EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i2p283-308

A abordagem de interpretação global no ensino e na aprendizagem das superfícies quádricas

The global interpretation approach in the teaching and learning of quadric surfaces

SÉRGIO FLORENTINO DA SILVA[1]
MÉRICLES THADEU MORETTI[2]

Resumo

Neste trabalho analisamos o ensino e a aprendizagem das superfícies quádricas (não cilíndricas e não degeneradas) na perspectiva da Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval, principalmente, no que diz respeito à abordagem de interpretação global de propriedades figurais. Indicamos as articulações semio-cognitivas envolvendo os registros em língua natural, cartesiano e simbólico de maneira explícita, modo não encontrado em livros didáticos consultados. Além dessas articulações, em especial, sugerimos o recurso das interseções com planos articulado à ideia de que os valores visuais dependem ou são condicionados ao conjunto e a combinação das unidades significantes simbólicas da equação correspondente, o que é fundamental para a reconhecimento dos diferentes casos de quádricas ou de uma quádrica em diferentes posições. Com isso pensamos contribuir ainda mais para o estudo do reconhecimento das quádricas, acrescentando, com o uso do GeoGebra, as reflexões que permitem que as análises feitas para uma quádrica em uma das posições denominada, em livros didáticos, de posição padrão poderão ser estendidas a essa mesma quádrica em suas outras posições. Veremos que elementos semio-cognitivos discutidos neste trabalho trazem novas contribuições para o estudo da identificação das quádricas. Como resultado desse caminho, podemos entender semioticamente por que os registros simbólicos e cartesianos das quádricas se correspondem da maneira como conhecemos.
Palavras-chave: Superfícies Quádricas. Interpretação Global. *Softwares* no Ensino de Matemática. Ensino Superior.

Abstract

In this work we analyze the teaching and learning of quadric (non-cylindrical and non-degenerated) surfaces from the perspective of Raymond Duval's Theory of Semiotic Representations, especially with regard to the global interpretation approach of figurative properties. We indicate the semi-cognitive articulations involving the natural,

[1] Doutorando em Educação Científica e Tecnológica pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Professor de Matemática do Departamento de Cultura Geral do Instituto Federal de Santa Catarina (IFSC). Endereço para correspondência: Rua José Lino Kretzer 608, São José, SC, CEP: 88103-310 Brasil. *E – mail:* sergio.florentino@ifsc.edu.br.

[2] Doutor em Didática da Matemática pela ULP/Estrasburgo – França. Professor permanente do PPGECT/UFSC. Endereço para correspondência: Campus Universitário Trindade – CFM/PPGECT. CEP 88.040-900 – Florianópolis-SC, Brasil. *E-mail*: mthmoretti@gmail.com

cartesian and symbolic language registers in an explicit way, a method not found in accessed textbooks. In addition to these articulations, in particular, we suggest the use of intersections with concepts linked to the idea that visual values depend or are conditioned on the set and the combination of the symbolic units of the corresponding equation, which is essential for the recognition of the different cases of quadrics or a quadric in different positions. With this in mind, we intend to contribute even more to the study of quadric recognition, adding, with the use of a GeoGebra, that the reflections that allow the analyzes made for a quadric in one of the positions denominated, in textbooks, as standard position, can be extended to this same quadric in its other positions. We will notice that the semi-cognitive elements discussed in this work bring new contributions to the study of quadrics identification. As a result of this path, we can semiotically understand why the symbolic and cartesian registers of the quadrics correspond in the way we know it.
Keywords: Quadric Surfaces; Global Interpretation; Softwares in Teaching Mathematics. Higher Education.

Introdução

Analisar gráficos não só de curvas mais também de superfícies é uma prática recorrente que não é exclusividade de pesquisadores e estudantes da área de Matemática. Do ponto de vista escolar, o estudo de curvas está constantemente presente nos Ensinos Fundamental, Médio e, ainda, em diversos cursos tanto de graduação quanto de pós-graduação. Já o estudo de superfícies, geralmente, inicia-se em diversos cursos de graduação e pode sofrer aprofundamentos em cursos de pós-graduações. O entendimento dos gráficos permite compreender diversas situações que são tanto internas quanto externas a Matemática. Corrêa e Moretti (2014, p. 39) entendem que esboçar um gráfico é “[...] uma ferramenta matemática muito importante nos tempos atuais por tornar possível a representação de diversos fenômenos e situações.” Essa ferramenta, em nossa compreensão, pode ser acessível não apenas pelos matemáticos.

No Ensino Superior, dentre os tipos de superfícies incluem-se o conjunto que é conhecido pelo nome genérico de superfícies quádricas. Em especial, destacamos as quádricas não cilíndricas e não degeneradas (elipsoides; hiperboloides de uma e duas folhas; cones quádricos elípticos; parabolóides elípticos e hiperbólicos - selas). Por uma questão de simplicidade de escrita, daqui para frente quando dissermos quádricas estamos nos referindo apenas as que são não cilíndricas e não degeneradas.

Na Teoria dos Registros de Representações Semióticas (TRRS), de Raymond Duval (2011a, p. 99), a compreensão integral (ou integrativa) dos gráficos só é possível com o que ele definiu como Abordagem de Interpretação Global de Propriedades Figurais. Porém, no caso das quádricas há algumas dificuldades que precisam ser superados no uso dessa abordagem. Neste artigo, propomos analisar tais dificuldades e, além disso, indicar caminhos de como abordar o ensino das quádricas em *sintonia* com a TRRS, principalmente, no que diz respeito à Abordagem de Interpretação Global de Propriedades Figurais. Os registros em língua natural que aqui usaremos para as quádricas já foram discutidos com detalhes em Silva e Moretti (2018).

No presente artigo o tempo de sala de aula foi considerado como um elemento relevante em nossas sugestões de como abordar as quádricas no ensino. Além disso, diferente do sistema didático vigente tais como em Leithold (1994), Winterle (2000) e Lehmann (2007), nosso enfoque dá enfase explícita aos elementos semio-cognitivos presentes nos registros em língua natural, cartesiano e simbólico.

Abordagem de Interpretação Global de Propriedades Figurais

Para Duval (2011a, p. 99) a compreensão integral (ou integrativa) dos gráficos só é possível com o que ele definiu como Abordagem de Interpretação Global de Propriedades Figurais. Nesse entendimento, não nos limitamos em apenas “olhar” um desenho no papel ou em um *software* que representa uma equação e nem nos reduzimos a analisar elementos pontuais ou particulares presentes num gráfico. Mais do que isso, na concepção dessa teoria, a potencialidade da aprendizagem (integral) têm exigências mais amplas e específicas que necessitam de uma abordagem que permita a interpretação global das propriedades figurais e que, com isso, possibilita efeitos duradouros na aprendizagem dos alunos.

Para tanto, recorre-se ao Método de Análise e Identificação das Variáveis Cognitivas que possibilita identificar as unidades significantes simbólicas (pertinentes ao registro simbólico) e as correspondentes unidades significantes cartesianas (pertinentes ao registro cartesiano e também chamadas de variáveis visuais). De maneira mais específica, para a identificação dessas unidades significantes (básicas) fazem-se todas as modificações possíveis num dos registros de representação e observam-se quais delas geram modificações no outro registro. Deve-se variar, dentro de um mesmo registro, uma unidade significante e manter todas as outras constantes e ver o que ocorre no outro registro. Nesse Método, descrito por Duval (2003, p. 25; 2009, p. 101; 2011a, p. 103; 2011b, p. 104), a distinção das unidades significantes de um sistema semiótico é feito recorrendo ao clássico princípio de oposição utilizado pelos linguistas a partir de Ferdinand de Saussure. Nesse princípio, os signos são entendidos não de forma isolada e sim em sua forma relacional opositiva, pois, como esclarece Duval (2011b, p. 30), "os signos só podem ser reconhecidos como signos por meio das relações de oposição que eles têm com os outros signos no interior de um sistema." Logo, nesse princípio, *o valor* de um signo é constituído pela diferença em relação aos outros signos que constituem um sistema.

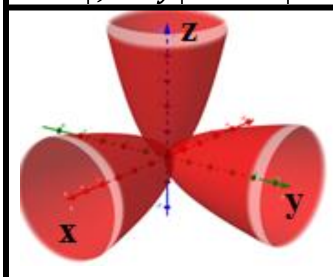
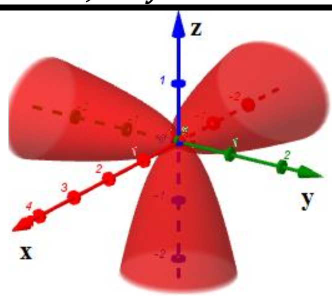
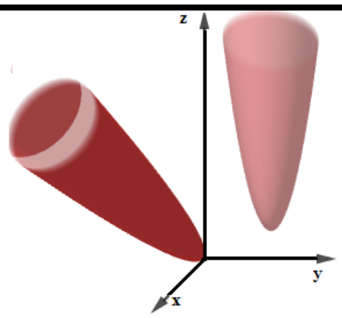
Em todo esse processo de análise e identificação, que é central na TRRS, a discriminação das variáveis visuais é particularmente pouco evidente, mas, infelizmente, em geral é negligenciado no ensino. De qualquer maneira, o adequado reconhecimento dessas variáveis permite que se identifique o que é visualmente diferente de modo significativo. Sem ele, não temos como identificar as unidades significantes simbólicas correspondentes e, consequentemente, a compreensão integral em Matemática pode ser comprometida. Além disso, essas unidades são orientadoras e intermediarão as transformações entre registros distintos (conversões). Não obstante, não é suficiente conhecê-las sendo necessário coordená-las a partir das regras de correspondência semiótica e, sobretudo, realizar as conversões tanto do registro simbólico para o registro cartesiano quanto do registro cartesiano para o registro simbólico (conversões em duplo sentido). Porém, no caso das quádricas considerando que em geral não é possível, dado o registro cartesiano, determinar o registro simbólico, como realizar conversões em duplo sentido? Diante de tal impossibilidade nesses casos sugerimos que as conversões sejam feitas entre as variáveis visuais e as unidades significantes simbólicas. Nessa proposta devemos realizar conversões em duplo sentido.

Como vemos a aprendizagem em matemática segundo a TRRS envolve um processo semiótico que inclui claras identificações, delimitações e regras de articulações entre distintos registros. Porém, tudo isso não é produzido de maneira automática, imediata ou natural e, claro, o professor não deve negligenciar essas questões. Portanto, na perspectiva da TRRS os elementos semióticos tem um papel fundamental na aprendizagem em matemática e, por isso, trata-se de uma teoria semio-cognitiva.

A Abordagem de Interpretação Global no ensino e na aprendizagem das superfícies quádricas: dificuldades e possibilidades

Para o caso das quádricas há dificuldades específicas na análise e identificação das variáveis cognitivas. Em primeiro lugar, as quádricas incluem vários *casos* (elipsoides; hiperboloides; ...) e, além disso, cada um desses casos pode estar em *posições diferentes no sistema cartesiano* (paraboloide elíptico padrão abrindo em z_+; paraboloide elíptico padrão abrindo em y_-; ...; paraboloide elíptico transladado; paraboloide elíptico rotacionado; ...). O Quadro a seguir representa, no sistema cartesiano, essas diferentes posições para o caso do paraboloide elíptico.

Quadro 1 – Diferentes posições do paraboloide elíptico no sistema cartesiano

Paraboloide elíptico **abrindo em z_+, em y_+** e **em x_+**	Paraboloide elíptico **abrindo em z_-, em y_-** e **em x_-**	Paraboloide elíptico **transladado** e **rotacionado**
		

Fonte: Os autores

Nessas diferentes situações, há várias semelhanças e diferenças visuais e algébricas que estão presentes tanto entre os vários casos quanto entre uma mesma quádrica em posições diferentes. Portanto, há oposições qualitativas entre os vários casos e também específicas de cada quádrica o que, certamente, podem dificultar a identificação, diferenciação e análise dessas questões.

Há ainda outros complicadores. Em especial, à identificação/correlação das variáveis visuais e unidades significantes simbólicas são bem mais difíceis quando esse trabalho é feito com as equações em certas formas como, por exemplo, aquela que costumamos chamar de forma geral. Além disso, quando as quádricas estão em posições rotacionadas, além da dificuldade de visualização dos registros cartesianos, sobretudo no que diz respeito às simetrias e interseções com planos, os cálculos algébricos tornam-se mais extensos e, inclusive, exigem conhecimentos de Álgebra Linear tais como autovalores, autovetores e base que em geral ainda não são de conhecimento dos alunos no nível de ensino em que se estudam essas superfícies.

Diante dessas dificuldades, como abordar as quádricas com a TRRS? Para tratar essa questão e estar em sintonia com a TRRS, principalmente no que diz respeito à Abordagem de Interpretação Global de Propriedades Figurais, propomos algumas adaptações que discutiremos a seguir.

Primeiramente tomamos variáveis visuais que permitem identificar/analisar as diferenças e semelhanças tanto entre os vários casos de quádricas quanto entre uma mesma quádrica em posições diferentes no sistema cartesiano. Assim, consideramos as oposições qualitativas que existem entre os vários casos e as que são específicas de cada quádrica. Em especial, adiantamos que as interseções com planos permitem tal análise/identificação. Essas interseções são desconstruções dimensionais que permitem visualizar dimensões menores do que três e que são fundamentais para a apropriação das citadas oposições e, além disso, para a visualização das quádrica no sistema cartesiano. Com elas, determinaremos as cônicas que, por sua vez, também possuem suas próprias variáveis visuais e que também permitem analisar as variáveis visuais das quádricas. Mais adiante discutiremos essas variáveis e veremos que nosso enfoque nas interseções não é apenas matemático mais, semiótico e cognitivo. Também veremos que na contramão da prática pedagógica recorrente, propomos que as interseções com planos não se limitem as curvas de nível (um tipo especial de interseção com planos).

Em segundo lugar, para minimizar as dificuldades anteriormente citadas, sobretudo as algébricas, propomos que seja dado *ênfase* as quádricas nas posições padrão. Trata-se de “posições privilegiadas”, pois mesmo sem ter que recorrer a Álgebra Linear permite o estudo extenso dos registros simbólicos de maneira mais simples do que no caso das outras posições. No fundo, essas são as posições que os livros trabalham sendo que o que pretendemos é apenas contribuir para o debate de como abordar o ensino das quádricas em sintonia com a TRRS diante das citadas dificuldades.

Para as demais posições (transladadas e rotacionadas) sugerimos que seu estudo seja feito a partir das posições padrão. No caso das posições transladadas propomos uma abordagem análoga a de Moretti (2003); Moretti e THIEL (2012). Já para as posições rotacionadas, conforme já demos indicativos, é necessário avançar nos estudos didáticos incluindo tópicos da Álgebra Linear. De qualquer maneira, matematicamente nossa sugestão de abordagem das posições transladadas e rotacionadas, se dá a partir da quádrica em sua forma padrão. Tal abordagem é assegurada pelo Teorema Espectral.

Variáveis visuais e unidades significantes correspondentes

Nesta seção discutiremos as variáveis visuais que tomamos bem como as unidades significantes correspondentes. Para facilitar a organização e leitura do trabalho dividimos esta seção em quatro partes. Para fins de delimitação, em todo este artigo só utilizaremos o sistema de coordenadas ortogonais. Além disso, por uma questão de economia de termos por vezes omitiremos o termo “posição” ao dizer *posição padrão*, *posição* *transladada* ou *posição rotacionada*. Assim, por exemplo, diremos apenas *elipsoide padrão* e não *elipsoide na posição padrão.*

A posição da quádrica em relação ao sistema cartesiano

A primeira variável visual que tomamos é a posição da quádrica em relação ao sistema cartesiano e ela assume três valores visuais: padrão, transladada e rotacionada. No Quadro 1 representamos essas diferentes posições para o caso do paraboloide elíptico. No caso dessa variável, exceto no caso das posições padrão que discutiremos mais adiante, em função das dificuldades algébricas anteriormente citadas torna-se difícil dar ênfase as unidades simbólicas correspondentes. Mesmo assim, mais adiante, na Seção intitulada "Propriedades que contribuem para a interpretação global", traremos algumas propriedades que permitem um estudo inicial nesse sentido. Porém, nossa intenção em incluir tal variável visual é apenas dar uma breve noção das diferentes posições no sistema cartesiano e, a partir daí, privilegiar o estudo de uma dessas posições (a posição padrão). Com isso, mesmo que os aspectos algébricos sejam pouco explorados, podemos analisar que as posições transladadas e rotacionadas se correlacionam com a posição padrão e, nesse sentido, temos uma visão global e articulada das diferentes posições. Além disso, para definirmos os citados valores visuais nos baseamos nas posições dos planos de simetria das quádricas em relação aos planos coordenados escolhidos e também na posição do ponto significativo (centro, vértice, ponto de sela) da superfície em relação à origem do sistema cartesiano. Portanto, no estudo dessa variável visual é necessário reconhecer quem são os planos de simetria dessas superfícies e como esses pontos são definidos. A Tese do primeiro autor deste artigo trará esta discussão com mais detalhamento.

Além da variável visual que acabamos de expor também tomamos outras para o caso das quádricas padrão. As 3 subseções seguintes tratam dessas variáveis.

Interseções da superfície quádrica

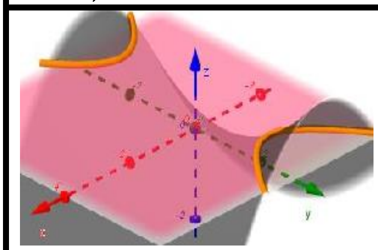
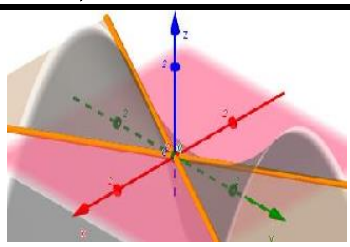
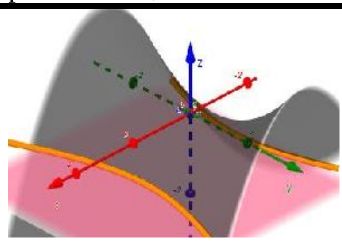
Entre as variáveis visuais que tomamos as mais importantes são as interseções com planos coordenados e com planos paralelos aos planos coordenados.[3] No primeiro caso, elas se dividem em interseção com o plano xy, interseção com o plano xz e interseção com o

[3] Para simplificar a escrita ao dizermos *interseções com planos* estamos nos referindo apenas às interseções com planos coordenados e com planos paralelos aos planos coordenados.

plano yz. No segundo caso, de forma análoga, elas também se dividem em 3. Em todas essas interseções sabemos que os valores visuais determinados são cônicas. Mesmo que contrarie a prática pedagógica recorrente, consideramos que todos os valores visuais determinados por todos esses casos de interseções (não apenas as curvas de nível) sejam reconhecidos, pois o desconhecimento dessas desconstruções dimensionais prejudica a visualização da quádrica no sistema cartesiano e, além disso, a identificação e diferenciação tanto entre os vários casos de quádricas quanto entre uma mesma quádrica em posições diferentes no sistema cartesiano.

Além disso, entendemos que a visualização de tais valores visuais (cônicas) pode ser custosa para os alunos devendo, assim, ser trabalhado no ensino. Como exemplo de tal custo, considere as figuras do Quadro a seguir em que estão registrados as interseções da sela de equação $z = -x^2 + y^2$ com planos de equação $z = k; k \in R$. Note que se $k = 0$, então o valor visual determinado nas interseções são retas concorrentes (cônica degenerada). Já nos demais valores reais de k os valores visuais determinados são hipérboles. Porém, a direção que essas hipérboles abrem muda conforme $k > 0$ ou $k < 0$. Iniciaremos com as unidades significantes dos elipsoides padrão.

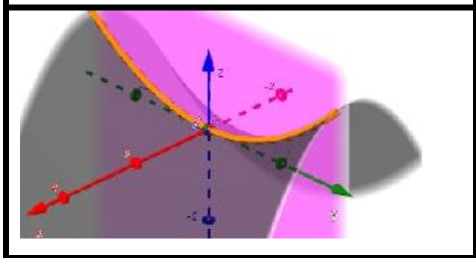
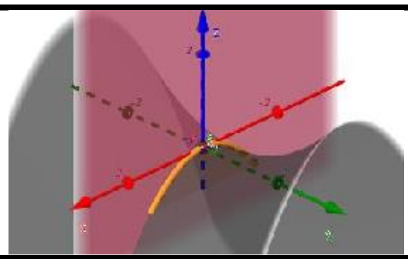
Quadro 2 - Interseções da sela de equação $z = -x^2 + y^2$ com planos de equação $z = k; k \in R$

Interseção da sela com o plano $\boldsymbol{z = k; k} > 0$	Interseção da sela com o plano $\boldsymbol{z = k; k = 0}$	Interseção da sela com o plano $\boldsymbol{z = k; k} < 0$
		

Fonte: Os autores

Ainda com relação à mesma sela, o Quadro a seguir representa no sistema cartesiano as interseções com os planos $x = k$ e $y = k; k \in R$. Note que em ambos os casos os valores visuais determinados são parábolas. Porém, em $x = k$ essas parábolas estão abrindo no sentido positivo do eixo enquanto que em $y = k$ as parábolas estão abrindo no sentido negativo do eixo.

Quadro 3 - Interseções da sela de equação $z = -x^2 + y^2$ com planos de equação $x = k$ e $y = k; k \in R$

Interseção da sela com o plano $\boldsymbol{x = k}$	Interseção da sela com o plano $\boldsymbol{y = k}$
	

Fonte: Os autores

Diante do que dissemos, a visualização de tais interseções deve ser considerada no ensino não se limitando, portanto, as curvas de nível. Porém, em função do tempo de sala de aula, propomos que o citado reconhecimento seja feita com o auxílio de algum *software*, como o GeoGebra que inclusive foi usado neste artigo, para apenas uma das posições que cada caso de quádrica padrão pode estar no sistema cartesiano. A partir daí, as interseções das quádricas que estão em outras posições padrão podem ser entendidas usando o recurso das *reflexões em torno de planos* (mais adiante discutiremos o potencial do GeoGebra e das reflexões).

Ainda com relação às interseções com planos, as correspondentes unidades significantes simbólicas são os termos quadráticos, os termos lineares, os sinais dos coeficientes desses termos e o valor numérico do termo independente (zero ou um) das equações das quádricas. Os quadros a seguir tratam do conjunto dessas unidades além de como elas estão combinadas. Neles, ao dizermos "termo quadrático com sinal positivo/negativo" queremos dizer que o coeficiente desse termo é positivo/negativo. De forma análoga, "termos quadráticos com sinais iguais e positivos" referem-se aos coeficientes desses termos. Essa forma de escrever é apenas para simplificar a comunicação.

Quadro 4 – Unidades significantes simbólicas das equações básicas dos elipsoides padrão

Registro básico simbólico do **elipsoide**[4]	1ºmembro da equação	2º membro da equação
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	3 termos quadráticos com sinais iguais e positivos	Um só termo igual a 1

Fonte: Os autores

[4] Termo *básico* é apenas para destacar que recorremos a unidades básicas significantes. Em todo este artigo estamos considerando que as equações estão expressas numa forma tal que: num dos membros da equação há apenas termos quadráticos; os numeradores dos coeficientes numéricos desses termos têm modulo igual a 1; no outro membro há apenas um termo linear com coeficiente igual a 1 ou apenas um termo numérico igual a 1 ou 0.

Sabemos que um hiperboloide de uma folha padrão pode estar em três posições diferentes no sistema cartesiano ($abrindo\ em\ z,\ em\ y\ ou\ em\ x$) e que conforme é essa posição há uma equação correspondente. Por isso há três equações para essa quádrica no Quadro 5. De forma análoga, esses comentários também valem para as demais quádricas seguintes.

Quadro 5 – Unidades simbólicas das equações básicas dos hiperboloides de uma folha padrão

Registro básico simbólico dos **hiperboloides de uma folha padrão**	1ºmembro da equação	2º membro da equação
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	3 termos quadráticos sendo 2 com sinais iguais e positivos e 1 com **sinal diferente** e negativo.	Um só termo igual a 1

Fonte: Os autores

Quadro 6 – Unidades simbólicas das equações básicas dos hiperboloides de duas folhas padrão

Registro básico simbólico dos **hiperboloides de duas folhas padrão**	1ºmembro da equação	2º membro da equação
$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	3 termos quadráticos sendo 2 com sinais iguais e negativos e 1 com sinal **diferente** e positivo.	Um só termo igual a 1

Fonte: Os autores

Quadro 7 – Unidades significantes simbólicas das equações básicas dos cones quádricos elípticos padrão

Registro básico simbólico dos c **quádricos elípticos padrã**	1ºmembro da equação	2º membro da equação
$+\frac{1x^2}{a^2}+\frac{1y^2}{b^2}-\frac{1z^2}{c^2}=0$ $+\frac{1x^2}{a^2}-\frac{1y^2}{b^2}+\frac{1z^2}{c^2}=0$ $-\frac{1x^2}{a^2}+\frac{1y^2}{b^2}+\frac{1z^2}{c^2}=0$	3 termos quadráticos sendo 2 com sinais iguais e positivos e 1 com sinal **diferente** e negativo. Se multiplicarmos as equações por (-1) teremos uma equação com 3 termos quadráticos sendo 2 com sinais iguais e negativos e 1 com sinal **diferente** e positivo. O que é importante é que em ambos os casos a variável com sinal diferente é a mesma.	Um só termo igual a 0

Fonte: Os autores

Quadro 8 – Unidades significantes simbólicas das equações básicas dos paraboloides elípticos padrão

Registro básico simbólico dos **paraboloides elípticos padrão**			1ºmembro da equação	2º membro da equação
$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$	$y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$	$x = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$	1 termo linear com coeficiente igual a 1	2 termos quadráticos com mesmo sinal (sinal **positivo)**
$z = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$	$y = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}$	$x = -\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$	Idem	2 termos quadráticos com mesmo sinal (sinal **negativo**)

Fonte: Os autores

Quadro 9 – Unidades significantes simbólicas das equações básicas dos paraboloides hiperbólicos padrão

Registro básico simbólico dos **paraboloides hiperbólicos padrão**			1ºmembro da equação	2º membro da equação
$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ $y = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$	$z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ $x = \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$	$y = \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}$ $x = -\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$	1 termo linear com coeficiente igual a 1	2 termos quadráticos com sinais opostos (1 positivo e o outro negativo)

Fonte: Os autores

Em todos os seis Quadros anteriores note ainda que não há repetição de variáveis. Didaticamente, diferente da prática de ensino recorrente em que se limita a apenas apresentar as equações como um todo, a partir das unidades significantes dos quadros anteriores é semioticamente importante reconhecer os elementos que constituem *conjunto das unidades simbólicas* da equação além de como é a *combinação* desses elementos na equação em questão. Em primeiro lugar, esse reconhecimento é fundamental para identificar as oposições qualitativas das diferentes equações das quádricas. Ademais, é desse conjunto/combinação que podemos analisar se haverá ou não os valores visuais elipses, hipérboles, parábolas ou cônicas degeneradas (o conjunto vazio; um ponto; uma única reta; um par de retas paralelas; um par de retas concorrentes) nas interseções com planos. Inclusive, podemos "prever" o que é definido na interseção de uma quádrica com um desses planos. Nesse caminho, podemos entender semioticamente por que os registros simbólicos e cartesianos (da superfície quádrica como um todo e das interseções determinadas) se correspondem da maneira como conhecemos. Por isso, algebricamente o conjunto/combinação das unidades significantes simbólicas das equações das quádricas são as condições semióticas que possibilitam as correlações entre as equações e as formas geométricas das quádricas.

Como vemos, para que o ensino das superfícies quádricas esteja em sintonia com a Abordagem de Interpretação Global sugerimos, principalmente, que o recurso das interseções com os planos esteja articulado à compreensão de que os valores visuais determinados (elipses; parábolas; ...) dependem ou são condicionados ao conjunto/combinação das unidades simbólicas que a equação correspondente possui. Esse reconhecimento é fundamental para a diferenciação tanto dos diferentes casos de quádricas quanto de uma quádrica em diferentes posições. Além disso, também propomos que ele seja combinado ao uso do GeoGebra e ao recurso das reflexões.

Algebricamente para o estudo da interseção de uma quádrica de equação Q com um dos planos coordenados ou com um dos planos paralelos aos planos coordenados costumasse substituir a equação do plano na correspondente variável de Q e, a seguir, fazer simplificações. Feito essa substituição sabemos que a variável da equação da quádrica que foi substituída pela equação do plano se *transformará* numa constante e, consequentemente, determinaremos uma equação com duas variáveis que irá se referir a uma das cônicas. No uso desse procedimento, mesmo que ele seja algébrico, pensamos que é relevante considerar sua interpretação geométrica. Apenas para simplificar a comunicação, chamaremos o referido de *procedimento P*. Como exemplo, para determinar algebricamente a interseção entre o plano de equação $z = 3$ e a quádrica de equação $z = -x^2 + y^2$, basta substituir a equação desse plano na variável z da equação da quádrica e, assim, ficamos com a equação $3 = -x^2 + y^2 \rightarrow -\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} = 1$. Note que essa última equação é tal que no primeiro membro há dois termos quadráticos com sinais opostos e no segundo membro há apenas o número 1, ou seja, trata-se das unidades significantes simbólicas de uma hipérbole. Logo, concluímos que na interseção em questão determinamos uma hipérbole contida no plano de equação $z = 3$. A primeira figura do Quadro 2 representa no sistema cartesiano essa interseção.

Retomando as questões semióticas mais amplas, no estudo das variáveis visuais interseções com planos consideramos que os tratamentos algébricas bem como sua interpretação geométrica presentes no *procedimento P* são as operações matemáticas responsáveis pela significação. Ao desprezá-los, ao invés de fazermos conversões nos limitamos a realizar trânsitos entre registros apenas em forma de codificações. Porém, em decorrência do tempo de sala de aula, em geral é impraticável realizar tais procedimentos de forma completa no estudo de todas as quádricas. Por isso, confrontando a citada relevância desses procedimentos com o tempo de sala de aula, sugerimos que eles sejam feitos de forma completa em apenas uma das quádricas. Para as demais, a partir de uma situação de institucionalização do conhecimento, podemos estender o uso de tais procedimentos sem realizá-los de forma completa. Nestes casos, mais do que apenas apresentar a equação como um todo, optamos em chamar a atenção para o conjunto/combinação das unidades significantes das equações de cada quádrica e, a partir daí, analisar quais são possibilidades de valores visuais (elipses; parábolas; ...) que podemos determinar nas interseções com planos. Insistimos que semioticamente é importante não se limitar a apenas realizar o *procedimento P* e, mais do que isso, durante esse procedimento entendemos que se deve deixar explícito aos alunos que os valores visuais determinados são condicionados ou dependem do conjunto/combinação das unidades simbólicas.

Como exemplo de aplicação que evidencia a relevância semiótica do conjunto/combinação das unidades significantes simbólicas das quádricas, considere a sela de equação $z = -x^2 + y^2$ em que já discutimos anteriormente algumas questões a respeito das interseções (veja os Quadros 2 e 3). A partir das unidades simbólicas dessa quádrica, responda: por que as interseções entre essa quádrica com qualquer um dos planos coordenados ou com qualquer um dos planos paralelos aos planos coordenados não determinam elipses na posição padrão ou transladada? Para responder a essa questão recorrendo aos elementos semióticos, inicialmente note que em $z = -x^2 + y^2$ as unidades significantes simbólicas são as seguintes: no primeiro membro da equação há um termo linear com coeficiente igual a 1; no segundo membro da equação há dois termos quadráticos com sinais opostos (1 positivo e o outro negativo). Além disso, sabemos que na equação canônica de uma elipse na posição padrão ou transladada devemos ter dois termos quadráticos com sinais iguais num dos membros da equação. Daí, é fácil "prever" que é impossível determinar elipses nas tais interseções. Isso se deve ao fato de que ao realizarmos o procedimento P em qualquer uma das variáveis da equação da quádrica nunca determinaremos dois termos quadráticos com sinais iguais num dos membros da equação o que é o suficiente para provar a citada impossibilidade.

Ainda nas interseções com planos já dissemos que os valores determinados são cônicas. Assim, conforme exemplificado no parágrafo anterior, no estudo das interseções podemos incluir as unidades significantes das cônicas nas análises dos valores visuais determinados.

Retomando as demais variáveis consideradas, também tomamos as interseções com os eixos coordenados como variáveis visuais. Nesse caso, elas se dividem em três: interseção com o eixo x; interseção com o eixo y; interseção com o eixo z. Daí há algumas questões interessantes do ponto de vista semiótico. Entre elas, para as quádricas padrão não cilíndricas e não degeneradas que têm termo independente igual a zero (cones quádricos elípticos padrão e paraboloides padrão) a interseção com os eixos x ou y ou z coincide com a origem do sistema cartesiano. Já quando esse termo é diferente de zero (elipsoides e hiperboloides) não há interseção com a origem. Portanto, para o caso das quádricas padrão não cilíndricas e não degeneradas o valor numérico do termo independente é uma unidade significante na identificação da interseção com a origem. Além disso, para os elipsoides e hiperboloides padrão as raízes quadradas dos denominadores dos termos quadráticos das equações canônicas determinam as coordenadas do(s) ponto(s) de interseção(ões) com os eixos coordenados. Para essas quádricas os sinais dos coeficientes dos termos quadráticos também são significativos sendo que quando eles forem positivos indica que há interseção com o correspondente eixo e quando eles são negativos indica que não há interseção com o eixo. No caso dessa variável, de forma análoga ao que dissemos para as interseções com planos, também é importante o estudo dos procedimentos algébricos subjacentes.

Variáveis visuais específicas dos elipsoides padrão

Especificamente para os elipsoides padrão, adotamos como variável visual a comparação entre o tamanho dos eixos (maior, médio e menor ou do diâmetro) e temos 3 valores visuais que são os seguintes: os 3 eixos são diferentes (chamaremos de *elipsoide em* α *e* β); 2 eixos são iguais e um é diferente (*esferoide*); os eixos são iguais (*superfície esférica*). Para cada um desses casos ainda adotamos outras variáveis visuais. Para o primeiro caso, tomamos a posição dos eixos maior, médio e menor em relação aos eixos coordenados como variável visual. Para o segundo tomamos duas variáveis visuais: a comparação entre o tamanho do eixo com medida diferente em relação ao outros dois com medidas iguais (podendo aquele ser maior – *esferoide alongado em* α - ou menor que estes iguais - *esferoide achatado em* α); a posição do eixo com medida diferente em relação aos eixos coordenados. Para o terceiro tomamos a medida do raio como variável visual.

Diante das variáveis visuais tomadas, considere o sistema cartesiano $\alpha\beta\gamma$ e note que nesse sistema os eixos coordenados são os eixos α, β e δ e que qualquer deles pode ser o eixo x, y ou z sempre, claro, diferentes entre si. Daí, destacamos explicitamente as correlações semióticas do quadro seguinte. É importante que tal destaque não seja negligenciado no ensino, pois tais correlações não são naturais e espontâneas.

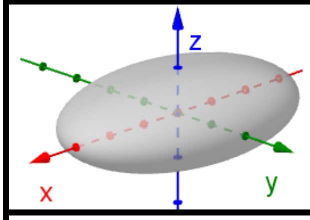
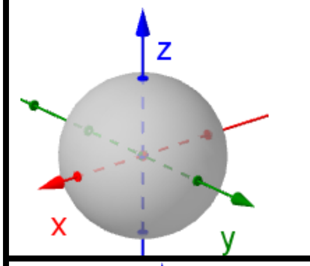
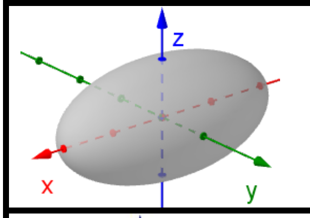
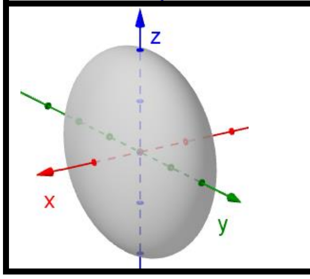
Quadro 10 – Variáveis visuais específicas dos elipsoides padrão

Registros básicos em língua natural	**Variáveis visuais**	**Unidades simbólicas correspondentes**
Elipsoide em α e β	- Os três eixos (maior, menor e médio) do elipsoide têm medidas diferentes; - e o eixo maior está contido no eixo α e o eixo médio está contido no eixo β. **Comentário:** por expansão discursiva o eixo menor está contido no terceiro eixo coordenado.	- Os denominadores dos três termos quadráticos são diferentes; - Entre os três termos quadráticos o maior denominador está sobre a variável α^2, o médio está sobre β^2 e o menor está sobre a outra variável quadrática.
Superfície esférica com $R = R_0$	- Os três eixos têm medidas iguais; - medida do raio R é R_0.	- Os denominadores dos três termos quadráticos são iguais; - o denominador de cada termo quadrático é numericamente igual ao quadrado da medida do raio.
Esferoide alongado em α	- Dois eixos têm medidas iguais e o terceiro eixo tem medida maior que os outros dois; - o eixo maior está contido no eixo α. **Comentário:** por expansão discursiva os eixos menores do elipsoide estão contidos nos eixos β e γ.	- Entre os três denominadores dos termos quadráticos, dois são iguais e o terceiro é maior que os outros dois; - entre os três termos quadráticos o maior denominador está sobre a variável α^2.
Esferoide achatado em α	- Dois eixos têm medidas iguais e o terceiro eixo tem medida menor que os outros dois; - o eixo menor está contido no eixo α. **Comentário:** por expansão discursiva os eixos maiores do elipsoide estão contidos nos eixos β e γ.	- Entre os três denominadores dos termos quadráticos, dois são iguais e o terceiro é menor que os outros dois; - entre os três termos quadráticos o menor denominador está sobre a variável α^2.

Fonte: Os autores

No quadro anterior vemos que nas variáveis visuais tomadas as unidades simbólicas correspondentes são provenientes da identificação dos denominadores dos termos quadráticos da equação e de relações ou operações envolvendo esses denominadores (relação de ordem; posição em relação às variáveis; raiz quadrada, ...). O Quadro a seguir apresenta alguns casos particulares dos tipos de elipsoides padrão aqui tratados.

Quadro 11 – Alguns exemplos dos tipos de elipsoide padrão

Registros cartesianos	**Registros básicos em língua natural**	**Registros básicos simbólicos**
	Elipsoide em x e y	$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+z^2=1$
	Superfície esférica com $R=1$	$x^2+y^2+z^2=1$
	Esferoide alongado em x.	$\frac{x^2}{4}+y^2+z^2=1$
	Esferoide achatado em x.	$x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}=1$

Fonte: Os autores

Diferentes posições padrão

Para os hiperboloides, os cones quádricos elípticos e os paraboloides padrão tomamos as *diferentes posições padrão*[5] como uma variável visual *importante*, mas pouco explorada no ensino. Essa variável se refere às diferentes posições que essas superfícies padrão

[5] Também se pode pensar em diferentes posições transladadas ou rotacionadas.

podem estar no sistema cartesiano. No caso dos elipsoides padrão as variáveis visuais que tomamos para eles também contemplam, mesmo que indiretamente, as diferentes posições padrão.

No caso dos hiperboloides, dos cones quádricos elípticos e dos paraboloides elípticos padrão diferenciaremos e reconheceremos as diferentes posições padrão tendo como base o eixo coordenado que as "elipses com eixos aumentando são perpendiculares". Essas cônicas são as que são determinadas nas interseções dessas quádricas com infinitos planos paralelos a um dos planos coordenados. Entendemos que visualmente é significativo o fato de que essas elipses (ou possivelmente cônicas degeneradas) aumentam o tamanho de seus eixos (ou do diâmetro no caso da elipse ser uma circunferência) à medida que essas interseções se afastam da origem. Com isso, temos a impressão de que as quádricas correspondentes estão abrindo e, por isso, as chamamos de "elipses com eixos aumentando". Chamaremos de eixo α o eixo coordenado perpendicular a esses planos (os que determinam as elipses). Para os paraboloides elípticos padrão essas elipses são determinadas apenas num dos sentidos do eixo α (apenas no sentido positivo que chamaremos de α_+ ou apenas no sentido negativo que chamaremos de α_-).[6] Diante da variável visual *diferentes posições padrão*, elaboramos explicitamente as correlações semióticas que sintetizamos no Quadro a seguir.

Quadro 12 – Variável visual diferentes posições padrão (hiperboloides; cones; paraboloide elípticos)

Registros básicos em língua natural	**Variável visual**	**Unidade simbólica correspondente**
Hiperboloide de uma folha/duas folhas/cone quádrico elíptico abrindo em $\boldsymbol{\alpha}$.	"Elipses com eixos aumentando perpendiculares" ao eixo coordenado $\boldsymbol{\alpha}$.	A variável quadrática $\boldsymbol{\alpha^2}$ tem coeficiente com sinal diferente das outras duas variáveis quadráticas.
Paraboloide elíptico abrindo em $\boldsymbol{\alpha_+}$.	Elipses com eixos aumentando perpendiculares ao semieixo $\boldsymbol{\alpha_+}$.	A variável linear é $\boldsymbol{\alpha}$; as variáveis quadráticas têm coeficientes com sinal positivo.
Paraboloide elíptico abrindo em $\boldsymbol{\alpha_-}$.	Elipses com eixos aumentando perpendiculares ao semieixo $\boldsymbol{\alpha_-}$.	A variável linear é $\boldsymbol{\alpha}$; as variáveis quadráticas têm coeficientes com sinal negativo.

Fonte: Os autores

[6] Podem-se obter elipses nas interseções dessas quádricas com planos *não* perpendiculares a um dos eixos coordenados. Porém, quando essas superfícies estiverem nas posições padrão ou transladadas usaremos os termos "elipses com eixos aumentando" apenas para as elipses determinadas nas interseções com planos que são perpendiculares a um dos eixos coordenados. Já para as posições rotacionadas usaremos os termos "elipses com eixos aumentando" apenas para as que são determinadas nas interseções com planos perpendiculares a um dos eixos de simetria dessas quádricas.

Para os paraboloides hiperbólicos padrão visualmente é relevante que as interseções dos com os planos coordenados determinam os seguintes objetos: um par de retas concorrentes; duas parábolas abrindo no mesmo eixo coordenado, mas em sentidos opostos. Para essas quádricas chamaremos o eixo que essas parábolas estão abrindo de eixo α e, dessa forma, uma dessas parábolas está abrindo sentido positivo de α (semieixo α_+) e a outra no sentido negativo de α (semieixo α_-). Assim, adotamos as seguintes convenções:

- Parábola assento[7] ou simplesmente assento é a que está abrindo em α_+;
- parábola estribo ou simplesmente estribo é a que está abrindo em α_-.

Daí, diferenciamos as diferentes posições padrão dos paraboloides hiperbólicos padrão tomando como base o semieixo coordenado que a parábola assento está abrindo além do plano que a contém (ou a determina pela interseção com a quádrica).

Diante do exposto, no sistema cartesiano $\alpha\beta\gamma$ considere o paraboloide hiperbólico padrão de equação $\alpha = \frac{\gamma^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2}$. Assim, elaboramos as correlações semióticas sintetizadas no quadro a seguir:

Quadro 13 – Variável visual diferentes posições padrão (paraboloide hiperbólicos - selas)

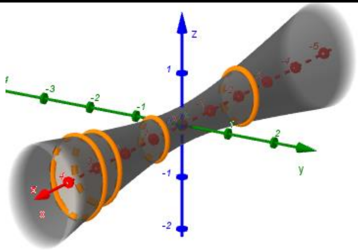
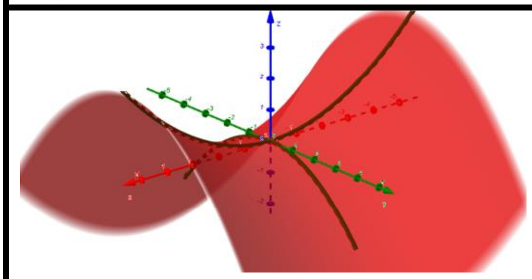
Registros básicos em língua natural	**Variáveis visuais**	**Unidades significantes simbólicas correspondentes**
Sela com assento abrindo em $\boldsymbol{\alpha}_+$ e contido em $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$.	- A parábola assento está abrindo em $\boldsymbol{\alpha}_+$; - a parábola assento está contida no plano de equação$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$. **Comentário:** Em decorrência da definição de parábola assento e estribo, temos as seguintes consequências imediatas determinadas por expansões discursivas: - A parábola estribo está abrindo em α_-; – a parábola estribo está contida no plano coordenado que é perpendicular ao plano de equação $\beta = 0$ (trata-se do plano coordenado de equação $\gamma = 0$).	- O termo linear é $\boldsymbol{\alpha}$; - o termo quadrático com coeficiente negativo é do tipo $(-\boldsymbol{\beta}^2)$. **Comentário:** por expansões discursivas: - O termo quadrático com coeficiente positivo é do tipo γ^2.

Fonte: Os autores

A título de exemplificação, o Quadro a seguir apresenta alguns casos particulares das diferentes posições padrão tratadas nessa subseção.

[7] Estamos concebendo que a parábola assento e a parábola estribo são objetos ideais enquanto que o assento e o estribo (parte da sela do cavalo em que se colocam os pés) são objetos reais. Estes objetos reais são apenas representações daqueles objetos ideais.

Quadro 14 – Alguns exemplos das diferentes posições padrão

Registros cartesianos	Registros básicos em língua natural	Registros básicos simbólicos
	Hiperboloide de uma folha abrindo em $\boldsymbol{x}$ **Comentário:** as "elipses com eixos aumentando são perpendiculares" ao eixo $\boldsymbol{x}$.	$-x^2 + y^2 + z^2 = 1$ **Comentário:** a variável quadrática $\mathbf{x^2}$ tem coeficiente com sinal diferente das outras duas variáveis quadráticas.
	Sela com assento abrindo em z_+ e contido em $y = 0$. **Comentário:** a parábola assento está abrindo no semieixo z_+e contido no plano de equação $y = 0$.	$z = x^2 - y^2$ **Comentários:** - O termo linear é $\boldsymbol{z}$; - o termo quadrático com coeficiente negativo é $(-\mathbf{y^2})$.

Fonte: Os autores

Perceba que no fundo as elipses com eixos aumentando e as parábolas assento são apenas interseções com planos. O que fizemos foi apenas atribuir nomes a essas interseções e usá-las como recurso para diferenciar as diferentes posições padrão. Além disso, explicitamos articulações semióticas entre os registros em língua natural, cartesiano e simbólico no estudo da variável visual em questão. Para a TRRS tais explicitações são fundamentais no ensino e não se deve esperar que elas sejam aprendidas naturalmente.

Propriedades que contribuem para a interpretação global

Além das variáveis visuais que tomamos, consideramos que o recurso das reflexões pode contribuir para a interpretação global de propriedades figurais. Particularmente o recurso das reflexões em torno dos planos de equação $x = 0, y = 0, z = 0, x = y, x = z$ ou $y = z$ permitem articular as diferentes posições padrão de uma mesma quádrica e, assim, temos uma visão global dessas posições. De maneira mais específica, dado uma das posições padrão de uma das quádricas podemos determinar as outras posições a partir de reflexões em torno desses planos. Com isso, as análises que fizermos para uma quádrica em uma de suas posições padrão poderão, mediante ajustes provenientes da reflexão, serem estendidas a essa mesma quádrica em suas outras posições padrão. Como exemplo, se soubermos as interseções do paraboloide elíptico abrindo em z_+ com os planos coordenados então, mediante as reflexões, também saberemos as interseções dos outros cinco paraboloides padrão com esses planos (veja os seis paraboloides padrão do Quadro 1). Dessa forma, pode-se otimizar o tempo de sala de aula e certamente o tempo de aprendizagem. Por isso, elencamos algumas propriedades algébricas a seguir que permitem o estudo das reflexões na perspectiva da TRRS.

Em um sistema de coordenadas xyz, considere as superfícies S_1 e S_2 de equações, respectivamente, E_1 e E_2. Valem as propriedades[8] seguintes:

- Se E_2 for obtida a partir da substituição de z por $(-z)$ em E_1, então S_2 é obtida de S_1 por reflexão em torno do plano xy;
- se E_2 for obtida a partir da substituição de y por $(-y)$ em E_1, então S_2 é obtida de S_1 por reflexão em torno do plano xz;
- se E_2 for obtida a partir da substituição de x por $(-x)$ em E_1, então S_2 é obtida de S_1 por reflexão em torno do plano yz;
- se E_2 for obtida a partir da substituição de x por y e de y por x em E_1, então S_2 é obtida de S_1 por reflexão em torno do plano de equação $x = y$;
- se E_2 for obtida a partir da substituição de x por z e de z por x em E_1, então S_2 é obtida de S_1 por reflexão em torno do plano de equação $x = z$;
- se E_2 for obtida a partir da substituição de y por z e de z por y em E_1, então S_2 é obtida de S_1 por reflexão em torno do plano de equação $y = z$.

Também elencamos, a seguir, algumas propriedades algébricas para o estudo das simetrias sendo que com elas podemos fazer algumas análises semióticas do ponto de vista das unidades significantes simbólicas. Considere uma superfície S de equação E com variáveis x, y e z. Valem os seguintes resultados:

Figura 1- Algumas propriedades de simetria

E não é modificada quando substituímos x, y e z por	**S é simétrica em relação ao**
$-x, y, z$	plano yz
$x, -y, z$	plano xz
$x, y, -z$	plano xy
$-x, -y, z$	eixo z
$-x, y, -z$	eixo y
$x, -y, -z$	eixo x
$-x, -y, -z$	origem

[8] Essas propriedades estão descritas resumidamente em Anton (2002, p. 237).

Fonte: Lehmann (2007, p. 347)[9]

Da aplicação das propriedades da Figura 1 podemos concluir que as quádricas padrão não cilíndricas e não degeneradas que têm como variáveis apenas três termos quadráticos são totalmente simétricos (elipsoides; hiperboloides; cones quádricos elípticos).[10] No caso das que têm apenas dois termos quadráticos e um termo linear (paraboloides) há simetria em relação a dois planos coordenados e a um eixo coordenado. Esse eixo será o eixo correspondente a variável linear e os planos são os que contêm esse eixo ou, em outros termos, são os que determinam por interseção esse eixo.

Com as propriedades de simetria também podemos verificar algebricamente se a quádrica está na posição padrão. No caso dos elipsoides, hiperboloides e cones quádricos elípticos para verificarmos se eles estão na posição padrão basta verificarmos se eles são totalmente simétricos em relação ao sistema cartesiano. Nos demais casos é suficiente verificar se dois dos planos coordenados são planos de simetria e se o vértice/ponto de sela coincide com a origem. O procedimento algébrico usado nesta última verificação se limita a averiguar se origem pertence à superfície quádrica.

O potencial do GeoGebra no ensino das superfícies quádricas

Do ponto de vista técnico o GeoGebra, criado por Markus Hohenwarter, é escrito em *JAVA* e tem a vantagem de ser uma multiplataforma e, com isso, pode ser instalado em computadores com *Windows*, *Linux* ou *Mac OS X*. Também se pode instalar o GeoGebra em *tablets* e *smartfones*. Além disso, possui versões em varias línguas - incluindo o português. Caso haja interesse, o GeoGebra está disponível em GeoGebra.org.

Com relação ao potencial de ensino do GeoGebra, vemos que ele permite propor Sequências de Ensino acerca das superfícies quádricas que estejam na perspectiva da TRRS, principalmente no diz respeito à Abordagem de Interpretação Global de Propriedades Figurais. Isso se deve ao fato de que, em primeiro lugar, com ele os alunos podem visualizar ao mesmo tempo os registros cartesianos, simbólicos e em língua natural das quádricas. Daí, com o uso de comandos e ícones simples ou diretamente com o mouse (ou com o toque), podemos, por exemplo, analisar o que acontece com os registros cartesianos ou figurais ao modificarmos os coeficientes do correspondente

---

[9] Modificamos um pouco a apresentação original de Lehmann (2007).

[10] Dizemos que uma superfície é totalmente simétrica em relação ao sistema cartesiano quando ela for simétrica em relação aos três planos coordenados, aos três eixos coordenados e à origem. Em Boulos (2010, p. 403) há um teorema que afirma que para que uma superfície seja totalmente simétrica em relação a um sistema cartesiano basta que ela seja simétrica em relação aos planos coordenados.

registro simbólico. Da mesma forma também podemos movimentar, ampliar, reduzir, modificar as cores, ... dos eixos e dos registros cartesianos ou figurais das quádricas. Com isso, é possível identificar as variáveis visuais e as unidades significantes correspondentes bem como articular/correlacionar essas variáveis cognitivas. Assim, o ensino pode dar mais ênfase aos aspectos qualitativos e cognitivos.

Em consequência de tais ferramentas interativas esse *software* tem o diferencial de que o citado processo de identificação e articulação pode ser feito com alunos de maneira dinâmica, autônoma e interativa a partir da instalação de um contexto de investigação em sala de aula em que, inclusive, é possível criar conjecturas de forma experimental. Temos, portanto, condições para que os alunos possam ocupar um espaço relevante no ensino e aprendizagem. Na Tese em andamento do primeiro autor deste artigo, uma pesquisa teórico e prática, e que tem o segundo autor deste artigo como orientador, haverá atividades que permitem uma abordagem nesse sentido. Porém, tais escolhas metodológicas, claro, estão condicionadas as compreensões e intenções do professor.

Outra possibilidade interessante no ensino das quádricas é que o GeoGebra permite criar *cenários*. Esses cenários são apenas arquivos desse *software* em que previamente já criamos representações de alguns objetos. Num cenário para os paraboloides elípticos padrão, por exemplo, é possível previamente representar os registros simbólicos e cartesianos dos seis paraboloides elípticos padrão, dos planos coordenados e dos planos paralelos aos planos coordenados. Conforme o interesse, os próprios alunos podem modificar qualquer um dos cenários. O próprio site do GeoGebra disponibiliza vários cenários. Também há outros materiais do GeoGebra em http://objetoseducacionais2.mec.gov.br.

No que concerne ao tempo, o GeoGebra permite otimizar o tempo de sala de aula e certamente o tempo de aprendizagem dos alunos. Em especial destacamos que com ele podemos visualizar todas as interseções com planos e todas as posições padrão de cada quádrica de maneira muito rápida.

Quanto aos limites, deve-se estar atento ao fato de que o GeoGebra pode cometer falhas ao medir ângulos ou até mesmo ao esboçar gráficos. Vejamos, por exemplo, que o registro cartesiano de $f(x) = (x^2 - 4){:}\,(x - 2); x \neq 2$ dado em algumas versões do GeoGebra é uma reta que inclui de maneira equivocada o ponto de coordenadas $(2, 4)$.

Outro limite importante no uso do GeoGebra é que ele não é capaz de plotar gráficos de superfícies mais sofisticadas. Porém, estudos no sentido de sanar esses problemas e outros que possam surgir têm sido feitos constantemente.[11]

Destacamos ainda que o GeoGebra é um *software* com *ênfase* no Ensino de Matemática e não na produção de conhecimentos Matemáticos.[12] Por isso, até o momento, ele não disponibiliza ferramentas sofisticadas, sobretudo em R^3, para efetuar cálculos matemáticos. Nesse sentido, destacamos que Métodos Numéricos, muito usados nas Engenharias, não são explorados de maneira intensa no GeoGebra.

Considerações finais

Neste artigo demos indícios da complexidade das quádricas em relação as dimensões epistemológica, cognitiva e didática. Nesses aspectos incluem-se identificações, delimitações e regras de articulações entre distintos registros e, perpassando por tudo isso, há uma ampla rede conceitual. A escolha do que e como abordar tais questões no ensino depende de variáveis como o tempo de sala de aula, objetivos, métodos e compreensões do professor e, ainda, motivações ou necessidades dos alunos.

Especificamente no caso da variável visual "diferentes posições padrão" os valores visuais mudam conforme o tipo de quádrica. Conforme detalharemos a seguir, trata-se de muitos casos de valores visuais que, mesmo que contrarie a prática pedagógica recorrente, sugerimos que sejam explorados no ensino. No caso dos hiperboloides de uma folha, duas folhas e cones quádricos elípticos eles assumem 3 valores visuais. Para chegar a tal conclusão perceba que no sistema cartesiano xyz as elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao eixo x, ou ao eixo y ou ao eixo z. Do ponto de vista algébrico note que a unidade significante simbólica correspondente é o termo quadrático com sinal diferente. Essa, por sua vez, recorre a outras duas unidades significantes: que sinal é esse (positivo ou negativo)? Que variável quadrática é essa? Para os paraboloides elípticos tal variável visual assume 6 valores visuais. Basta notar que no sistema cartesiano xyz as elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao semieixo x_+, ou x_-, ou y_+, ou y_-, ou z_+ ou z_-. Nesse caso as unidades significantes simbólicas correspondentes são a variável linear e o sinal dos coeficientes dos termos quadráticos. Quando esse sinal for

[11] Para acompanhar o desenvolvimento desses estudos há vários fóruns que, por exemplo, podem ser encontrados em www.GeoGebra.org.

[12] Estamos entendendo por *softwares* de Ensino de Matemática os que têm como objetivo principal contribuir com o processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

positivo as elipses são perpendiculares ao semieixo α_+ e quando eles forem negativos elas são perpendiculares ao semieixo α_-. Assim, na posição padrão temos 3 tipos de paraboloides elípticos abrindo em α_+ e 3 tipos de paraboloides elípticos abrindo em α_-. No caso dos paraboloides hiperbólicos padrão, na variável visual agora analisada assume seis valores visuais. Para chegar a tal número perceba que para definirmos a parábola assento precisamos articular as seguintes variáveis visuais dessa cônica: em que semieixo positivo o assento ela está abrindo (1)? Qual o plano coordenado contém o assento (2)? No caso das selas padrão que estão no sistema cartesiano xyz, para a variável (1) tem os seguintes valores visuais: semieixo x_+; semieixo y_+; semieixo z_+. Já para a variável (2) tem os seguintes valores visuais: plano xy de equação $z = 0$; ou plano xz de equação $y = 0$; ou plano yz de equação $x = 0$. Articulando os valores de (1) e (2), temos as seguintes seis possibilidades para a posição da parábola assento: abrindo em x_+ e contida em $z = 0$; abrindo em x_+ e contida em $y = 0$; abrindo em y_+ e contida em $z = 0$; abrindo em y_+ e contida em $x = 0$; abrindo em z_+ e contida em $x = 0$; abrindo em z_+e contida em $y = 0$. As unidades significantes simbólicas correspondentes a essas duas variáveis visuais são, respectivamente, as seguintes: qual variável é linear? Qual variável quadrática tem sinal negativo?

Em relação às possibilidades de elipsoides padrão, também pouco explorados no ensino, considerando as variáveis visuais específicas que a eles que tomamos, temos 6 possibilidades para os *elipsoides em α* e β, 3 *elipsoides alongados em α*, 3 *elipsoides achatados em α* além da *superfície esférica*.

No ensino, sugerimos como recurso didático principalmente o uso das interseções com planos articulado a compreensão de que os valores visuais determinados (elipses; parábolas; hipérboles; cônicas degeneradas) dependem ou são condicionados ao conjunto/combinação das unidades simbólicas que a equação correspondente possui. Não obstante, mesmo que os livros didáticos e os docentes utilizem essas interseções como recurso para o ensino das quádricas, infelizmente é negligenciado as articulações semióticas e, assim, ou fica a cargo do aluno a identificação/correlação de tais unidades significantes ou elas não são reconhecidas. Assim, sem a identificação das regras de funcionamento semiótico, que temos como base não serem compreendidas de forma natural ou espontânea, certamente comprometesse a aprendizagem integrativa e duradoura dos alunos.

Também sugerimos o uso do GeoGebra no ensino das quádricas. Nossa justificativa se deu principalmente pelo fato de que com ele temos potencial para trabalhar em sintonia com a TRRS com o diferencial da forma interativa, dinâmica e participativa permitida aos alunos. Porém, em decorrência de outras justificativas e até do surgimento de novas tecnologias outros *softwares* podem ser escolhidos.

Uma questão que pode ser discutida no ensino das quádricas, que certamente envolvem variáveis visuais específicas, são as superfícies de rotação. Limitamo-nos a comentar que podemos analisá-las semioticamente a partir do procedimento P e tendo os denominadores das equações como unidades significantes simbólicas.

Referências bibliográficas

ANTON, Howard. **Cálculo:** um novo horizonte. v. 2. 6. Ed. Porto Alegre: Bookman, 2002. 552 p. Tradução: Cyro de Carvalho Patarra; Márcia Tamanaha.

BOULOS, Paulo; CAMARGO, Ivan de. **Geometria Analítica:** um Tratamento Vetorial. Makron Books, 2010.

CORRÊA, Madeline Odete Silva; MORETTI, Méricles Thadeu. Esboçando curvas de funções a partir de suas propriedades figurais: uma análise sob a perspectiva dos registros. In: BRANDT, Célia Finck; MORETTI, MériclesThadeu. (Orgs). **As contribuições da Teoria dos Registros de Representações Semióticas para o Ensino e a Aprendizagemna Educação Matemática**. Ijuí: Ed. Unijuí, 2014.

DUVAL. Registros de representações semióticos e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. P. 11- 33. In: Machado, Silvia D. A. (Orgs). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. Campinas: Papirus. 2003.

______. **Semiósis e pensamento humano:** registros semióticos e aprendizagens intelectuais (fascículo I). São Paulo: Livraria da Física, 2009. 120 p. (Coleção contextos da ciência). Tradução de: Lênio Fernandes Levy; Marisa Rosâni Abreu da Silveira.

______. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. **REVEMAT**, Florianópolis, v.6, n.2, p.91-112, 2011a. Tradução Méricles Thadeu Moretti. Disponível em: http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat. Acesso em: 20 ago. 2013.

______.**Ver e ensinar a matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. São Paulo: PROEM, 2011b. 160 p. Tradução: Marlene Alves Dias.

LEHMANN, Charles H.. **Geometria analítica.** 8. ed. 1. imp. São Paulo: Globo, 2007. Tradução de: Ruy Pinto da Silva Sieczkowski.

LEITHOLD, Louis. **O cálculo com geometria analítica.** 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994. Tradução de: Cyro de Carvalho Patarra. Revisão técnica de: Wilson Castro Ferreira Júnior e Sílvia Pregnolatto.

MORETTI, Méricles Thadeu**.** A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais. In: **Aprendizagem em Matemática:** registros de representação semiótica. (Org.) Sílvia Dias Alcântara Machado. Campinas: Papirus, 2003.

MORETTI, Méricles Thadeu;THIEL, Afrânio Austregéliso. O ensino de matemática hemético: um olhar crítico a partir dos registros de representação semiótica. **PRÁXIS EDUCATIVA**, Ponta Grossa, Paraná, v.7, n.2, p.379-396, 2012.

SILVA, Sérgio Florentino da; MORETTI, Méricles Thadeu. Registros em língua natural das superfícies quádricas: análise semiótica e possibilidades de uso de novos registros. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v.20, n.1, pp. 294-314, 2018.

WINTERLE, Paulo. **Vetores e geometria analítica.** São Paulo: Pearson Makron Books, 2000. 232 p.

Texto recebido: 14/02/2018
Texto aprovado: 01/05/2018