas ao plano xy), logo, os planos que as determinam também os são e, com isso, tratam-se dos planos de equação $z = k; k \in R$. Para realizarmos a solicitada prova primeiro substituímos a equação do plano na equação da quádrica e depois realizamos simplificações. Com isso, ficamos com a equação $\frac{x^2}{a^2\left(\frac{c^2+k^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(\frac{c^2+k^2}{c^2}\right)} = 1$ que de fato se refere a elipses, pois há as seguintes unidades significantes simbólicas nessa equação: um dos membros da equação tem dois termos quadráticos com coeficientes positivos; no outro membro temos apenas o número 1.

Registros em língua natural dos paraboloides hiperbólicos

Para os paraboloides hiperbólicos os registros que encontramos nos livros são mais problemáticos no que diz respeito à Função Referencial.

Ao tratar as quádricas Anton (2002, p. 239) propõe o “exercício 5” em que o objetivo é trabalhar a transformação do registro simbólico para o registro em língua natural. Parte do enunciado dessa questão diz o seguinte: “[...] identifique a superfície quádrica e dê uma descrição verbal de sua orientação [...]”. Como exemplo ainda na parte do enunciado, sem dizer qual é o correspondente registro simbólico, esse autor usa o seguinte registro em língua natural: “[...] paraboloide hiperbólico assentado no eixo y [...]”. Para o registro simbólico $y = \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2}$, Anton (2002, p. 574), sem expor explicações, dá como correspondente, na seção das respostas, o seguinte registro em língua natural: “paraboloide hiperbólico montado nos eixos x e z”. Nesses casos, os usos das descrições verbais são feitos de forma codificada e sem apresentar designações explícitas e delimitadas. Diante desses limites, para entendermos a associação entre as fórmulas e esses termos em língua natural nos resta fazermos algumas suposições.

Uma suposição é que Anton (2002) recorreu a possível associação entre o *objeto matemático* sela (paraboloide hiperbólico) com o *objeto real* sela de cavalo. Daí, suponha ainda que Anton (2002) considerou implicitamente as seguintes designações a respeito de "assentar": no objeto real assentar se refere, de alguma maneira, ao assento da sela do cavalo; no objeto ideal assentar se refere a obter uma parábola na interseção da quádrica com algum plano. Dessa forma, certamente fizeram-se associações entre parábola (objeto ideal) e o assento da sela de um cavalo (objeto real). Admitindo essas suposições, em "[...] paraboloide hiperbólico assentado no eixo y [...]", proposto por Anton (2002, p. 239), supostamente está implícito que se trata de uma sela tal que se obtém uma parábola abrindo em y na interseção dessa quádrica com um plano. Porém, temos os seguintes problemas com essas descrições e suposições: essa parábola está abrindo no sentido positivo ou negativo? Que plano foi usado nessa interseção? Sem essas duas delimitações e baseando-se apenas nas suposições que agora fizemos, com a descrição verbal desse autor não sabemos se ele se refere à sela de equação $y = \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}$ ou a de equação $y = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$ pois ambas possuem parábolas abrindo em y na interseção com um dos planos coordenados. Temos, portanto, problemas de referência.

Ainda recorrendo à comparação com o objeto real sela de cavalo, supomos que "montado nos eixos x e z" implica obter uma parábola na interseção com o plano xz. Nesse caso, há 4 selas (de equações $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$, $z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, $x = \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$ e $x = -\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$) que satisfazem o que procuramos. Novamente, há problemas de referência.

Outra suposição é que "paraboloide hiperbólico montado nos eixos x e z" queira dizer que a interseção da quádrica com o plano xz determina cônicas degeneradas (duas retas concorrentes). Assim, o problema da referência não unitária se repete, pois, há dois tipos de selas que tem esta característica ($y = \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}$ e $y = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$).

Os termos de Winterle (2000) e Lehmann (2007) também possuem problemas semelhantes.

Destacamos que em nossa compreensão epistemológica os objetos matemáticos, como um paraboloide hiperbólico, são objetos ideais e a sela de um cavalo é um objeto real. Com isso, este pode ser apenas uma representação daquele. Stewart (2010, p. 768, grifo nosso) se refere a essa relação da seguinte maneira "[...] o formato da superfície [do paraboloide hiperbólico] perto da origem se *assemelha* a uma sela." De maneira parecida, Lehmann (2007, p. 383, grifo nosso) escreve que "a superfície [do paraboloide] tem a forma de sela [...]".

Retornando as análises dos termos pesquisados, mesmo com os problemas citados, com algumas delimitações, nos apropriaremos da ideia de "assentar" aqui discutida. Para tanto, recordamos que as interseções dos paraboloides hiperbólicos padrão com os planos coordenados determinam os seguintes objetos: um par de retas concorrentes; duas parábolas abrindo no mesmo eixo coordenado, mas, em sentidos opostos. Chamaremos o eixo que essas parábolas estão abrindo de eixo α e, dessa forma, uma dessas parábolas está abrindo sentido positivo de α (semieixo α_+) e a outra no sentido negativo de α (semieixo α_-). Assim, adotamos as seguintes convenções:

- *Parábola assento*[15] ou simplesmente *assento* é a que está abrindo α_+;

- P*arábola estribo* ou simplesmente *estribo* é a que está abrindo α_-.[16]

Diante dessas convenções, no sistema cartesiano $\alpha\beta\gamma$, que já definimos no comentário anterior ao Quadro 6, considere o paraboloide hiperbólico padrão de equação $\alpha = \frac{\gamma^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2}$. Assim, propomos o "registro básico em língua natural" do quadro a seguir. Mais uma vez note que deixamos explícitas as articulações entre os registros em língua natural com as unidades simbólicas e as variáveis visuais tomadas. Conforme já dissemos, tal delimitação é fundamental para a aprendizagem na perspectiva da TRRS.

Quadro 8 - Proposta de registro *básico* em língua natural para os paraboloides hiperbólicos padrão

Registros básicos em língua natural	**Variáveis visuais**	**Unidades significantes simbólicas correspondentes**
Sela *com assento abrindo em α_+ e contido em β = 0.*	- A parábola assento está abrindo em α_+; - a parábola assento está contida no plano de equação $\beta = 0$. **Comentário:** Em decorrência da definição de parábola assento e estribo, temos as seguintes consequências imediatas determinadas por expansões discursivas: - A parábola estribo está abrindo em α_-; – a parábola estribo está contida no plano coordenado que é perpendicular ao plano de equação $\beta = 0$ (trata-se do plano coordenado de equação $\gamma = 0$).	- O termo linear é α; - o termo quadrático com coeficiente negativo é do tipo $(-\beta^2)$. **Comentário:** por expansões discursivas: - O termo quadrático com coeficiente positivo é do tipo γ^2.

Fonte: Os autores

[15] Em concordância com a concepção epistemológica que dissemos anteriormente, estamos concebendo que a parábolas assento e a parábola estribo são objetos ideais enquanto que o assento e os estribos (parte da sela do cavalo em que se colocam os pés) são objetos reais. Estes objetos reais são apenas representações daqueles objetos ideais.

[16] Pode-se obter parábolas nas interseções dos paraboloides hiperbólicos com planos que não são os coordenados. Porém, quando essas superfícies estiverem nas posições padrão usaremos os termos "parábolas assento e estribo" apenas para as parábolas determinadas nas interseções com os planos coordenados. Para as posições transladadas e rotacionadas diremos "parábolas assento e estribo" apenas para as que são determinadas nas interseções com os planos de simetria desses paraboloides.

No Quadro 8 para definirmos a parábola assento precisamos articular as seguintes variáveis visuais dessa cônica: em que semieixo positivo ele está abrindo (1)? Qual plano coordenado contém o assento (2)? No caso das selas padrão que estão no sistema cartesiano xyz, para a variável (1) tem os seguintes valores visuais: semieixo x_+; semieixo y_+; semieixo z_+. Já para a variável (2) tem os seguintes valores visuais: plano xy de equação $z = 0$; ou plano xz de equação $y = 0$; ou plano yz de equação $x = 0$. Articulando os valores de (1) e (2), temos as seguintes 6 possibilidades para a posição da parábola assento: abrindo em x_+ e contida em $z = 0$; abrindo em x_+ e contida em $y = 0$; abrindo em y_+ e contida em $z = 0$; abrindo em y_+ e contida em $x = 0$; abrindo em z_+ e contida em $x = 0$; abrindo em z_+ e contida em $y = 0$. As unidades simbólicas correspondentes a essas duas variáveis são, respectivamente, as seguintes: qual variável é linear? Qual termo quadrático tem coeficiente negativo? Com isso, cada uma dessas possibilidades se refere a uma das 6 quádricas padrão.

A seguir, tomaremos um exemplo de aplicação para um desses 6 casos. Porém, antes lembramos que pela designação que demos a parábola assento deve estar abrindo em um semieixo positivo e é determinada pela interseção da sela padrão com um dos planos coordenados. Já a parábola estribo deve estar abrindo no mesmo semieixo da parábola assento, mas, em sentido oposto, e deve ser determinada pela interseção com outro plano coordenado que contenha esse mesmo semieixo. Também sabemos que a interseção da sela com o terceiro plano coordenado é um par de retas concorrentes.

Dito isso, considere a quádrica de equação $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$. Nela, entre outras, podemos elaborar perguntas como as seguintes: que quádrica é essa (1)? Em que eixo coordenado às parábolas assento e estribo estão abrindo (2)? Quais as equações dos planos que contêm essas parábolas (3)? Qual o registro básico em língua natural dessa quádrica (4)? Para discutir essas perguntas, inicialmente cabe identificarmos na equação as seguintes unidades significantes simbólicas: um dos membros da equação tem dois termos quadráticos com sinais opostos; no outro membro temos uma variável linear com coeficiente 1. Diante dessas unidades, temos uma sela padrão e assim respondemos a questão (1). Para responder (2), note que a variável linear é z, logo, a parábola assento está abrindo em z_+ e a parábola estribo está abrindo em z_-. Para responder (3), note que o termo quadrático com coeficiente negativo (positivo) é tipo $-y^2$ (x^2), logo, o plano de equação $y = 0$ $(x = 0)$ contém a parábola assento (estribo). Com isso, trata-se de uma *sela com assento abrindo em* z_+ *e contida em* $y = 0$ (4). Outro caminho para resolver essas questões é proceder da seguinte maneira: determinar algebricamente a interseção da quádrica com os planos de equação $x = 0$ (plano yz), $y = 0$ (plano xz) e $z = 0$ (plano xy); verificar em qual desses casos determinamos as parábolas assento e estribo; analisar geometricamente os procedimentos utilizados. Note ainda que um dos frutos das questões que elencamos é permitir identificar a posição da quádrica no sistema cartesiano.

Considerações finais

Os termos que Leithold (1994), Winterle (2000), Anton (2002) e Lehmann (2007) usam para se referir as quádricas têm potencial para dizer algo dos objetos sob a forma de uma proposição matemática (*Função Apofântica*), para religar a outras proposições matemáticas de forma coerente (*Expansão Discursiva*) e realizar conversões, por isso, na perspectiva da TRRS, pensamos que eles podem trazer contribuições interessantes para a aprendizagem. Entretanto, por vezes nos deparamos com os seguintes problemas: a designação dos objetos não é consistente (*Função Referencial*) e geralmente não deixam explícitas correlações entre os registros em língua natural com unidades simbólicas e visuais; uso mais enfático apenas dos aspectos intuitivos; recurso de codificações em detrimento de conversões. Dessa forma, os aspectos semióticos e cognitivos podem ser comprometidos ou pouco explorados e, com isso, mesmo diante do citado potencial, podem surgir problemas na identificação dos objetos, além de comprometer os tratamentos, as conversões e as expansões discursivas que envolvam os registros em língua natural.

De qualquer forma, os termos pesquisados parecem recorrer, mesmo que nem sempre explicitamente, a algumas variáveis visuais e a propriedades globais das figuras.

Com nossas propostas nossa intensão é que os registros em língua natural contenham algumas e não todas as variáveis visuais do objeto. Do contrário, os registros seriam tediosos e nada práticos. Para tanto, nos focamos em escolher variáveis visuais que expõem propriedades globais da figura. Consequentemente, podem-se incluir outros elementos em nossa proposta ou, ainda, escolher outras variáveis diferentes das que escolhemos o que, inclusive, pode sugerir outros termos. Pensamos que estas escolhas dependerão dos interesses dos professores e dos alunos. Portanto, não pretendemos que nossos termos sejam absolutos e, assim, queremos apenas contribuir para o debate.

Como contribuição nossas propostas almejam as seguintes possibilidades: (1) criar designações linguísticas que não apresentem problemas de referência aos objetos e que possuam articulações explícitas entre os registros em língua natural com as unidades simbólicas e as variáveis visuais tomadas; (2) explorar linguisticamente todas as diferentes posições de uma quádrica no sistema cartesiano; (3) a partir dos registros em língua natural, explorar de maneira imediata ao menos uma propriedade global da figura e por Expansões Discursivas explorar outras propriedades; (4) realizar conversões entre os registros em língua natural, cartesiano e simbólico. Assim, pode-se dar mais destaque aos aspectos semióticos e cognitivos presentes nos registros em língua natural sem, com isso, fazer com que um termo linguístico tenha apenas a função de codificação. Com alguns ajustes, que alias são motivo de preocupação de uma Tese em desenvolvimento, também podemos estender tais propostas para as quádricas transladadas e rotacionadas.

Destacamos ainda que tendo como base o conhecimento de que eixo (ou semieixo) coordenado que as "elipses abrindo são perpendiculares" podemos diferenciar e reconhecer a posição da correspondente quádrica no sistema cartesiano. De forma análoga ocorre com a parábola assento nos paraboloides hiperbólicos.

Lembramos ainda que para a TRRS a aprendizagem integrativa não se limita a apenas o estudo dos registros em língua natural e, por isso, a apropriação apenas desses termos não é o suficiente para esse tipo de aprendizagem. Além disso, o entendimento desses termos necessita que se tenham noções básicas a respeito das quádricas.

Referências

ANTON, Howard. **Cálculo: um novo horizonte**. v. 2. 6. Ed. Porto Alegre: Bookman, 2002. 552 p. Tradução: Cyro de Carvalho Patarra; Márcia Tamanaha.

BRANDT, Célia Finck; MORETTI, Méricles Thadeu; BASSOI, Tânia Stella. Estudo das funções do discurso na resolução de problemas matemáticos. **Educação Matemática Pesquisa,** São Paulo, v. 16, n. 2, p.479-503, 2014.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Bertrand, 1951.

CORRÊA, Madeline Odete Silva; MORETTI, Méricles Thadeu. Esboçando curvas de funções a partir de suas propriedades figurais: uma análise sob a perspectiva dos registros. In: BRANDT, Célia Finck; MORETTI, Méricles Thadeu. (Orgs). **As contribuições da Teoria dos Registros de Representações Semióticas para o Ensino e a Aprendizagem na Educação Matemática**. Ijuí: Ed. Unijuí, 2014.

DIONIZIO, Fátima Aparecida Queiroz; BRANDT, Célia Finck; MORETTI, Méricles Thadeu. Emprego das Funções Discursivas da Linguagem na Compreensão de Erros de

Alunos em uma Atividade que Envolve Noções de Trigonometria. **Perspectivas da Educação Matemática,** UFMS, v. 7, p.513-553, 2014. Número temático. Disponível em: <http://www.edumat.ufms.br/>. Acesso em: 11 out. 2014.

DIONIZIO, Fátima Aparecida Queiroz; BRANDT, Célia Finck. Conhecimentos docentes: uma análise dos discursos de professores que ensinam matemática. In: BRANDT, Célia Finck; MORETTI, Méricles Thadeu. (Orgs). **As contribuições da Teoria dos Registros de Representações Semióticas para o Ensino e a Aprendizagem na Educação Matemática**. Ijuí: Ed. Unijuí, 2014.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticos e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. P. 11- 33. In: Machado, Silvia D. A. (Orgs). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. Campinas: Papirus. 2003.

______. **Semiosis y pensamiento humano:** registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Santiago de Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática, 2004. 328 p. Tradução de: Myriam Vega Restrepo.

______. **Semiósis e pensamento humano:** registros semióticos e aprendizagens intelectuais (fascículo I). São Paulo: Livraria da Física, 2009. 120 p. (Coleção contextos da ciência). Tradução de: Lênio Fernandes Levy; Marisa Rosâni Abreu da Silveira.

______. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. **REVEMAT**, Florianópolis, v.6, n.2, p.91-112, 2011a. Tradução Méricles Thadeu Moretti. Disponível em: http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat. Acesso em: 20 ago. 2013.

______. **Ver e ensinar a matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. São Paulo: PROEM, 2011b. 160 p. Tradução: Marlene Alves Dias.

LEHMANN, Charles H.. **Geometria analítica.** 8. ed. 1. imp. São Paulo: Globo, 2007. Tradução de: Ruy Pinto da Silva Sieczkowski.

LEITHOLD, Louis. **O cálculo com geometria analítica.** 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994. Tradução de: Cyro de Carvalho Patarra. Revisão técnica de: Wilson Castro Ferreira Júnior e Sílvia Pregnolatto.

STEWART, James. **Cálculo**. v. 2**.** 2. ed. 5 imp. São Paulo: Cengage Learning, 2010. 541 p. Tradução: Antonio Carlos Moretti; Antonio Carlos Gilli Martins. Revisão técnica: Helena Maria Ávila de Castro.

WINTERLE, Paulo. **Vetores e geometria analítica.** São Paulo: Pearson Makron Books, 2000. 232 p.

Texto recebido: 18/10/2017

Texto aprovado: 17/11/2017