EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2

http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i2p369-390

Resolução de Problemas, segundo Pólya, para o ensino de probabilidade usando jogos de loteria

Problem solving, According to Pólya, for the Probability Teaching, using lottery games

---

RAIMUNDO LUNA NERES[1]

VENÂNCIO BARROS COSTA[2]

Resumo

Neste artigo, apresentamos uma pesquisa realizada com alunos do segundo ano do ensino médio das escolas públicas de Centro Novo do Maranhão. O objetivo foi investigar a aprendizagem de probabilidade através de jogos de loteria com base em Resolução de Problemas, segundo George Pólya. Trata-se de um estudo de natureza qualitativa. Os dados foram coletados por meio de observações e mediações em atividades aplicadas aos alunos envolvendo conteúdos de probabilidade. Os resultados revelam que os estudantes apresentaram bom desempenho na resolução dos problemas propostos, assim como em relação à compreensão dos conteúdos discutidos em sala de aula. Isso nos enseja concluir que essa metodologia de ensino, baseada em Pólya, favorece a apropriação de conceitos matemáticos e desempenha um papel importante nos processos de aprendizagem.

Palavras-chave: *Resolução de Problemas, Ensino de Probabilidade, Jogos de Loteria.*

Abstract

In this article, we present a research carried out with among second year high school students from the public schools of Centro Novo do Maranhão. The goal was to investigate probability learning through lotto games based on Problem Solving, according to George Pólya. It is a qualitative study and the data were collected through observations and mediations in activities applied to students involving probability contents. The results show that the students presented good performance in solving the proposed problems, as well as in relation to the understanding of the contents discussed in the classroom. This leads us to conclude that this teaching methodology, based on Pólya, favors the appropriation of mathematical concepts and plays an important role in the learning processes.

Keywords: *Resolution of Problems, Teaching of Probability, Lottery Games.*

[1]Doutor: Universidade Federal do Maranhão – UFMA e Universidade CEUMA – UNICEUMA; Coordenação do Curso de Engenharia Elétrica –raimundolunaneres@gmail.com e luna.neres@ceuma.br

[2] Mestre em Matemática – PROFMAT/UFMA; Prof. da Rede Estadual de Ensino do Maranhão; venanciobc@hotmail.com .

Introdução

Revelamos neste trabalho parte da pesquisa realizada no primeiro semestre de 2015 para conclusão da dissertação de Mestrado Profissional em Matemática do segundo autor do referido artigo[3] e coordenado pelo primeiro autor, prof. Colaborador do Programa em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal do Maranhão – UFMA.

Durante muitos séculos matemáticos como Cardano e Fermat, tentaram compreender os problemas que ocorriam de maneira aleatória na natureza, haja vista que, em suas investigações em relação aos resultados obtidos desses problemas, observavam que, em geral, não dependeriam da intervenção humana, (LOPES; MEIRELLES, 2005, p.1).

Como normalmente os fenômenos aleatórios acontecem de maneira espontânea, é possível serem feitas associações entre os fenômenos aleatórios e a ocorrência destes, por meio da probabilidade, sem que se possa estabelecer uma ordem para essas ocorrências. Inicialmente essas associações foram utilizadas apenas com jogos de azar, Lopes (2008, p.60), contudo, com o passar do tempo e aprofundamento de estudo, a probabilidade passou a ser mais um importante instrumento de desenvolvimento científico.

A probabilidade é uma ferramenta essencial para o desenvolvimento e compreensão de determinados fenômenos presentes no mundo atual, e é importante não apenas na sua conceituação formal, mas também na sua aplicabilidade como Ciência. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio - PCNEM's (BRASIL, 1998, p. 45) "ao ensinar estatística o professor(a) precisa fazer uma abordagem dos conteúdos de contagem, análise combinatória e probabilidade", pois ajuda e facilita a análise e interpretação de dados e processamento de informações relacionadas às demais Ciências. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN's (BRASIL, 2002, p.126) "o estudo da probabilidade desenvolve no estudante formas particulares de pensamentos e raciocínios", envolvendo fenômenos aleatórios e certas atitudes que possibilitam o posicionamento crítico, ao fazer previsões e a tomada decisão. As Orientações Curriculares para o Ensino Médio - OCEM's (BRASIL, 2006, p.83-85) "recomendam que os conteúdos do bloco Análise de dados, Probabilidade, Combinatória e Estatística

[3] Dissertação de Mestrado em Matemática, do programa PROFMAT – UFMA, em rede nacional. Título: ENSINO – APRENDIZAGEM DE PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO: uma experiência usando jogos de loterias.

se façam presentes na Educação Básica, sobretudo no Ensino Médio". Pois facilitam ao aluno conhecer os fenômenos aleatórios presentes nos dias atuais.

Dessa forma, o estudo e a aplicação da probabilidade são muito úteis na sociedade atual, devido à necessidade que os indivíduos têm em compreender as informações veiculadas e fazer previsões que influenciarão suas vidas em comunidade. Baseados nesse contexto, podemos conjecturar que o ensino de Estatística na Educação Básica é importantíssimo e se constitui em um poderoso instrumento social, na medida em que poderá permitir ao discente melhor compreensão das estatísticas oficiais, tornando-o capacitado a exercer mais conscientemente sua cidadania.

No entanto, observamos que, no município de Centro Novo do Maranhão[4], na maioria das salas de aulas do Ensino Médio, o ensino de Estatística vem - se concentrando apenas na componente curricular: Princípio Fundamental da Contagem. Por outro lado, Estatística nas escolas públicas do Maranhão faz parte do conteúdo de Matemática, e, em geral, é ensinada, quando "sobra tempo", no final do segundo semestre letivo. Baseados nessa premissa é que consideramos o nosso trabalho relevante, pois entendemos que só essa componente curricular não atende às orientações dos PCN's. Dessa forma, propomos também trabalhar o conteúdo de probabilidade, por entender que a resolução de atividades, envolvendo dados probabilísticos e usando-se jogos de loteria, poderá ser essencial para a construção do saber escolar do aluno.

A resolução de problemas, segundo Allevato e Vieira (2016, p.114), "não é implementada assim tão facilmente com respostas imediatas na aprendizagem dos alunos", como também não deve ser desenvolvida de forma isolada. Da mesma forma, também não é fácil resolver com aporte em Pólya, embora algumas resoluções sejam tarefas corriqueiras do dia a dia do professor de Matemática.

Dessa forma, aplicamos uma metodologia de ensino e aprendizagem, usando *jogos de loteria*, com o objetivo de verificar a aquisição e evolução da aprendizagem dos alunos do 2º ano do ensino médio.

[4] Essa cidade fica localizada na hinterlândia do Estado do Maranhão, de difícil acesso – dentro de uma reserva indígena – fronteira com o Estado do Pará – Brasil.

Dividimos nosso trabalho em tópicos para facilitar a leitura e a compreensão do leitor que se disponibilizar a lê-lo.

Revisitando os fundamentos teóricos

O elemento sorte sempre tem estado presente na vida humana; nas Ciências recebe o nome de acaso e em algumas religiões é denominado de providência divina. É possível que o momento em que o homem mais confia na sorte seja na hora em que realiza um jogo de azar. O jogo de azar pode ser considerado como uma ação inerente ao homem, haja vista que

> É uma atividade ou ocupação voluntária, exercida dentro de certos e determinados limites de tempo e de espaço, segundo regras livremente consentidas, mas absolutamente obrigatórias, dotado de um fim em si mesmo, acompanhado de um sentimento de tensão e de alegria e de uma consciência de ser diferente da vida cotidiana (HUIZINGA, 2000, p. 43).

É possível que os jogos de azar, em geral conhecidos, possam influenciar muitos apostadores e viciados, seja para ganhar dinheiro seja por prazer, eles sempre vem atraindo muita gente, dado observado em nosso município. Talvez por isso seja um dos principais motivos de estudo de muitos matemáticos. Os jogos de azar sempre foram admirados por muitos seres humanos. Segundo Fraga (2013, p. 11) "os primeiros registros feitos pelos egípcios e romanos já foram em forma de sorteios". Ao se lançar a sorte sobre um jogo, as pessoas acreditavam que poderiam obter um resultado favorável e, assim, adquirir bens de maneira fácil e rápida. Esse fenômeno psicossocial despertou interesse de estudos de grandes matemáticos à época, tais como Cardano, Fermat, Tartaglia e Pascal.

A vida cotidiana está repleta de situações e circunstâncias em que algumas pessoas julgam ter sorte em jogos de azar, dentre eles os jogos de loteria, e isto independe do conhecimento matemático que possam possuir. Apesar da sorte ou azar ser uma concepção meramente aleatória, a teoria da probabilidade poderá ajudar a explicar matematicamente tais situações. De acordo com (FRAGA, 2013, p.11), a primeira loteria no Brasil surgiu em 1784, em Vila Rica (atual Ouro Preto), com o objetivo de arrecadar fundos para construção de prédios públicos. Em 1962, o Governo federal decidiu que as loterias deveriam ser exploradas pelo Poder público; foi então criada a Loteria Federal do Brasil. Em 1970 foi criada a Loteria Esportiva e, em 1979, foi autorizada a criação da Loto. A partir de então, várias loterias foram criados no Brasil, algumas com sucesso, outras nem tanto, como foi a Trinca, que iniciou suas apostas em 1997 e deixou de existir três anos depois.

No desenvolvimento das nossas atividades de ensino de probabilidades, usando jogos de loteria, além de George Pólya, também apoiamo-nos em outros teóricos, a exemplo de Borin (2004), Dante (2013), Fraga (2013), Echeverría e Pozo (1998).

Pólya (1887-1985) foi o primeiro matemático a apresentar uma heurística, um método que se baseia em etapas para resolver um problema matemático. Ele é uma referência no assunto, pois suas ideias representam inovações em relação a essa proposição, sendo muitas delas aceitas até os dias atuais, servindo de alicerce para pesquisas desenvolvidas com a utilização dessa metodologia. Dividiu seu plano de ação em etapas, expondo passo a passo como deveremos prosseguir para resolver um problema, concretizar a resposta e verificar o resultado. As etapas definidas por Polya foram:

> 1ª - Compreensão do Problema -. O primeiro passo é entender o enunciado e para isso é importante fazer perguntas, pois a resposta para essas perguntas pode ser o meio para esse fim. Perguntas como: qual é a incógnita? Ou seja, o que se quer resolver? O que deve ser calculado? Quais são os dados? Qual é a condicionante? Ou seja, quais são as condições que possuímos e que podemos usar. É possível satisfazer as condições? Elas são suficientes ou não para determinar a incógnita? Existem condições redundantes ou contraditórias? Faça uma figura. Introduza notação adequada. Separe as condições em partes. Estas perguntas são necessárias para a compreensão das informações contidas no enunciado.
>
> 2ª - Fazer a relação entre os dados e a incógnita. Nesta etapa, é importante fazer as seguintes perguntas. Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado de uma forma um pouco diferente? Neste momento devemos buscar uma relação entre o que você está se propondo resolver e algum outro correlato já resolvido, e que possa servir de orientação para a construção da sua solução. Conhece algum problema correlato? Caso você encontre um semelhante ao seu e que você sabe resolver, tente aproveitá-lo analisando os caminhos percorridos até a sua solução e verificando as adaptações necessárias para fazer o seu. Considere a incógnita? Caso não exista nenhuma atividade parecida, divida o que você está trabalhando em partes, fazendo a conexão entre a incógnita e os dados correspondentes, inclusive criando incógnitas auxiliares para cada parte (PÓLYA, 2006, p. 4-7).

Se após essas duas etapas não encontrarmos uma forma de resolver um problema dado, precisamos reformular nossas hipóteses e buscar outra maneira de resolvê-lo. Caso ainda não consigamos encontrar uma solução, deveremos imaginar outro correlato mais acessível, mais simples e mais específico, e, se mesmo assim, após essas considerações, perdurarem as dificuldade de encontrar uma resolução, ele definiu a 3ª etapa, que consiste em rever todas as decisões tomadas e elaborar nova estratégia. Consumada a resolução, também propõe a 4ª etapa. Nela sugere a revisão da resolução construída, na qual se deverá perguntar: é possível verificar-se o resultado? Se for possível, deve-se questionar. A resolução encontrada satisfaz o enunciado proposto? É possível obter a resposta de outra maneira? Isso é importante para se ter certeza de que a resolução encontrada satisfaz as hipótese do problema em estudo. Essa etapa, segundo Pólya (2006), é a mais importante, pois propicia uma depuração e uma abstração da resolução apresentada. O objetivo da depuração é verificar a,

> Argumentação usada, procurando simplificá-la, pode-se chegar ao extremo de buscar outras maneiras de resolver uma atividade, possivelmente mais simples, mas menos intuitivas e só agora acessíveis ao resolvedor. Há uma crítica generalizada aos matemáticos pesquisadores por publicarem demonstrações artificiais ou abstratas e que certamente não representam a maneira como o resultado em demonstração foi descoberto. Contudo, é inegável que a revisão de depuração é muito proveitosa (PÓLYA, 2006, p.4).

A abstração tem como objetivo refletir sobre o processo de resolução procurando-se descobrir, segundo Pólya (2006, p.7), “a essência do problema e do método de resolução empregado”. Tendo-se sucesso nessa empreitada, poder-se-ão resolver outros mais gerais ou de aparência bastante diferente, pois ela representa, em tese, o que ele denominou de o “poder de fogo” do resolvedor.

Um grupo de professores denominado Grupo Fedathi, tendo como seu principal articulador o professor e pesquisador Hermínio Borges, vem trabalhando com resolução de problemas, baseado na Teoria de Pólya. A proposta teórica – metodológica desse grupo objetiva abordar uma situação de ensino, considerando-se as fases do trabalho vivenciadas pelos professores no desenvolvimento de suas atividades de ensino, experiências e produções técnicas em sala de aula. Nossa proposta de ensino é bastante similar à desse grupo de estudos, quanto ao desenvolvimento de atividades e produções dos alunos nas resoluções de atividades matemáticas.

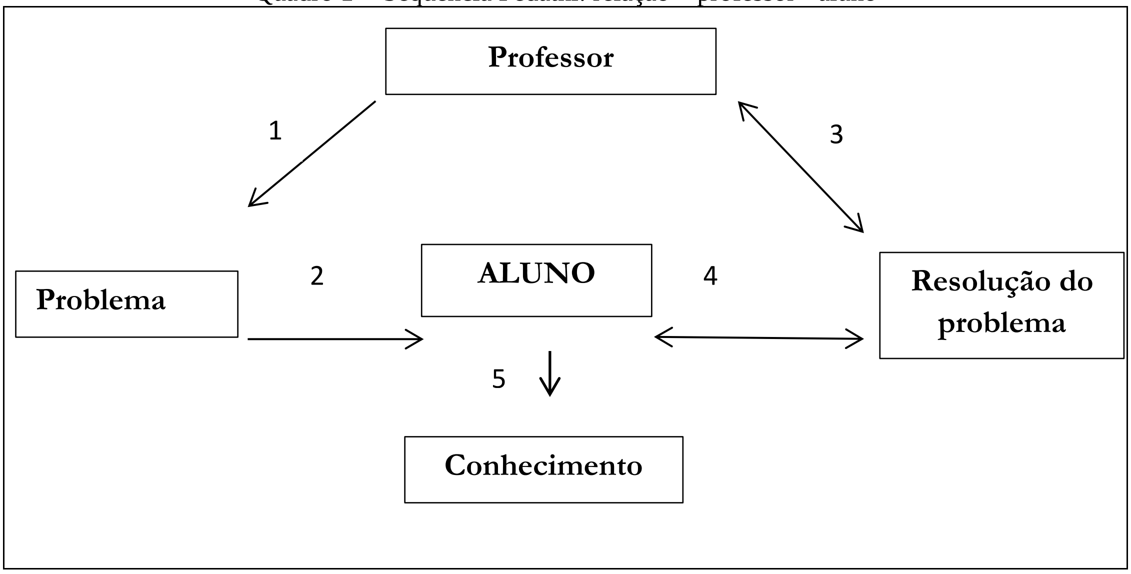
Para Borges Neto & Dias (2001), O discente reproduz ativamente os estágios que a Humanidade percorreu para compreender os ensinamentos matemáticos, sem que, para isso, necessite dos mesmos milênios que a História consumiu para chegar ao momento atual. Por outro lado, a importância do ambiente em sala de aula

> Se dá pelo fato de proporcionar aos discentes a construção dos conceitos de forma clara, através da resolução de problemas, onde suas produções serão objetos sobre o qual o professor vai tomar como base para fazer a mediação a

> fim de levá-lo a construir um novo conhecimento (BORGES NETO; DIAS, 2001, p. 17).

Nesse processo cumpre serem consideradas as experiências vivenciadas pelos alunos, pois poderá ser que o conhecimento trazido do meio social, em que vivem, bem como o conhecimento adquirido anteriormente em outras atividades escolares, deverá ser o ponto de partida para ajudar nas situações de ensino promovidas pelo professor. A inclusão da realidade social e do repertório do aluno, em geral, poderá motivar e facilitar o acesso aos conhecimentos acumulados por ele, além disso favorecerá a construção de novos saberes. Assim sendo, apresentamos, no quadro 1, uma síntese entre o professor, o aluno e o saber na construção de um conhecimento consoante a Sequência Fedathi.

Quadro 1 - Sequência Fedathi: relação – professor - aluno



Fonte: Adaptação (BORGES, 2201, p.18), (2015).

Para esse Grupo, o ensino começa com o Professor que ministrará a aula e, depois, deverá selecionar um problema de acordo com o conteúdo que pretende ensinar, podendo também ter uma situação apresentado pelo aluno (1); em seguida o docente deverá apresentar

> O enunciado da atividade para a classe através de uma linguagem adequada (2); depois os alunos irão explorá-lo na busca de uma solução (3); a solução encontrada será analisada pelo professor junto aos discentes (4). Os passos 3 e 4 acontecerão alternadamente até que se chegue a construção do conhecimento (5). Esse momento corresponde à mediação entre o professor-aluno-saber (BORGES NETO; DIAS, 2001, p.18).

Por outro lado, em 1998, os PCN's elegeram a resolução de problemas como metodologia de ensino da Matemática. E, em relação ao nosso objeto de pesquisa, ensinar *probabilidade*, através de jogos de loteria, foi em função de que, em geral, as pessoas acreditam que, apostando em jogos de azar, possam ser premiadas, sem que conheçam suas chances probabilística de acertos. No entanto, segundo os PCN's, o pensar e o fazer mobilizam e se desenvolvem

> Quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. O tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, perseverar na busca da solução; e, para isso, os desafios devem ser reais (BRASIL, 1998, p. 98).

Dessa forma, acreditamos que a resolução de problemas probabilísticos, envolvendo jogos lotéricos, revela-se uma ferramenta epistemológica importante para a construção do saber além de possibilitar o desenvolvimento cognitivo.

Van de Walle (2009) afirma que a resolução de atividades matemáticas é um veículo poderoso e eficaz para a aprendizagem. Os conceitos e os procedimentos matemáticos, em sua maioria – senão todos –, podem ser mais bem ensinados por meio da resolução de problemas. Para ele

> Os estudantes devem resolver suas questões matemáticas não apenas para aplica-la, mas para aprender nova matemática. Quando os alunos se ocupam de tarefas bem escolhidas baseadas na resolução de problemas e se concentram nos métodos de resolução, o que resulta são novas compreensões da matemática embutida na tarefa (VAN DE WALLE, 2009, p. 57).

"Quando os estudantes descrevem e avaliam as resoluções para as tarefas [...] compartilham abordagens e fazem conjecturas [...] começam a ser autores de ideias e a desenvolver uma sensação de poder dar significado às ideias matemáticas", Van de Walle (2009, p. 74).

A resolução de tarefas matemáticas e o jogo possuem algumas semelhanças que os aproximam enquanto estratégias de ensino. Para Moura (1994) a primeira semelhança seria encontrada no sujeito que executa a ação e a segunda estaria nas fases como eles se desenvolvem. Também existem semelhanças entre resolver uma atividade matemática e o ato de jogar; elas são bastante claras quando comparadas com as etapas de resolução propostas por Pólya. Pois um jogo pode ser

> Um conteúdo assumido com a finalidade de desenvolvimento de habilidades, possibilitando ao aluno a oportunidade de estabelecer planos de ação para

> atingir determinados objetivos, a executar jogadas segundo este plano e a avaliar a eficácia destas jogadas nos resultados. Desta maneira, o jogo aproxima-se da Matemática via desenvolvimento de habilidades para trabalhar com a matemática (MOURA, 1994, p. 21).

Borin (2004), afirma que a atividade de jogar desempenha papel importante no desenvolvimento de habilidades de raciocínio lógico, dedutivo e indutivo; da linguagem; da criatividade; da atenção e da concentração; essenciais para a construção da aprendizagem Matemática. Durante um jogo, o aluno passa a ser um elemento ativo do seu processo de aprendizagem, vivenciando a construção do seu saber e deixando de ser um ouvinte passivo. E, segundo Lopes (2005), pode ser considerado como um princípio norteador da aprendizagem da Matemática. Em sala de aula, o docente desempenha um papel importante, principalmente incentivando os alunos a pensar e descobrir estratégias, em vez de ensejar-lhes logo a resolução. Para Nobre, Amado e Ponte (2015, p. 85), "é a partir do desenvolvimento de novas estratégias, de apresentação e de resolução de problemas, que a discussão de novas ideias pode surgir, revelando-se fundamental nos processos de aprendizagem".

Para Echeverría e Pozo (1998), nas diversas etapas da Educação Básica, além da necessidade que os alunos têm de adquirir novos conhecimentos, possuem, também, interesse em obter habilidades e estratégias que lhes permitam aprender por si mesmos, outros saberes.

Ao trabalharmos com problemas probabilísticos faz-se necessário um conhecimento mínimo de probabilidade, dado que existem experimentos que, repetidos em condições fixadas, não produzem sempre o mesmo resultado. Esses experimentos são chamados de aleatórios ou não determinísticos e são objetos de estudo da teoria da probabilidade.

De acordo com Hoel et al. (1978), inicialmente poderemos admitir como impossível fazer qualquer afirmação exata sobre os experimentos aleatórios. Entretanto, poderemos observar que muitos deles exibem uma regularidade estatística. Por exemplo, considerando-se o lançamento individual de uma moeda. Para qualquer lançamento individual não poderemos fazer previsão certa, mas as observações apontarão que, para um grande número de lançamentos, a proporção de caras parece oscilar em torno de algum número fixo p entre 0 e 1, sendo p muito próximo de $1/2$ se a moeda for equilibrada.

Um Experimento aleatório é um experimento ε**,** em que, antes de ser executado, não se poderá prever com certeza que esse particular resultado ocorrerá. Por exemplo, o experimento ε**:** Lançamento de uma moeda honesta duas vezes e anota-se a face voltada para cima. Para esse experimento temos o seguinte espaço amostral associado:
$\Omega = \{(cara, coroa), (coroa, cara), (cara, cara), (coroa, coroa)\}$. Neste caso, o espaço amostral é simples e dado por "cara" ou "coroa". Um espaço amostral é o conjunto Ω de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Ω pode ser finito, infinito enumerável ou infinito não-enumerável.

No caso discreto e finito, em que, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$. Se cada ponto amostral $\omega_i \in \Omega$, for igualmente provável, então $\{\omega_i\}$ é chamado de *evento simples*, para todo $i = 1, 2, \dots, k$.

Um evento é qualquer subconjunto do espaço amostral Ω. Quando o espaço amostral Ω contiver *k* elementos, então, teremos 2^k eventos associados a Ω. Se tomarmos Ω como um espaço amostral com *n* eventos simples, igualmente possíveis. E sendo *A* um evento de Ω. Então a probabilidade de *A,* denotada por *P(A)*, é definida por: $P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega}$, em que: n_A = nº de elementos de *A* ou nº de casos favoráveis a ocorrência de *A;* $n_\Omega = n$ = nº de elementos de Ω ou nº total de eventos simples associados a Ω. Uma probabilidade $P(\cdot)$, como foi definida, satisfaz os seguintes axiomas:

(i) $0 \le P(A) \le 1$*;*

(ii) *P(*Ω*) = 1;*

E propriedades:

a) Para cada sequência de eventos $A_1, A_2, \dots, A_n$ mutuamente excludentes ($A_i \cap A_j = \phi$, quando $i \neq j$) ;

(b) $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$.

É importante observar-se que $P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega}$ é apenas uma consequência da suposição de que todos os resultados sejam igualmente prováveis, e ela é aplicada apenas quando essa suposição for atendida.

Como em nosso objeto de pesquisa utilizamos análise combinatória, fazemos aqui também algumas considerações sobre combinações. Ou seja: o número total de combinações de *r* objetos escolhidos dentre *n* é denotado por $\binom{n}{r}$ ou C_n^r, sendo que, $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

O número $\binom{n}{r}$, também chamado de coeficiente binomial, é igual à quantidade de subconjuntos de *r* elementos de um conjunto com *n* elementos. E valem as propriedades dos coeficientes binomiais:

(a) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$; e *(b)* $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$.

Com essas considerações e propriedades apresentadas acreditamos ser possível ter-se um bom entendimento do ensino e aprendizagem de probabilidade através da aplicação de jogos de loterias.

Caminho metodológico: desenvolvimento em sala de aula

Inicialmente, foram ministradas algumas aulas nas quais discutimos os conceitos de análise combinatória e de probabilidade, de acordo com o livro de (GIOVANNI; BONJORO, 1992) adotado na escola campo de obtenção do corpus da pesquisa, e resolvemos atividades baseando-nos na teoria de Pólya (1887-1985).

Normalmente, nesse tipo de pesquisa procurar-se-á interpretar os dados observados através das descrições dos sujeitos. Como se trata de uma pesquisa participativa os sujeitos podem, portanto, direcionar como proceder suas falas com o pesquisador. Segundo Goldenberg (2007, p. 17), “para que isso se efetive é necessária uma interlocução do pesquisador com o objeto de estudo, com os participantes e com as situações em estudo”.

Para a coleta de dados, utilizamos os instrumentos: a) a observação participante que, segundo Fiorentini e Lorenzato (2009, p.18), “é realizada junto aos comportamentos naturais dos sujeitos, quando estes estão conversando, ouvindo, trabalhando etc.”; e b) a análise documental, para (HELDER, 2006, p.1), “é realizada com documentos originais escritos”, aqueles que ainda não tiveram tratamento analítico ou de outra natureza. Com relação à observação participante, foi realizada através das mediações dos pesquisadores com os sujeitos da pesquisa, quando da resolução dos problemas propostos e quanto à análise documental, foi realizada nas resoluções escritas apresentados pelos alunos.

A pesquisa foi desenvolvida em duas turmas de 2ª série do ensino médio, sendo uma no turno matutino, com 36 alunos, e outra no turno vespertino, com 32 da escola CE Mª do Socorro Almeida Ribeiro, situada na sede do município de Sítio Novo do Maranhão. Aplicamos inicialmente um questionário às duas classes para verificar o que os alunos já conheciam sobre o objeto da pesquisa.

Para este artigo, apresentamos apenas o resultado desenvolvido em duas turmas, matutino e vespertino, nas quais ministramos três aulas de 50 minutos cada uma, depois em outra aula aplicamos uma atividade que constava de dois problemas de probabilidade envolvendo jogos de loterias para os alunos resolverem segundo os passos elaborados por Pólya. Todos os discentes dessas classes participaram das aulas e da atividade aplicada.

O primeiro problema não é exatamente de Loteria da Caixa: foi criado pelo pesquisador e elaborado com a finalidade de dar suporte quando for resolver um baseado na Loteria da Lotofácil.

Para a resolução, fizemos uma intervenção, chamando-lhes a atenção. Precisavam dos conhecimento de combinatória discutidos em sala de aula, pois nesses tipos de situações com jogos de loteria, tanto o espaço amostral quanto os eventos calculam-se de maneira mais eficaz e menos trabalhosa, utilizando-se as combinações, visto que são números combinados numa determinada quantidade em um bilhete. Tiramos dúvidas sobre como traçar o plano de ação, utilizando análise combinatória e a metodologia de resolução usando jogos de loterias seguindo as etapas sugeridas por Pólya (1887-1985).

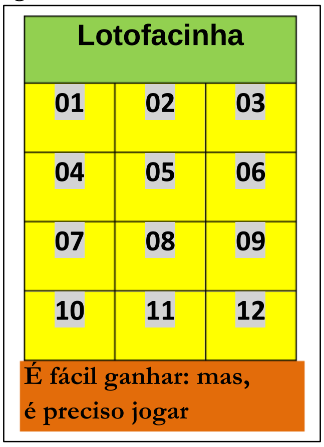
Para analisarmos o desempenho dos alunos, quanto à aprendizagem, utilizamos o score de notas definido pela escola, qual seja: rendimento em todas as atividades avaliativas maior ou igual a sete, é considerado bom rendimento, caso contrário insatisfatório.

Análise dos dados: apresentação e execução

Inicialmente, enfatizamos que o ensino de Matemática, usando-se a metodologia de Resolução de Problemas, segundo relato dos professores da escola pesquisada, não é uma prática comum entre eles. Quando indagados, responderam que não tinham conhecimento aprofundado dessa Teoria, por isso não a utilizavam como metodologia de ensino. Esse fato veio fortalecer nossa investigação. Em contextos de ensino e aprendizagem, investigar em sala de aula não significará necessariamente trabalhar com atividades que estejam no limite do conhecimento do aluno; segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2015, p.9) “significa, pelo contrário, trabalhar com questões que nos interpelam e que se apresentam no início de modo confuso, mas que procuramos clarificar e estudar de modo organizado”. Investigar, em geral é uma ferramenta grandiosa de se agregar conhecimento. Apresentamos duas atividades e algumas resoluções construídas pelos alunos, como forma de exemplificar as demais.

1) Um bilhete de apostas de uma loteria tem 12 números, conforme a Figura 1. O apostador poderá marcar de 8 a 10 dezenas e ganhará o prêmio máximo aquele que acertar 8 dezenas. Qual a probabilidade de ganhar o prêmio máximo, marcando num bilhete: a) Exatamente 8 dezenas? b) marcando 10 dezenas?

Figura 1- Bilhete de uma loteria

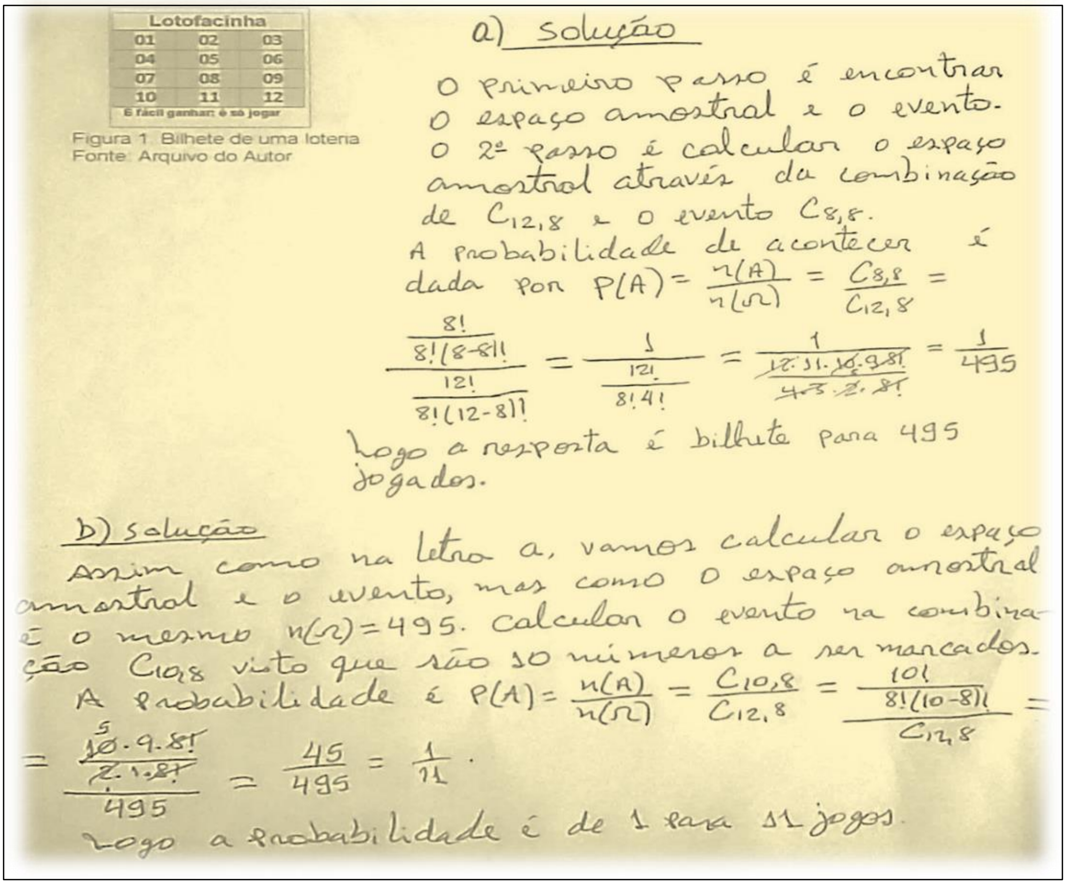


Fonte: Arquivo dos autores (2015)

A seguir apresentamos a resolução dos alunos: Gabriel, Josberto e Karen[5], figura 2.

[5] Esses nomes de alunos são fictícios

Figura 2 - Resolução construída pelo alunos Gabriel, Josberto e Karen[6]



Lotofacinha		
01	02	03
04	05	06
07	08	09
10	11	12
6 fácil ganhar: é só jogar		

Figura 1 Bilhete de uma loteria
Fonte: Arquivo do Autor

a) solução

O primeiro passo é encontrar o espaço amostral e o evento.
O 2º passo é calcular o espaço amostral através da combinação de $C_{12,8}$ e o evento $C_{8,8}$.
A probabilidade de acontecer é dada por $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_{8,8}}{C_{12,8}} =$

$$\frac{\frac{8!}{8!(8-8)!}}{\frac{12!}{8!(12-8)!}} = \frac{1}{\frac{12!}{8!4!}} = \frac{1}{\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8!}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 8!}} = \frac{1}{495}$$

Logo a resposta é bilhete para 495 jogados.

b) solução

Assim como na letra a, vamos calcular o espaço amostral e o evento, mas como o espaço amostral é o mesmo $n(\Omega)=495$. Calcular o evento na combinação $C_{10,8}$ visto que são 10 números a ser marcados.
A probabilidade é $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_{10,8}}{C_{12,8}} = \frac{\frac{10!}{8!(10-8)!}}{C_{12,8}} =$

$$= \frac{\frac{10\cdot 9\cdot 8!}{2\cdot 1\cdot 8!}}{495} = \frac{45}{495} = \frac{1}{11}.$$

Logo a probabilidade é de 1 para 11 jogos.

Fonte: arquivo dos pesquisadores (2015).

Primeiro os alunos leram o problema, depois procuraram identificar uma incógnita; traçaram o plano de ação e, em seguida, executaram as etapas sugeridas por Pólya (1887-1985), isto é: esquematizaram e desenvolveram as operações necessárias para chegar ao resultado solicitado.

Observamos que esses discentes desenvolveram corretamente todos os procedimentos metodológicos discutidos em sala de aula. Entenderam o que foi pedido em cada alternativa, pois não pediram intervenção dos pesquisadores. Souberam identificar os casos possíveis (espaço amostral) e os casos favoráveis, isto é, um subconjunto do espaço amostral, conforme se observa na resolução apresentada na figura 2.

Ao construírem o plano de ação, usaram análise combinatória, conteúdo discutido em sala de aula, essencial para ser aplicado neste tipo de situação, ou seja: fizeram os cálculos

[6] Esses nomes de alunos são fictícios

com uso das combinações simples para encontrar os casos possíveis combinações de $\binom{12}{8}$ e os casos favoráveis combinações de $\binom{8}{8}$.

De posse dos casos favoráveis e dos casos possíveis, entenderam que precisavam calcular o quociente entre as relações encontradas, a saber, o quocientes entre as combinações $\frac{\binom{8}{8}}{\binom{12}{8}}$. Assim, foi possível verificar, segundo Pólya, se o resultado construído estaria correto.

Embora não tenha ficado clara a explicação dada pelos alunos, da apresentação do cálculo do espaço amostral, item a), souberam identificar que era de 495, calculado pela combinação do denominador da expressão anterior, pois trata-se de apenas um bilhete, e os casos favoráveis somente 1, que é o evento do espaço amostral possível de acontecer.

Quando investigamos esse grupo de alunos a respeito da interpretação que fizeram sobre o cálculo do espaço amostral, disseram que o resultado que encontraram, $\frac{1}{495}$, significava que o denominador 495 representava o espaço amostral e o numerador 1 representava os casos favoráveis. E concluíram dizendo que, para um apostador acertar todos os oito números marcados, em um só jogo, a probabilidade de acerto seria "uma" em 495 possíveis.

Para a construção da resposta do item b) observamos que eles também usaram as orientações sugeridas por Pólya. Seguiram as etapas, fielmente, para encontrar os casos possíveis (espaço amostral) e os casos favoráveis de acontecer (um evento do espaço amostral). Expressaram que, através das combinações simples, poderiam encontrar o espaço amostral, analogamente ao que fizeram no item (a). Fizemos intervenção na classe e a maioria dos alunos concordou com os alunos Gabriel, Josberto e Karen, e disseram aos colegas que no seu entendimento o evento agora planejado seria baseado na combinação simples de $\binom{10}{8}$ pois, o evento agora tem dois números marcados a mais no bilhete, ou seja: calculando-se a combinação de $\binom{10}{8}$ encontra-se 45, que é o subconjunto do espaço amostral procurado. Fizemos nova intervenção e procuramos à classe como proceder para calcular os casos possíveis. A aluna Mayre[7] disse que os casos possíveis poderiam ser calculados, usando-se o mesmo raciocínio feito no item a).

Outra intervenção que fizemos foi para discutir com eles o espaço amostral. Todos os discentes responderam que não precisariam mais calcular, pois era o mesmo espaço amostral encontrado no item a), ou seja: o espaço amostral é 495.

Os alunos Gabriel, Josberto e Karen foram bem sucedidos, já que conseguiram encontrar os casos favoráveis (eventos) e os possíveis (espaço amostral), assim como a razão entre eles, ou seja: $\frac{\binom{10}{8}}{\binom{12}{8}}$ construindo, desta forma, corretamente, sua resolução, e concluíram que a probabilidade seria de $\frac{45}{495}$, isto é, $\frac{1}{11}$. Ou ainda a probabilidade é de 1 acerto em 11 jogos. Novamente interrogamos os alunos se havia alguma relação de proporcionalidade entre os acertos em relação a quantidade de dezenas marcadas nos bilhetes. Prontamente responderam: “Claro, professor, as chances de se ganhar aumentarão quando aumentarmos o número de dezenas marcadas”. Concluíram afirmando: “Achamos que a probabilidade de acertos aumenta na mesma proporção do número de dezenas marcadas”.

2) O bilhete da Lotofácil contém 25 dezenas. Para jogar um apostador poderá marcar de 15 a 18 das dezenas contidas no bilhete. Se um apostador marcar somente 15 dezenas qual a probabilidade dele acertar: a) Exatamente todas as 15 dezenas marcadas?
b) Exatamente 13 dezenas?

Figura 3 - Bilhete da Lotofácil

Fonte: Adaptação do bilhete da Caixa E.F. (2015).

[7] Nome fictício dado a aluna

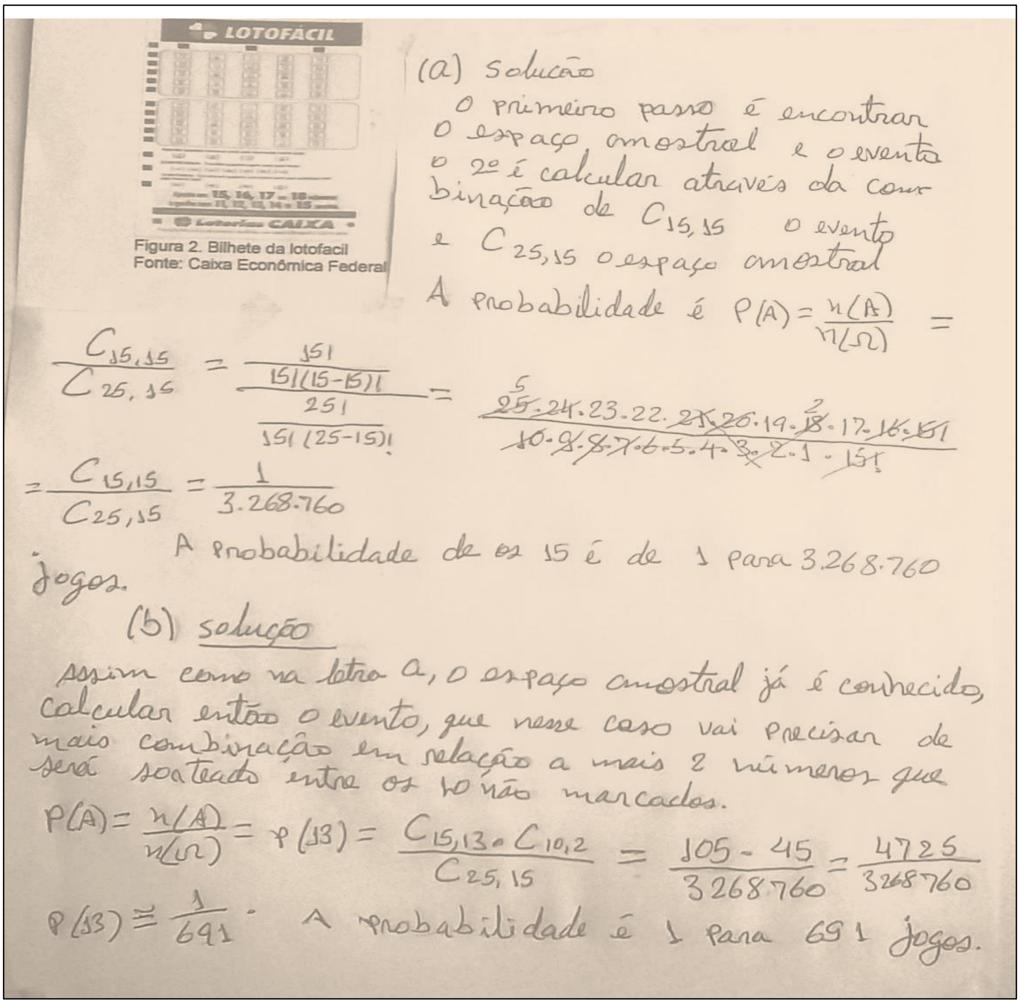
Na Figura 4 mostramos a resolução apresentada pelos alunos José, Carlos, Ludimila e Raimundo[8]. Eles utilizaram os passos da resolução de problemas descritos por Pólya. Observamos que inicialmente fizeram a leitura e a organização do plano de ação para a execução das quatro etapas sugeridas por Pólya. Depois, esquematizaram e fizeram as operações necessárias para construir o resultado pedido. Calcularam o evento e o espaço amostral utilizando-se da análise combinatória.

Perguntamos-lhes se haviam identificado que tipo de combinação iriam usar; esse grupo de alunos respondeu prontamente que se tratava de uma combinação simples. Perguntamos se estavam claras as perguntas feitas no item a) e no item b) do referido problema; alguns alunos apresentaram dúvidas; sugerimos que fizessem nova leitura e, se não entendessem o que estávamos pedindo, poderíamos ajudá-los. Lembramos que esse assunto já havido sido trabalhado na aula anterior, de acordo com Giovanni e Bonjorno (1992, p.,190-192) quando resolvemos alguns problemas versando sobre jogo de loterias.

Para responder ao item a) calcularam o evento usando a combinação de $\binom{15}{15}$ e o espaço amostral usando a combinação de $\binom{25}{15}$ e depois calcularam a probabilidade de acerto ao se jogar quinze dezenas, encontraram $\frac{1}{3268760}$. Concluíram que, ao se jogar 15 dezenas, a probabilidade de acertar todas as 15 será de 1 em 3.268.760 jogos. Para responderem ao item b) usaram o mesmo procedimento para calcular a probabilidade, uma vez que o espaço amostral já era conhecido; utilizaram-se do evento $\frac{\binom{15}{13}\binom{10}{2}}{\binom{25}{15}}$ e concluíram que a probabilidade de acertar as 13 dezenas era de 1 em 691 jogos. A resolução está expressa na figura 4.

[8] Os nomes dos alunos são fictícios

Figura 4 - Resolução construída pelo alunos José, Carlos, Ludimila e Raimundo[9]



Fonte: arquivo dos pesquisadores (2015).

Nas discussões sobre as resoluções apresentadas pelos alunos, observamos que quase todos eles conseguiram responder ao item a) entretanto, pouco mais de 70% conseguiram resolver e explicar os procedimentos que usaram para construir a resolução do item b). Foi preciso retomarmos o assunto sobre probabilidade, enfatizarmos o uso de produto de combinações para que eles conseguissem atingir os objetivos propostos.

Por outro lado, constatamos que alguns alunos não perceberam que, para resolver o item (b), teriam de fazer uma leitura relacionando com o entendimento que tiveram do item (a), visto que não se tratava de uma combinação simples direta para encontrar o evento, ou seja, o subconjunto do espaço amostral. Teriam de observar que, das 15 dezenas sorteadas, só teriam de acertar 13 e por isso havia duas dezenas "sobrando", mas que não

[9] Os nomes dos alunos são fictícios

faziam parte das 10 restantes, e como poderia ser também qualquer um desses restantes, seria necessário fazer outra combinação de dezenas no caso $\binom{10}{2}$.

Depois da mediação dos pesquisadores com os alunos, retiradas todas as dúvidas, esse grupo de alunos entendeu e argumentou com a classe que, para calcular a probabilidade de acerto das 13 dezenas em 15, teriam de combinar as dezenas que não seriam sorteadas, com a combinação das 15 dezenas sorteadas. E, assim, procederam. Calcularam o produto das combinações $\binom{15}{13}\binom{10}{2}$, disseram que esse resultado daria o número de eventos possíveis. E que dividindo esse resultado pelo espaço amostral $\binom{25}{15}$ teriam a probabilidade procurada, ou seja $P(13) \cong \frac{1}{691}$.

Depois dessa conversa com a turma, muitos grupos de alunos conseguiram realizar a tarefa pedida, entretanto ainda houve determinados grupos que sentiram dificuldades de entendimento do cálculo da probabilidade requerida. Identificamos que, quanto a esses, foi por falta de competências no cálculo das combinações.

De forma geral, percebemos que a maioria dos alunos conseguiu responder aos problemas propostos. Isso quer dizer que a metodologia usada, seguindo as etapas definidas por Pólya, teve sua eficiência comprovada na sala de aula pelos discentes que participaram da pesquisa. Dessa forma, acreditamos que essa Teoria corrobora significativamente para a aprendizagem Matemática.

Considerações finais

O Estudo da Probabilidade estimula a percepção e ajuda o aluno observar que boa parte dos acontecimentos do cotidiano é de natureza aleatória,[10] e que é possível serem identificadas prováveis resultados desses acontecimentos, como as noções de acaso e de incerteza que se manifestam intuitivamente e podem ser exploradas na escola em situações nas quais os alunos poderão fazer experimentos com objetos concretos.

Ocorreu uma discussão sobre o Ensino e Aprendizagem de Probabilidade no Ensino Médio, de acordo com a Teoria de Pólya (1887-1995). Esse tema se justifica dada a

[10] A exemplo de um ganhador de loteria, na Espanha, que sonhou com o produto de 7 x 7, obtendo o resultado de 48! Jogou 48 (claro que seria 49) e ganhou!

presença e importância da Estatística e Probabilidade no cotidiano das pessoas, haja vista que o conhecimento probabilístico é importante no contexto da realidade atual. Nesse sentido, a atuação do professor é condição *sine qua non* para que o aluno, no processo de construção do conhecimento, seja orientado a buscar o novo, a descobrir novos horizontes, seja criativo, participativo e interrogativo dos objetos do mundo que o cerca.

A utilização dessa metodologia, junto às classes pesquisadas, revelou-se eficiente ao longo dos encontros em sala de aula e, após o cumprimento da Teoria de Pólya, enfatizamos a participação profícua dos discentes na sala de aula, trabalho coletivo, organização e discussão de tarefas, maior capacidade de argumentação e consequentemente de interpretação. Além disso, facilita ao professor avaliar seus alunos com outro olhar, promovendo intervenções quando necessárias sem, contudo, dar uma resolução pronta.

A postura do docente e do aluno, na conjuntura atual brasileira, implica buscar novos desafios, se quisermos participar da reconstrução[11] da Educação do nosso País. Precisamos superar o comodismo, a falta de incentivo e de reconhecimento.

A exigência do cumprimento de ementas extensas, desconectadas do mundo do aluno, carga horária incompatível, salas de aula superlotadas, espaço físico inadequado, pouco tempo para o professor planejar melhor suas aulas e melhorar o seu material didático, são alguns dos fatores que contribuem para o fracasso escolar em nosso País.

Apesar de todas essas dificuldades, mesmo assim, essa experiência revelou-se muito gratificante e produtiva. A metodologia aplicada - Resolução de Problemas segundo Pólya – teve enorme aceitação dos alunos, envolvimento nas atividades propostas, bem como a facilidade com que a turma produziu novos conhecimentos.

Referências

ALLEVATO, N.; VIEIRA, G. Do ensino através da resolução de problemas abertos às investigações matemáticas: possibilidades para a aprendizagem. **Quadrante – Revista de Investigação em Educação Matemática**. Lisboa/Portugal, v. XXV, n. 1, p. 113-131, 2016.

[11] Os índices do IDEB, por exemplo, são baixos para a escola pública.

BORGES NETO, H. et al. **A Sequência Fedathi como proposta teórico-metodológica no ensino-aprendizagem de matemática e sua aplicação no ensino de retas paralelas**. In: Encontro de Pesquisa Educacional do Nordeste. Educação, Desenvolvimento Humano e Cidadania. São Luís; UFMA, Anais, 2001.

BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas**: uma estratégia para as aulas de matemática. São Paulo: CAEM-IME, USP, 2004.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ensino Médio. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEF, 1998.

_________. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias.** Brasília: MEC/SEB, 2002.

_________. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares Para o Ensino Médio. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias.** Brasília: MEC/SEB, 2006.

DANTE, L. R. **Matemática**: contextos e aplicações. São Paulo: Ática, 2013.

ECHEVERRÍA, M. del P. P.; POZO, J. I. Aprender a Resolver Problemas e Resolver Problemas para Aprender. In: POZO, J. I. (Org.). **A Solução de Problemas: aprender a resolver, resolver para aprender**. Trad. Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigações em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. rev. Campinas: Autores Associados, 2009.

FRAGA, R. R. **O estudo das loterias**: uma abordagem motivadora e facilitadora para aprendizagem de probabilidade no ensino médio. Dissertação (Mestrado em Matemática) Programa PROFMAT. IMPA. Rio de Janeiro, 2013.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R. Matemática 2: 2º grau: trigonometria, matrizes, análise combinatória, geometria. São Paulo: FTD, 1992.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar:** como fazer pesquisa qualitativa em ciências sociais. Rio de Janeiro: Record, 2007.

HELDER, R. R. **Como fazer análise documental.** Porto: Universidade de Algarve, 2006.

HOEL, P. G.; PORT, S. C.; STONE, C. J. **Introdução à teoria da probabilidade**. Rio de janeiro: Interciência, 1978.

HUIZINGA, J.; HOMO, L. **O jogo como elemento da cultura**. Perspectiva: São Paulo. 2000.

LOPES, C. E..; MEIRELLES, Elaine. O Desenvolvimento da Probabilidade e da Estatística. In: **ENCONTRO REGIONAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA** *LEM/IMECC/UNICAMP*, 18., 2005. O Ensino de Matemática e suas práticas. São Paulo: UNICAMP, 2005. p. 01-08. Disponível em: http://www.ime.unicamp.br/. Acesso em: 14 mar. 2015.

LOPES, C. E.. **O ensino da Estatística e da Probabilidade na educação básica e a formação dos professores.** Cad. Cedes, Campinas, vol. 28, n. 74,. p. 57-73, jan./abr. 2008. Disponível em: http://www.scielo.br. Acesso em: 15 jan. 2015.

MOURA, M. O. **O jogo e a construção do conhecimento matemático**. São Paulo: FDE, 1994. (Série Ideias, 10). Disponível em: http://www.crmariocovas.sp.gov.br/pdf/ideias_10_p045-053_c.pdf. Acesso em: 14 jun. 2015.

NOBRE, S.; AMADO, N.; PONTE, J. P. da. A resolução de problemas com a folha de cálculo na aprendizagem de métodos formais algébricos. **Quadrante – Revista de Investigação em Educação Matemática.** Lisboa/Portugal, v. XXIV, n. 2, p. 85-109, 2015.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Tradução e Adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PONTE, J. P.da; BROCARDO, J; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula.** -3. ed. rev. ampl.; 1. reimp. – Belo Horizonte: Autêntica Editôra, 2015.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. Trad. Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed. 2009.

Texto recebido: 23/10/2018
Texto aprovado: 12/09/2018