Contribuições de uma Prática Regular de Cálculo Mental para a Aprendizagem de Conceitos Matemáticos nos Anos Iniciais

Contributions to a Regular Practice of Mental Calculation for Learning Mathematical Concepts in Early Years

SHEILA DENIZE GUIMARÃES[1]
JOSÉ LUIZ MAGALHÃES DE FREITAS[2]

Resumo

Este artigo tem por objetivo revelar contribuições de uma prática regular de cálculo mental para um aluno dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental no que se refere à aprendizagem do sistema de numeração decimal e das operações aritméticas, em situações didáticas vivenciadas de forma dialógica. Os resultados indicam que: 1) os teoremas mobilizados foram adicionados gradativamente ao repertório do sujeito à medida que os mesmos eram introduzidos nas discussões; 2) as atividades permitiram ao sujeito envolvido perceber regularidades existentes em alguns cálculos, abandonando, em muitos casos, os algoritmos operatórios padronizados que conduzem a resultados corretos e a utilizar estratégias reveladoras de concepções ligadas à numeração decimal e às propriedades das operações.
Palavras-chave: *Cálculo Mental; Sistema de Numeração Decimal; Operações Aditivas e Multiplicativas; Anos Iniciais do Ensino Fundamental; Engenharia Didática.*

Abstract

This article aims to reveal the contributions of a regular practice of mental calculation for a student in the First Years of Elementary School when it comes to learning the decimal number system and arithmetic operations in didactic situations experienced in dialogue form. The results indicate that 1) the theorems mobilized were added gradually to the repertoire of the subject as they were introduced in the discussions, 2) the activities permitted subject to notice regularities involved in certain calculations, leaving, in many cases, the algorithms standardized operative leading to correct results and to use strategies that reveal conceptions linked to decimal numbers and the properties of operations.
Keywords: *Mental calculus; Decimal number system; Additive and multiplicative operations; Early elementary school; Didactic engineering.*

Introdução

A compreensão das regras e propriedades do sistema de numeração decimal constitui-se um desafio e parece não ter o êxito pretendido pela escola, talvez devido a maneira como este ensino vem sendo conduzido. Isso se torna ainda mais contundente quando percebemos que as escolas, de modo geral, fazem uma chamada à memorização da

[1] UFMS – Departamento de Educação - sheiladgui@hotmail.com
[2] UFMS – Departamento de Matemática - joseluizufms2@gmail.com

seqüência dos números por meio de exercícios escritos das seqüências numéricas, visando que a automatização da escrita e o reconhecimento de qualquer número se efetivem (LOSITO, 1996).

Essa postura contraria as recomendações advindas de organismos nacionais e internacionais ligados à Educação Matemática, que são unânimes em propor que se dê um destaque à compreensão do número e das operações, visando “[...] uma aprendizagem significativa ligada a uma compreensão relacional das propriedades dos números e das operações [...]” transformando-as em instrumentos de pensamento (SERRAZINA, 2002, p.59).

Nunes e Bryant (1997), afirmam que um sujeito que atinge esse estágio, pode ser considerado numeralizado, ou seja, quando consegue discutir e pensar sobre as relações numéricas e espaciais utilizando as convenções, demonstrando certo domínio do sistema numérico e das operações aritméticas.

Acreditamos que a compreensão das propriedades dos números e das operações possa ser favorecida mediante um trabalho sistemático envolvendo o cálculo mental que permita ao aluno construir novos esquemas de ação, estabelecer um espaço de múltiplas interações em sala de aula, ampliar e automatizar o repertório de cálculo e habilidades como a atenção, a memória e a concentração (ANSELMO e PLANCHETTE, 2006).

Consideramos cálculo mental como um conjunto de estratégias mobilizadas de cabeça ou de memória, que faz (ou não) uso dos dedos para obter resultados exatos ou aproximados, podendo ser utilizado, no mesmo sentido, a expressão cálculo oral (GÓMEZ, 2005; CORREA, 2004). Convém ressaltar, que não nos reportaremos ao procedimento que “põe a operação dentro da cabeça” como cálculo mental, pois esse recorre a um algoritmo preestabelecido e consiste em efetuar mentalmente um procedimento de cálculo escrito (LETHIELLEUX, 2001).

Objetivo

Revelar contribuições de uma prática regular de cálculo mental para um aluno dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental no que se refere à aprendizagem do sistema de numeração decimal e das operações aritméticas, em situações didáticas3 vivenciadas de forma dialógica.

Sujeito

Um aluno do Ensino Fundamental de uma escola particular de ensino de Campo Grande/ MS que cursou o 4º ano do Ensino Fundamental no segundo semestre de 2007 e o 5º ano em 2008.

Ressaltamos, por um lado, que a escolha da escola teve como critério o fato de termos atuado como professora dos Anos Iniciais durante o período que antecedeu nosso ingresso no doutorado. Por outro lado, a opção pela turma na qual estudava o sujeito deste artigo ocorreu por sugestão da professora regente, que atuou apenas como observadora das sessões de cálculo mental por nós implementadas.

Metodologia

A metodologia de pesquisa escolhida se baseou na Engenharia Didática, caracterizada como "[...] um esquema experimental baseada sobre 'realizações didáticas' em classe, quer dizer, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de seqüências de ensino" (ARTIGUE, 1988, p. 3).

O processo experimental da engenharia didática é composto por quatro fases: 1ª) análises preliminares, 2ª) concepção e análise *a priori*, 3ª) experimentação e 4ª) análise *a posteriori.*

As análises preliminares constituíram a fase de composição do quadro teórico didático e dos conhecimentos didáticos já adquiridos sobre o assunto, incluindo pesquisas realizadas sobre o tema. Nessa fase buscamos fazer análises que contemplassem a epistemologia do conteúdo pesquisado e de como esse vem sendo tratado usualmente no ensino e os efeitos desse tratamento. Diante da falta de trabalhos e de material bibliográfico de apoio sobre esse tema no Brasil, tomamos como referência publicações argentinas e francesas que discutem o lugar e o papel do cálculo mental para a aprendizagem da aritmética na escola elementar (BUENOS AIRES, 2006; BUENOS

[3] A *situação didática* é entendida como um conjunto de relações estabelecidas explícita e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos e um sistema educativo, num certo meio, que tem por finalidade adquirir um novo conhecimento (BROUSSEAU, 1986).

AIRES, 2004, LETHIELLEUX, 2001) e resultados de pesquisas (BUTLEN e PEZARD, 2003; BUTLEN e PEZARD, 2000; DOUADY, 1994). Nessa fase procuramos também realizar um levantamento das atividades contidas no material didático de matemática utilizado pelos sujeitos envolvidos na pesquisa.

Na segunda fase, concepção e análise *a priori*, foram escolhidas as atividades da seqüência didática, tendo como base as elaboradas por Lethielleux (2001). A escolha desse material se justifica pelo fato de ser organizado para o professor, com atividades que contemplam vários temas (numeração, adição e subtração mental, multiplicação e divisão mental) com nível gradual de dificuldade, acompanhadas de comentários pedagógicos que precisam os objetivos visados, as etapas e os meios pedagógicos para ajudar os alunos na sua aprendizagem.

Essa segunda fase teve por objetivo realizar o delineamento das atividades a serem propostas, descrevendo-as e analisando qual o desafio apresentado em cada uma delas, prevendo os comportamentos possíveis, levantando hipóteses e indicando de que forma as situações escolhidas propiciarão a aprendizagem dos conceitos aditivos e multiplicativos.

A fase seguinte, a da experimentação, que corresponde ao momento de implementação da pesquisa, ocorreu por meio de sessões de estudo com aproximadamente 15 minutos, perpassando dois encontros semanais em 2007 e três sessões semanais em 2008, nas quais demos prioridade para o cálculo oral. Ressaltamos que nós conduzimos as sessões para aplicação da seqüência, no intuito de buscarmos um maior controle das variáveis em jogo – as dimensões, os fatores que têm influência sobre o que estamos estudando – relacionadas à Matemática (natureza dos números e natureza das operações) e Gestão da classe (número de alunos interrogados e dinâmica utilizada; duração das sessões).

As quarenta e quatro atividades que contemplam nossa seqüência didática, subdivididas em três blocos (sistema de numeração decimal, operações aditivas e operações multiplicativas) foram submetidas à resolução dos alunos.

Cabe ressaltar que apesar da seqüência proposta ser constituída por vários exercícios agrupados por temas e graduados na dificuldade não tivemos a finalidade de treinar técnicas e estratégias. Isso porque no trabalho com o cálculo mental não basta reter uma quantidade enorme de informações é preciso colocá-la em ação diante de outras situações. Além disso, a dinâmica de aplicação da seqüência visou, por um lado, investigar estratégias de cálculo mental utilizadas pelos alunos e não trazer estratégias e técnicas para serem reproduzidas, exercitadas e memorizadas. Por outro lado, criar um espaço onde predomine a verbalização, para que as estratégias mobilizadas possam ser compreendidas, discutidas e ampliadas.

As atividades escolhidas buscaram evidenciar e ampliar o repertório numérico, incluindo a mobilização de propriedades aditivas e multiplicativas pelos alunos. As atividades foram organizadas em três blocos, conforme listado a seguir:

Como não seria possível acompanhar todos os alunos, priorizamos no início da experimentação acompanhar três grupos, contendo quatro alunos em cada grupo. A escolha desses alunos teve como critério a nota obtida na disciplina Matemática no primeiro semestre de 2007, compondo um grupo com alunos com média superior a 9,0 (GF, GJ, FN, LR), outro com média entre 8,5 e 7,0 (CM, GV, MR, TH) e um terceiro grupo com notas abaixo de 7,0 (FS, JD, ME, ML). Esse critério pode nos permitir delimitar a quantidade de sujeitos que acompanharemos ao longo da experimentação, iniciada haja vista que a dificuldade de fazer isso com toda a turma.

Para este artigo analisaremos apenas a participação de GV. Selecionamos esse sujeito por constituir uma espécie de caso exemplar e bastante representativo dos participantes da pesquisa, em razão das respostas apresentadas revelarem contribuições de uma prática regular de cálculo mental para a aprendizagem do sistema de numeração decimal e das operações aritméticas.

Para a coleta de dados, utilizamos o procedimento Lamartinière, sugerido por Lethielleux (2001), com o intuito de possibilitar a participação de todos os alunos. Tal procedimento se decompõe em três fases:

- O professor formula a questão, os alunos escutam e pesquisam a resposta;
- Ao sinal do professor, os alunos escrevem a resposta;
- Ao sinal, os alunos levantam sua folha para que o professor possa ver a resposta.

Esse procedimento foi adaptado para a aplicação da seqüência proposta, principalmente no que se refere ao uso do lápis, pois não permitimos seu uso em momento algum. Somente nós podíamos escrever no quadro, quando julgássemos necessário. Lethielleux (2001) sugere interrogar um aluno por vez sobre o procedimento de cálculo utilizado.

Os outros escutam e são interrogados em caso de contestação ou solicitação para explicarem o procedimento adotado, na tentativa de criar, em cada sessão, um espaço de debate ao redor das estratégias, desencadeando conflitos tanto cognitivo como sócio-cognitivo (BUTLEN e PEZARD, 1992; ANSELMO e PLANCHETTE, 2006). A atenção de todos é cobrada no decorrer da sessão, tendo em vista que não existe uma ordem prévia para a participação. Espera-se que durante as trocas verbais entre os alunos as regularidades dos números e as propriedades das operações sejam percebidas pelos alunos, como por exemplo, que a ordem dos fatores não altera o produto, não sendo necessário, porém, que ele aprenda o nome dessa propriedade, como afirmam Bittar e Freitas (2005).

Esse procedimento, por um lado, exige dos alunos certa disciplina para que possam respeitar a ordem estabelecida, não sendo permitido escrever durante o cálculo, pois impede o desenvolvimento de procedimentos mentais. Por outro, permite ao professor uma leitura rápida de todos os registros realizados pela turma.

A análise *a posteriori* é a última fase do processo experimental, na qual fizemos a análise dos dados colhidos durante a experimentação – observações e produções dos alunos durante as sessões de estudo - levando em consideração as expectativas anunciadas na análise *a priori* e as hipóteses formuladas. Adotamos como referência para a análise publicações argentinas e francesas que discutem o lugar e o papel do cálculo mental para a aprendizagem da aritmética na escola elementar e alguns aspectos da Teoria dos Campos Conceituais e da Teoria das Situações propostas respectivamente por Vergnaud e Brousseau.

Descrição e Análise Dos Resultados

Analisaremos a participação de GV, um dos sujeitos envolvidos na pesquisa, ressaltando suas principais dificuldades e avanços, bem como os principais teoremas em ação[4] mobilizados durante a aplicação da seqüência didática composta por três blocos: sistema de numeração decimal, operações aditivas e operações multiplicativas.

[4] Os teoremas em ação "[...] designam as propriedades das relações encontradas pelo sujeito quando age sobre a realidade e resolve o problema" e para empregá-los o sujeito não precisa saber explicá-los ou justificá-los (MORO, 1998, p.8).

Sistema de Numeração Decimal

Convém ressaltar que GV fazia parte do grupo de alunos com média entre 7,0 e 8,5 (CM, GV, MR, TH) obtida na disciplina Matemática no primeiro semestre de 2007, critério adotado para a seleção dos sujeitos da pesquisa realizada. Apesar de sabermos que o cálculo mental parece ser um campo privilegiado para testar as concepções numéricas dos alunos e sua disponibilidade (BUTLEN e PEZARD, 1992) e que a nota nem sempre reflete a aprendizagem, tínhamos a ingênua crença de que os alunos pertencentes a esse grupo não teriam dificuldades na resolução das atividades propostas pela seqüência didática. Entretanto, quando começamos a observar a participação de GV logo nas primeiras sessões, bem como a dos demais alunos alvos da pesquisa, verificamos que a nota adquirida serviu apenas como critério de seleção dos sujeitos, não podendo ser considerada como parâmetro para avaliar o desempenho dos mesmos durante a experimentação por dois motivos. Primeiro, porque a dinâmica utilizada nas atividades propostas por nós difere da exigida nas avaliações, pois o aluno tem que abandonar o registro escrito e resolver mentalmente, explicitando o caminho percorrido, ou seja, precisa ser cognitivo para dar conta da atividade e metacognitivo para compreender o que fez (VERGNAUD, 2003). Essa dinâmica, em geral, não é contemplada nas avaliações realizadas pela escola, nas quais o aluno estuda exaustivamente dias antes na tentativa de memorizar uma quantidade de informações para conseguir reproduzi-la depois.

O segundo motivo relaciona-se ao fato de que as atividades de cálculo mental exigem domínio das propriedades dos números e das operações, levando aluno a abandonar técnicas de cálculo como o algoritmo canonizado, exigido na maioria das vezes nas avaliações escolares.

Observamos que nas primeiras sessões, quando interpelada, GV mostrava-se insegura, mantendo-se em silêncio ou interrompendo a verbalização de suas respostas com um sorriso tenso, não dando continuidade à sua explanação, como podemos observar no excerto abaixo.

> P: Então vamos lá GV, que número é formado por 58 centenas?
> GV: (Silêncio)
> P: Uma perguntinha antes. Uma centena é igual a quanto?
> GV: Igual a cem.
> P: Então, se uma centena é igual a cem, 58 centenas é igual a que número?
> GV: (Silêncio).

Decidimos mudar de estratégia. Ao invés de sempre interrogá-la e solicitar sua participação, procuramos conquistar sua confiança e chamá-la ao debate, por um lado, para resolver cálculos previstos na análise a priori, mas que sabíamos que ela conseguiria resolver. Segundo Margolinas (1993) essa é a maior razão do docente: saber qual tipo de conhecimento o aluno pode utilizar para ter êxito. É claro que aos poucos fomos mudando, os números, jogando com as variáveis numéricas e permitindo que ela avançasse em sua aprendizagem.

Por outro lado, GV era chamada à discussão para emitir sua opinião sobre um cálculo realizado por um colega. Quando percebíamos sua dificuldade para responder o que propúnhamos, direcionávamos a pergunta para outro colega para que ela não se sentisse pressionada.

Isso foi possível devido às variáveis didáticas que tínhamos a nossa disposição, relacionadas ao conteúdo matemático e à gestão das atividades, que nos permitiu pouco a pouco integrá-la na discussão, de modo a favorecer aprendizagem do ponto de vista individual e do ponto de vista coletivo, à medida que tinha que organizar seu pensamento para expressá-lo para outras pessoas, aumentando o grau de articulação e de precisão na verbalização (BUTLEN e PEZARD, 1992), mesmo que lentamente como mostra o excerto seguinte. Aliás, a duração da aprendizagem é necessariamente longa (VERGNAUD, 2003) e perceber o envolvimento de GV, mesmo que ainda de forma desarticulada, reforça nossas convicções de que uma prática regular de cálculo mental favorece a ampliação e a construção de novos procedimentos de cálculo.

> P: [...] Eu quero saber o seguinte MR, quantas dezenas existem no número cento e vinte e cinco?
> MR: Silêncio.
> P: GV vai te ajudar MR.
> MR: Não! Peraí! Tem doze.
> P: GV, o que você acha?
> GV: Doze.
> P: Como você acha que o MR chegou ao doze? Como você chegou ao doze?
> GV: Eu contei de cinco em cinco. Chegou no dez eu parei e somei mais dois.
> P: Explica mais uma vez.
> GV: Eu contei de cinco em cinco e deu dez.
> P: Por que dez?
> GV: Porque uma dezena é dez. Ai eu peguei mais dois da dezena. Ai eu vi que era doze.
> P: E o cinco, você pegou de onde?
> GV:Ahh!
> P: De onde você pegou o cinco? Ele veio de onde?

GV: Aí eu não sei explicar!

Observamos nas falas de GV indícios do seguinte teorema: *Se um número possui três algarismos então para determinar sua quantidade de dezenas basta desprezar o último algarismo da direita e considerar o número formado pelos algarismos que restam.* Teorema esse que pode fruto tanto dos debates instaurados no decorrer das sessões como dos estudos que vinha realizando em casa, segundo afirmação da mesma no final de uma das sessões, na qual afirmou estudar com a mãe atividades semelhantes às desenvolvidas em nossos encontros.

Ao analisarmos detalhadamente outros excertos de GV verificamos que eles apresentam as principais dificuldades que havíamos previsto na análise *a priori* para esse bloco:

- contagem dos números próximos aos "nós" (LERNER e SADOVSKY, 1996):

> P: [...]. Agora GV, conta a partir de mil e noventa e sete.
> GV: Mil e noventa e oito, mil e noventa e nove (pausa acompanhada de risos) Aí...

- leitura unilateral e segmentada da numeração escrita (TEIXEIRA, 2002):

> P: Como que eu faço pra descobrir quantas dezenas tem no número [...] oitocentos e vinte?
> GV: Vinte?! Oitocentos e vinte (pausa). Unidade, dezena e centena. (Enquanto registro no quadro o número ela faz uma leitura decomposta de acordo com as ordens).

Embora tivéssemos presenciado momentos de dificuldade para a realização dos cálculos propostos, observamos outros nos quais GV consegue obter êxito na resolução, mesmo sem conseguir fundamentar suas opções e decisões.

> P: GV [...] mil quinhentos e sessenta tem quantas centenas?
> GV: Quinze.
> P: Como você descobriu? Explica pra gente.
> GV: Ah, não sei explicar.
> P: GV, mil e quinhentos tem quantas dezenas?
> GV: (silêncio). Cento e cinqüenta!
> P: O que você fez GV?
> GV: Desprezei o zero da unidade.
> P: Agora uma pergunta GV. O número pode ser de qualquer tamanho, essa regra vale? Essa regra de tirar a unidade vale para qualquer número?
> GV: Não! Ah, eu não sei.

Examinando as soluções apresentadas identificamos a presença de teoremas em ação mobilizados pela turma durante a exploração de atividades desse formato, mas que inicialmente não faziam parte do repertório de GV:

- *Para determinar a quantidade de dezenas de um número despreza-se o último algarismo da direita. O número formado pelos algarismos restantes representa a quantidade de dezenas.*
- *Para determinar a quantidade de centenas de número desprezam-se os dois últimos algarismos da direita. O número formado pelos algarismos restantes representa a quantidade de centenas.*

Identificamos ocasiões em que GV, além de apresentar a solução desejada conseguia justificá-la, apoiando-se nas regras e propriedades dos números, como no caso do uso do ponto, como forma de facilitar a organização e leitura do número (BRIZUELA, 2006).

> P: Vamos encerrar com a FS. [Quais algarismos formam o número] dez mil e oitenta?
> FS: Um, zero, ponto, oito, zero.
> P: Ok.
> P: E aí GV? O que você acha?
> GV: Tá errado.
> P: Está errado por que GV?
> GV: O número é (pausa)?
> P: Dez mil e oitenta.
> GV: Um, zero, ponto, zero, oito, zero.
> P: Por que isso aqui ta errado (mostro o registro do número anunciado por FS)? Por que não pode ser assim?
> GV: Porque aí só tá a unidade e a dezena.

Ressaltamos a importância da mediação para superação das dificuldades de GV, na qual oferecíamos uma variedade de ocasiões para que a mesma conseguisse desenvolver suas competências (VERGNAUD, 2005), como na passagem da numeração falada para a escrita em relação à escrita dos “nós” – números próximos de onde ocorre a mudança de ordem na representação no sistema de numeração decimal (LERNER e SADOVSKY, 1996). Vergnaud (2005, p.14) aponta que o ato de mediação do professor “[...] consiste em chamar a atenção sobre informações pertinentes ou tomar para si uma parte das ações a serem efetuadas de modo a diminuir o espaço de incertezas no qual o aluno deve navegar”.

Analisando a participação de GV no decorrer das sessões desse primeiro bloco percebemos contribuições da prática de cálculo mental instaurada durante as sessões da experimentação de nossa pesquisa, que permitiram que ela saísse do estado de inércia que se encontrava no início para envolver-se com as atividades. Dentre elas destacamos o fato de GV permitir-se errar, testar hipóteses e mobilizar estratégias propostas pela turma, buscando incorporá-las ao seu repertório numérico.

Operações Aditivas

Durante a exploração das atividades aditivas, as estratégias utilizadas por GV revelam um salto qualitativo, de estratégias mais "primitivas" de contagem "passo a passo" ou "de cabeça" para mobilizar decomposições aditivas ou subtrativas dos números. Segundo Butlen e Pezard (1992, p.327) essa "[...] evolução é sem dúvida devida, entre outros [motivos], a um maior conhecimento do repertório aditivo".

Cabe ressaltar que, apesar de observarmos esse salto, presenciamos momentos de retrocesso na escolha das estratégias para a resolução de determinados cálculos em virtude da variável *ordem de grandeza dos números* ("tamanho" dos números – 8.345 > 41). Nós distinguimos:

- Contagem (ou descontagem) "um a um": consiste em "contar em voz baixa" (n-1) termos e a escrever o enésimo, acompanhada freqüentemente da contagem com os dedos.

> P: Como você chegou ao quarenta e oito?
> GV: É só você contar de trás para frente.
> P: Então conta para a gente. Você fez como?
> GV: Cinqüenta e quatro, cinqüenta e três, cinqüenta e dois, cinqüenta e um, cinqüenta, quarenta e nove, quarenta e oito.
> P: Como você sabe qual a hora de parar a contagem de trás para frente?
> GV: Porque oh!!Chega ao quarenta e nove e já dá cinco (faz um gesto com os dedos)

Essa estratégia foi usada para superar dificuldade relacionada à passagem dos números próximos aos "nós" (LERNER e SADOVSKY, 1996).

> P: GV, novecentos e noventa e nove mais dois?
> GV: (silêncio) É (pausa) Ai!!!Vou chutar: é dez... O que eu posso fazer com esses valores para ficar mais fácil? O número é novecentos e noventa e nove mais dois. O que eu posso fazer para ficar mais fácil a conta? Noventa e nove, aí vai pra dez (pausa) novecentos e cem.
> P:[...] GV, oitocentos e noventa e nove mais dois?
> GV: Mais dois?!! É (pausa) novecentos e um.
> P: Como você chegou nesse resultado?
> GV: Oitocentos e noventa e nove, aumenta mais um fica novecentos, mais um novecentos e um.

No primeiro excerto GV retoma essa dificuldade, apresentada no primeiro bloco para a atividade 2, usando a estratégia prevista naquela ocasião: decomposição do número novecentos e noventa e nove em novecentos mais noventa e nove (900+99), seguida de soma das unidades solicitadas. Porém, não consegue explorá-la com êxito. Já no segundo trecho, observamos que, apesar de usar uma contagem primitiva, a estratégia de contar passo a passo permitiu a GV superar a dificuldade e obter êxito no cálculo apresentado, o que não havia sido cogitado em outros momentos.

- Estratégias fazendo intervir decomposições aditivas ou subtrativas de números, do tipo canônica ou outras decomposições permitindo ir à dezena superior ou simplificar os cálculos:

> P: Quinhentos e vinte e três mais sete.
> GV: Assim oh: eu pego três e somo com sete até ficar dez, aí é mais fácil formar quinhentos e trinta.
> P: Seis mais cento e dezenove.
> LT: Cento e vinte e cinco.
> P: Como você fez para descobrir?
> LT: É seis mais cento e dezenove. Eu pego um do seis e completo dez do dezenove, vai dar cento e vinte, mais cinco, cento e vinte e cinco.
> GV: Você pega um do seis e fica vinte aí você só soma mais cinco.

O segundo excerto revela mais do que uma simples repetição da estratégia adotada por LT, indica compreensão do que foi realizado, implicando um retorno reflexivo sobre a atividade realizada (VERGNAUD, 2003) mediante uma escuta ativa (DOUADY, 1994).

- Aplicação mental do algoritmo escrito:

> P: Como você chegou ao mil e quinhentos?
> GV: (silêncio) Ah! É seiscentos e vinte e cinco mais novecentos e setenta e cinco?
> P: É!
> GV: Ah não! É mil e seiscentos.
> P: Como chegar ao mil e seiscentos?
> GV: Eu armei a conta.
> P: Como você fez oitocentos e catorze menos sessenta e quatro [para chegar em setecentos e cinqüenta] (registro no quadro o cálculo proposto e o resultado)?
> GV: Eu sei que quatro menos quatro vai dar zero. Como não dá para subtrair seis de um eu emprestei.
> AC: Lembra aquela conta do papel.

O uso mental do algoritmo escrito aparecia quando os números propostos eram grandes ou quando isso coadunava com o recurso escrito. Nesse último caso, isso poderia gerar uma mudança eventual da estratégia utilizada.

Além dessas estratégias, GV foi capaz de identificar regularidades, por um lado, na seqüência dos números anunciados:

> P: [...] Conta pra gente a partir de duzentos e treze, de cinco em cinco.
> GV: Duzentos e treze?!
> P: De cinco em cinco!
> GV: Duzentos e (pausa) nossa!! Duzentos e dezoito (risos) duzentos e vinte e três, duzentos e vinte e oito, duzentos e trinta e três, duzentos e trinta e oito.
> P: Tá! No começo você demorou fazer a contagem. O que você percebeu?
> GV: Percebi que eu falava oito, três, oito, três. Só mudava a dezena.

A percepção dessa regularidade apresentada no excerto ocorreu após outro aluno despertar a atenção da turma para essa questão, como podemos observar na seguinte fala: *Quando eu estava contando de cinco em cinco eu percebi que era quatro e nove toda hora* (JD). Contudo, ressaltamos que o número escolhido para GV iniciar a contagem não foi o mesmo proposto a JD. Portanto, podemos descartar a hipótese de que houve apenas uma reprodução na regularidade observada pelo colega, pois conseguiu aplicar em outro contexto, agilizando o cálculo.

Por outro lado, a percepção da regularidade também ocorreu quando os valores expressos em alguma das ordens dos números envolvidos nos cálculos eram coincidentes, permitindo a GV operar apenas com os valores diferentes, fazendo uma junção dos teoremas mobilizados anteriormente pelos colegas:

- *Se os valores dos algarismos das dezenas e/ou unidades do subtraendo são menores que os do minuendo, então o resultado da operação será sempre o valor do algarismo da centena do minuendo mais o valor obtido pela subtração dos outros algarismos dos números dados;*
- *Se os algarismos das unidades são iguais, então basta subtrair os algarismos das outras ordens dos números dados;*

Observamos também que GV faz uso da propriedade comutativa como forma de facilitar o cálculo:

> P: GV, três mais noventa e um?
> GV: Noventa e quatro!
> P: Como você descobriu?
> GV: Você colocou o três na frente, eu peguei e coloquei o noventa e um na frente e somei mais três. [...] Porque daí fica mais fácil para eu somar.

Os avanços apresentados por GV no decorrer do segundo bloco reforçam nossa convicção de que a resolução de atividades via cálculo mental é uma ocasião privilegiada para fazer funcionar as propriedades das operações em relação às características do sistema de numeração posicional e decimal (BUENOS AIRES, 2006).

Operações Multiplicativas

Observamos nas atividades desse bloco GV continuar a incorporar ao seu repertório estratégias e teoremas mobilizados pelos colegas ao longo das sessões, como vinha ocorrendo desde o início da experimentação.

A estratégia ligada à contagem de **n** em **n,** que se pautava na decomposição do multiplicador seguida de cálculos automatizados com uma breve contagem, prevista na análise *a priori* também foi mobilizada por GV:

> P: GV, cinco vezes nove?
> GV: Cinco vezes nove? Quarenta e cinco.
> P: Quarenta e cinco?
> GV: Não! (silêncio) Cinqüenta. Não! Cinqüenta é vezes dez. Quarenta e cinco.
> P: Como você chegou ao resultado?
> GV: Primeiro eu me confundi. Eu sei que oito vezes cinco é quarenta. Aí eu peguei e somei mais cinco.

De certo modo, essa estratégia implica compreensão da lógica do sistema numérico (NUNES e BRYANT, 1997), tendo em vista que era preciso perceber que é possível obter o resultado de cinco vezes nove tanto realizando o cálculo de (8x5)+(1x5) como o cálculo de (5x10)-(5x1).

Outra estratégia usada por GV consiste em encontrar o resultado do cálculo proposto buscando um número que multiplicado ao fator dado resulte no produto anunciado, como mostra o trecho a seguir:

> P: GV, cinqüenta e seis dividido por oito?
> GV: Cinqüenta e seis dividido por oito? (pausa) Espera aí (risos e silêncio) Oito?!
> P: Oito vezes oito dá quanto?
> GV: Aí não sei![...] É sete.
> P: Como você fez?
> GV: Sete vezes oito é cinqüenta e seis.

Essa estratégia parece mobilizar o seguinte teorema: *Se forem dados o produto e um de seus fatores então para obter o resultado da divisão desse produto pelo fator dado, basta encontrar um número que multiplicado por esse fator resulte no produto dado.*

Observamos também a mobilização de outros teoremas ligados à divisão e à multiplicação por 10, 100 ou 1000, como ilustram os fragmentos a seguir:

> P: Eu falei quinze mil dividido por dez. Você falou quanto mesmo? (registro no quadro o cálculo proposto)
> LT: Cento e cinqüenta.
> GV: Você corta o zero e aí fica mil e quinhentos.
> P: GV, quanto que dá [duzentos vezes nove]?
> GV: Mil e oitocentos. Eu fiz assim: eu sei que nove vezes zero é zero, nove vezes (pausa) tá (pausa), coloco os dois zeros lá embaixo e eu sei que nove vezes dois é dezoito. Então, fica mil e oitocentos.

No primeiro excerto encontramos indícios do teorema ligado à divisão por 10, 100 e 1000: *Para determinar o resultado da divisão de um número terminado em dois zeros por 10 desprezam-se o último algarismo da direita. O número formado pelos algarismos restantes representa o resultado.* Acreditamos que isso seja possível porque esse teorema corresponde à regra ensinada pela escola e talvez faça parte do repertório dos alunos.

O segundo excerto traz implicitamente a presença do seguinte teorema: *Quando multiplicamos por 100 basta acrescentar dois zeros à direita do último algarismo*, que também corresponde à regra ensinada pela escola. O tamanho dos números foi uma variável importante a ser considerada, porque além de aplicá-lo GV tinha que reorganizar o número mentalmente, de acordo com as ordens obtidas e isso, provavelmente, gerou demora em verbalizar a leitura do resultado encontrado. Diferentemente do que ocorre nas atividades realizadas na escola, que de certa forma priorizam o registro escrito.

Considerações Finais

Observando os dados apresentados podemos afirmar que GV iniciou a experimentação utilizando apenas um tipo de procedimento (uso mental do algoritmo ensinado pela escola) ou às vezes nenhum. A difusão de diversas estratégias na classe, após serem reconhecidas como eficazes, lhe permitiu progredir e incorporar aos poucos essas estratégias ao seu repertório numérico. A esse respeito Butlen e Pezard (1992) afirmam que favorecer essa difusão à toda a classe é o papel do professor, que deveria conduzir os alunos a abandonar suas antigas estratégias para adotarem novas, mais eficientes.

Verificamos que aos poucos GV usou estratégias que extrapolavam a aplicação do algoritmo, elaborando outras a partir das propriedades dos números e das operações, que ainda não são conhecidas, ou seja, usava sem ter consciência de que por trás daquela estratégia existia uma propriedade implícita. Eis mais uma função da difusão das estratégias: permitir construir o sentido a propósito das propriedades utilizadas

(ANSELMO e PLANCHETTE, 2006). Contudo, esse é um processo lento, assim como toda a duração da aprendizagem (VERGNAUD, 2003).

Ressaltamos que as atividades permitiram a GV perceber regularidades existentes em alguns cálculos, conduzindo-a a abandonar, em muitos casos, os algoritmos operatórios padronizados que conduzem a resultados corretos, porém são muito lentos, e a utilizar estratégias reveladoras de concepções ligadas à numeração decimal e às propriedades das operações (BUTLEN e PEZARD, 1992).

Acreditamos, por um lado, que o fato de GV sair do estado de inércia que se encontrava no início da experimentação, com medo de se expor, não conseguindo efetuar mentalmente os cálculos propostos, para ao final do trabalho solicitar permissão para mostrar sua estratégia, mesmo quando não tínhamos a intenção de questioná-la, revela a principal conquista obtida pela prática de cálculo mental instaurada durante a experimentação.

Por outro lado, cremos que sua permanência num grupo direcionado para um trabalho sistemático de cálculo mental a possibilitou: 1) ampliar e construir novas estratégias de cálculo; 2) mobilizar e incorporar teoremas que não fizeram parte do seu repertório numérico durante a experimentação; 3) ampliar o campo de atuação dos teoremas para outros domínios e classes de situações (VERGNAUD, 2005).

Concluímos que os resultados alcançados são decorrentes das realizações didáticas direcionadas pela Engenharia Didática, que possibilitaram a validação de nossa hipótese de pesquisa: uma prática regular de cálculo mental contribui para ampliação e construção de novas estratégias de cálculo. Ouvindo, raciocinando e falando sobre cálculo mental, houve a possibilidade de incorporações de novos conceitos e significados no conhecimento matemático de GV, permitindo inclusive as filiações e rupturas no aprendizado (VERGNAUD, 1996), ligadas, por exemplo, aos hábitos e forma de pensamento adquiridos a respeito das regras do sistema de numeração decimal.

Verificamos também que as sessões de cálculo mental fizeram com que GV analisasse, reorganizasse e ampliasse o seu repertório numérico, bem como fizesse conjecturas sobre quais conhecimentos poderiam ajudá-la a obter os resultados esperados.

Um outro aspecto que merece destaque diz respeito à seqüência didática proposta pela experimentação, a qual avaliamos como consistente e coerente, pois permitiu estabelecer ao longo da experimentação as fases *adidáticas* de ação, formulação e validação (BROUSSEAU, 1986).

Para finalizar, resgatamos o depoimento de GV sobre as sessões de cálculo mental desenvolvidas em nosso estudo, que revelam não mais nosso olhar, mas o olhar de um sujeito da pesquisa a respeito das contribuições do cálculo mental para a aprendizagem:

> *Sheila, eu aprendi a fazer contas de cabeça e sabe quem me ensinou? Foi você. Vamos ao assunto: às vezes eu não sabia fazer a conta de cabeça, porque o meu cérebro ficava meio confuso para fazer a conta e embolava tudo, daí eu me perdia e falava a resposta errada. Também às vezes você falava uma conta e eu achava muito difícil para responder, mas depois eu fui me soltando e aprendi bastante coisas legais e interessantes.*

Referências

ANSELMO, B.; PLANCHETTE, P. Le calcul mental au collège: nostalgie ou innovation? **Repères IREM**. Num. 62. p. 5-20, 2006.

ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique. **Recherches en Didactique des Mathémaques**, Vol. 9, n^{o} 3, pp. 281-308, Grenoble : La pensée sauvage, 1988.

BITTAR, M.; FREITAS, J.L.M.de. **Fundamentos e metodologia de Matemática para os ciclos iniciais do ensino fundamenta**l. 2ª ed., Campo Grande, MS: Ed. UFMS, 2005.

BRIZUELA, B. M. **Desenvolvimento matemático na criança:** explorando notações. Porto Alegre: Artemed, 2006.

BROUSSEAU,G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble: Pensée Sauvage, v.7, n.2, p.33-115, 1986.

BUENOS AIRES. Secretaría de Educación - Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. **Cálculo mental con números racionales: apuntes para la enseñanza**. Coordinado por Susana Wolman – 1ª ed. Buenos Aires: 2006.

_____. Secretaría de Educación del gobierno de la Ciudad de Buenos Aires / Dirección General de Planeamiento / Dirección de Currícula. **Diseño curricular para la escuela primaria: primer ciclo de la escuela primaria-educación general básica**. Dirigido por Silvia Mendonça, 1ª ed. Buenos Aires: 2004.

BUTLEN D. e PEZARD M. Une contribution à l'étude des rapports entre habiletés calculatoires et résolution de problèmes numériques à l'école primaire et au début du collège, **Spirale, Revue de Recherche en Education**, vol 31, p. 117-140, Lille, 2003.

_____ Calcul mental et résolution de problèmes numériques au début du collège, **Repères-IREM**, n° 41, 5-24, Topiques Editions, Metz, 2000.

_____. Calcul mental et resolution de problemes multiplicatifs, une experimentation du CP au CM2. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Vol. 12, nº. 23, p. 319-368, 1992.

CORREA, J. A resolução oral de tarefas de divisão por crianças. **Revista Estudos de Psicologia**, Natal, vol.9 nº.1, Jan./Abr.2004.

DOUADY, R. Evolução da relação com o saber em matemática na escola primária: uma crônica sobre cálculo mental. **Em Aberto**, Brasília, ano 14, n. 62, abr./jun. 1994.

GÓMEZ, Bernardo. La enseñanza del cálculo mental. **Unión- Revista Iberoamericana de Educación Matematica,** n. 4, p. 17-29, dez 2005.

LERNER, D.; SADOVSKY, P. O sistema de numeração: um problema didático. In: PARRA C. & SAIZ, I. (org.) **Didática da Matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas,1996.

LETHIELLEUX, C. **Le calcul mental au cycle des approfondissements**, Collection Pratique pédagogique, Armand Colin, Paris: Bordas, 2001.

LOSITO, S. M. **O sistema de numeração decimal e o princípio multiplicativo:** um estudo na 4ª série do 1º grau. 1996. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP: 1996.

MARGOLINAS, Claire. **De L'importance Du Vrai Et Du Faux. Dans La Classe De Mathematiques.** La Pensee Sauvage, Editions, 1993.

MORO, M. L. F. Adição/Subtração: Os caminhos de sua psicogênese na aprendizagem. **VII Simpósio Nacional de Pesquisa e Intercâmbio Científico**, Gramado, 1998.

NUNES, T. e BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

SERRAZINA, L. Competência matemática e competências de cálculo no 1º ciclo. **Educação e Matemática**, Lisboa, nº. 69, setembro/outubro, 2002.

TEIXEIRA, L. R. M. Como os professores interpretam os erros dos alunos das séries iniciais sobre sistema de numeração. In: I SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2002, Curitiba. **Anais...** Curitiba: UTP, 2002.

VERGNAUD, G. Qu'est-ce qu'apprendre ? In R.M. Chevalier (Ed) **Pour une ècole inclusive. Quelle formation pour les enseignants ?** Actes du colloque international des 24, 25 et 26 novembre 2005, IUFM de Créteil.

_____. A gênese dos campos conceituais. In E. P. Grossi (Org.) **Por que ainda há quem não aprende? A teoria**. Rio de Janeiro: Vozes, p. 21-64, 2003.

_____. A teoria dos campos conceituais. In BRUN, J. **Didáctica das matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.