EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i1p049-068

Estudio de la derivada parcial por medio de las aprehensiones en el registro gráfico de funciones de dos variables con estudiantes de ingeniería

Study of the partial derivate by the apprehensions in the graphic register of functions of two variables with engineering students

---

KATIA VIGO INGAR [1]
MARIA JOSÉ FERREIRA DA SILVA [2]

Resumen

Considerando la importancia de los conocimientos que la representación gráfica de funciones de dos variables proporciona para aplicaciones en cursos de ingeniería presentamos en este artículo una situación didáctica que es parte de la secuencia didáctica de un doctorado. La investigación se desarrolló como una investigación cualitativa del tipo ingeniería didáctica y tenía como objetivo desarrollar, en los estudiantes de segundo año de ingeniería, la visualización, de acuerdo con Duval, investigando, principalmente, las articulaciones de las aprehensiones en el registro gráfico en un Sistema Algebraico Computacional (CAS). Constatamos que la articulación de las aprehensiones en el registro gráfico permitió a estudiantes de ingeniería conjeturar propiedades de funciones de dos variables, cuando, por ejemplo, el estudiante aplica esas nociones a problemas de optimización como es el caso aquí presentado.

Palabras-clave: *Visualización; Aprehensiones en el Registro gráfico; Ingeniería didáctica.*

Abstract

Considering the importance of the knowledge that the graphical representation of functions of two variables provides for applications in engineering courses we present in this article a didactic situation that is part of the didactic sequence of a doctorate. The research was developed as a qualitative research of the type didactic engineering and had as objective to develop, in the students of second year of engineering, the visualization, according to Duval, researching, mainly, the articulations of the apprehensions in the graphic register in a computational algebraic system (CAS). We note that the articulation of the apprehensions in the graphic register allowed engineering students to conjecture properties of functions of two variables, when, for example, the student applies those notions to problems of optimization as is the case here presented.

Keywords: *Visualization; Apprehensions in graphic register, Didactic engineering.*

[1] Doctora en Educación Matemática: Pontificia Universidad Católica de São Paulo (PUCSP), Brasil, Instituição; Universidad Nacional del Callao, Perú. kvingar@gmail.

[2] Doutora em Educação Matemática: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP, Instituição; Pontifícia Universidade Católica de São Paulo Brasil. zeze@pucsp.br .

Introducción

El cálculo en varias variables es, en algunos aspectos, un curso de geometría diferencial clásica en tres dimensiones, porque es el estudio de propiedades locales de superficies, que entendemos son aquellas que dependen únicamente del comportamiento de la superficie en el entorno de un punto. Los métodos que han demostrado por sí mismos adecuados para el estudio de esas propiedades son los del cálculo infinitesimal; por este motivo, las superficies estudiadas en geometría diferencial están representadas por funciones que pueden diferenciarse un cierto número de veces. Dicho lo anterior, estamos de acuerdo con Zimmerman y Cunningham (1991) cuando afirman que las derivadas parciales, las derivadas direccionales, el gradiente, los planos tangentes, las curvas de nivel y las técnicas para formular integrales iteradas están motivados geométricamente.

Con respecto a la enseñanza y el aprendizaje de la derivada parcial y su uso en el estudio de los valores extremos locales y punto de silla, la representación de este objeto, el tratamiento y la conversión entre registros, el algebraico y el gráfico, son frecuentes en las prácticas del profesor de matemática, cuando por medio de tratamientos en el registro algebraico soluciona un problema o cuando pretende hacer que el estudiante de ingeniería comprenda esa noción de difícil entendimiento, por medio de una ilustración (una representación icónica). En el momento en que el profesor realiza esa conversión, no significa que él logre que el estudiante visualice una relación entre los dos registros que movilizó.

Más aún, en la mayoría de libros didácticos que analizamos (INGAR, 2014), la conversión de la representación algebraica de la derivada parcial para su representación en el registro gráfico a fin de estudiar los valores extremos locales y el punto de silla, no es explorada con frecuencia; sino que es realizada sólo para ilustrar esos valores y para que el estudiante vea una representación icónica de esos valores y del punto silla, sin explicar el proceso que permite la visualización de esos valores.

A lo anterior se suma el hecho de que el estudio de las funciones de dos variables está teniendo un progresivo desarrollo, como muestran los trabajos de Yerushalmy (1997), Kabel (2009), Montiel, Wilhelmi, Vidakovic y Elstak (2009), Trigueros y Martínez-Plannel (2010-2011) y Xhonneux (2011) desde los marcos teóricos de la teoría APOS (Acción, Proceso, Objeto, Esquema), Registros de Representación Semiótica (RRS), el enfoque Ontosemiótico y la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), aunque son escasos los estudios respecto al proceso de visualización en el área del cálculo en dos variables. Así lo muestran los trabajos de Zimmermann y Cunningham (1991), Guzmán (1996) y Duval (1999). Para Zimmermann y Cunningham (1991), el término visualización describe el proceso de producción o el uso de representaciones geométricas o gráficas de conceptos matemáticos, principios o problemas, por medio de un diseño a mano o generado por computador. Según los autores, las ciencias, la ingeniería y las matemáticas, están disfrutando un renacimiento del interés en la visualización. Es más, afirman que,

> en la visualización lo que interesa es precisamente la capacidad del estudiante para diseñar un diagrama apropiado (con lápiz y papel o en algunos casos con un computador) para representar un concepto matemático o problema y utilizar un diagrama para la obtención de la comprensión, y como una ayuda en la resolución de problemas (ZIMMERMANN, CUNNINGHAM, 1991, p.3).

En la misma línea, y haciendo énfasis en el modo de producción de esas representaciones, Guzmán (1996, p. 1) asevera que

> Las ideas, conceptos y métodos de la matemática presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geométricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de problemas del campo.

Sin embargo, en este contexto, adoptaremos la visualización como una noción fundamental para la comprensión de la matemática, en vista de que Duval (1999) afirma que no hay comprensión sin visualización, puesto que ella permite una aprehensión completa de cualquier organización de relaciones entre unidades de representación. A modo de ejemplo, de acuerdo con Ingar y Silva (2015) cuando tratamos de comprender una representación de una función de dos variables en el registro gráfico, esas unidades llamadas variables visuales, serían el eje de la superficie y los cortes en el plano xy, la intersección con el origen de coordenadas y los cortes con los planos coordenados.

Razón por la cual nos propusimos estudiar la visualización del registro gráfico de ese tipo de funciones, pues, de acuerdo con Kashefi et al. (2010), la falta de su comprensión causará obstáculos en el aprendizaje de otros conceptos que involucren este tipo de función. Además, en la mayoría de los libros de texto, utilizados por los estudiantes de ingeniería, la representación de funciones de dos variables en el registro gráfico, tienen como propósito sólo ilustrar el gráfico de la función, pero no son explicados los procedimientos que permiten la visualización de dicha función.

Así, el propósito del artículo es el análisis de una situación didáctica a partir de la visualización e investigar las articulaciones de las aprehensiones en el registro gráfico en el Sistema Algebraico Computacional *(CAS)* que realizaron los estudiantes de ingeniería del segundo año de estudios, tomada de Ingar y Silva (2016), en el aprendizaje de la derivada parcial y su uso, para encontrar el valor máximo local de una función de dos variables. Así, presentamos, a continuación, la fundamentación teórica del trabajo, a metodología, el análisis de una situación didáctica y, finalmente, nuestras consideraciones.

Fundamentación teórica

Según Duval (2004), las representaciones gráficas cartesianas tienen un uso relativamente extenso, debido a que no solamente son encontradas en los manuales o artículos, sino también en las revistas. Esos gráficos pueden ser vistos de dos maneras: una puntual, que indica un valor en un momento dado, y otra icónica, que evoca lo alto y lo bajo, las subidas suaves o abruptas a partir de un nivel de base. Sin embargo, para el autor, ninguna de esas formas de ver corresponde a la manera útil de ver desde el punto de vista matemático, es decir, existe una tercera manera de ver que permite visualizar una relación entre dos conjuntos de valores de diferentes registros de representación semiótica.

El autor afirma que, en cada una de estas tres maneras de ver, distinguimos lo que se observa en el gráfico cartesiano y lo que los aspectos observados permiten identificar. Uno de los problemas específicos del aprendizaje es, cómo hacer pasar a los estudiantes de una aprehensión local e icónica a una aprehensión global cualitativa, pues solamente con este último tipo de aprehensión es que podemos hacer la coordinación con el registro algebraico y sus relaciones con el registro gráfico, pudiendo así los gráficos cartesianos funcionar como una visualización.

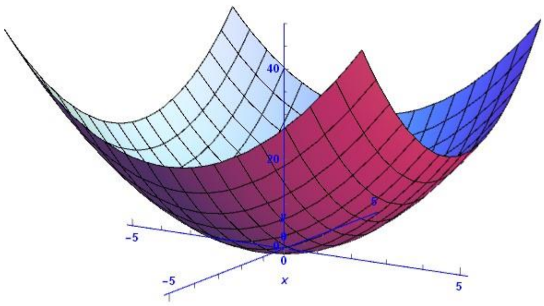
Visualizar un gráfico requiere una interpretación de una representación gráfica. Según el autor, para esa interpretación, es importante la discriminación de las variables visuales, exponiendo esa representación a todas las variaciones posibles, con la condición de que las formadas de ese modo continúen teniendo sentido. Así, buscamos en Duval (1994), la noción de aprehensión de una figura geométrica para estudiar y comprender esas posibles variaciones en el registro gráfico, particularmente en el registro gráfico de funciones de dos variables reales, cuando construimos el concepto y propiedades de los valores extremos locales.

Aprehensión en el registro gráfico de funciones de dos variables

Existen cuatro formas de aprehender una figura: la perceptiva, la discursiva, la secuencial y la operatoria. La aprehensión perceptiva es aquella que permite identificar o reconocer una forma o un objeto matemático. Para Duval, "la aprehensión perceptiva tiene la función epistemológica de identificación de los objetos en dos o tres dimensiones. Esto es, hecho por procesos cognitivos efectuados automáticamente, y así, de forma inconsciente" (DUVAL, 1994, p.124).

Respecto a la representación de una función de dos variables en el registro gráfico, Ingar (2014) establece que la aprehensión perceptiva del gráfico *CAS* (representación de una función de dos variables en el registro gráfico utilizando el *Mathematica*), por ejemplo, mostrado en la figura 1, permite identificar un paraboloide cumpliendo la función epistemológica de identificación de objetos, como afirma Duval (1994).

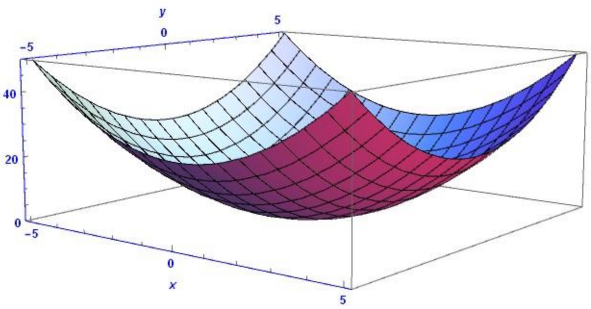
Figura 1 - Aprehensión perceptiva de un registro gráfico CAS



Fuente: Ingar, 2014, p.56

Desde el punto de vista cognitivo, la autora afirma que esa aprehensión requiere más del estudiante que lo que requiere la aprehensión perceptiva del cuadrado, por ejemplo, debido a que en este registro gráfico se observa, además de los ejes coordenados, el tipo de variable (dos independientes y una dependiente), los valores de las variables x, y, z, la lectura de los ejes coordenados y las puntas, lo que nos permite aseverar que la aprehensión perceptiva del registro gráfico *CAS* es más compleja que la aprehensión perceptiva de una figura en la geometría. Esta afirmación es más evidente, según la autora, cuando la aprehensión perceptiva del gráfico *CAS_MATH* mostrado en la figura 2 permite identificar las mismas características anteriormente mencionadas, pero requiere más recursos cognitivos por parte del estudiante como, por ejemplo, la construcción del sistema cartesiano R^3, propio del *software Mathematica*, cuya representación no es la canónica.

Figura 2 – Aprehensión perceptiva de un registro gráfico *CAS_MATH*

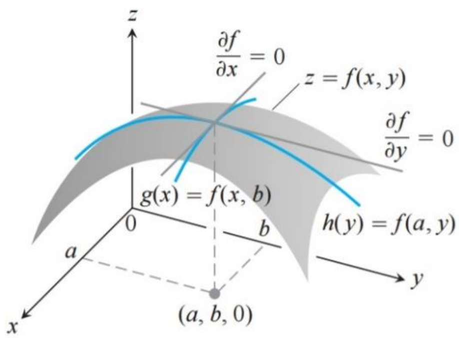


Fuente: Ingar, 2014, p.56

Por lo que se refiere a que los gráficos muestran puntas, los estudiantes no perciben que los gráficos son seccionados por planos cuyas representaciones son invisibles y son determinados lateralmente por los extremos del dominio de la función representado en el *Mathematica* y superiormente por el mayor valor de la función en ese dominio. De ahí que, coincidimos con Trigueros y Martínez (2010) y Henriques (2006) cuando afirman que la comprensión de gráficos y construcción del concepto de funciones de dos variables no es fácil para los estudiantes, además de la interpretación de gráficos y la determinación de su dominio y rango.

La aprehensión discursiva de una figura, para Duval (1994), explica propiedades matemáticas de la figura, como aquellas indicadas por una leyenda o por las hipótesis, que se configura como explicaciones de naturaleza deductiva con la función epistemológica de demostración. En la representación de una función de dos variables en el registro gráfico, Ingar (2014) afirma que la aprehensión discursiva describe propiedades matemáticas del registro gráfico considerando la semántica de las propiedades del objeto con la función de formular conjeturas para la construcción del conocimiento. A modo de ejemplo, en la figura 3, describimos las propiedades del valor máximo local en el punto $(x_{0,}y_0)$.

Figura 3 – Aprehensión discursiva del registro gráfico



La función representada por $f(x, y)$ tiene un máximo local en un punto interior (a, b) de su dominio y sus derivadas parciales existen en (a, b). Las curvas representadas por $g(x) = f(x, b)$ tiene un extremo local en $x = a$ y $h(y) = f(a, y)$ tiene extremo local en $y = b$ luego $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$.

Fuente: Thomas, 2005, p.1028

La aprehensión secuencial, según Duval (1994), es requerida siempre que se desea construir una figura o describir su construcción, y trata del orden de construcción de una figura. Ese orden, no sólo depende de las propiedades matemáticas de la figura, sino también de las herramientas técnicas utilizadas (la regla y el compás).

En la representación de una función de dos variables en el registro gráfico, Ingar (2014) afirma que la aprehensión secuencial es una secuencia de pasos para graficar una función y resalta que, si representamos la función en el registro gráfico con apoyo de un software, por el ejemplo para construir el registro gráfico *CAS* o el registro gráfico *CAS_MATH*, no sólo precisamos conocer las herramientas técnicas utilizadas, es decir, el menú de comandos del software y su sintaxis, sino también requerimos los conocimientos matemáticos del usuario para estar en continua dialéctica con las representaciones semióticas propias del software. Precisamente las instrucciones del paso 1 al paso 5 repasadas y exploradas explícitamente, favorecerían la comprensión del concepto de función relacionado a su dominio.

Por ejemplo, conforme se muestra a continuación, escribimos los comandos necesarios del *software Mathematica* para descubrir secuencialmente y localizar el mínimo local en el registro gráfico *CAS_MATH* de una función de dos variables (figura 4).

Paso 1: Escribir el comando, $Plot3D[Sen[x] + Sin[y] + Sin[x + y], \{x, 0{,}7\}, \{y, 0{,}7\}, Axeslabel \rightarrow$ {X",Y"}, $LabelStyle \rightarrow Directive[Blue, Bold], AxesOrigin \rightarrow \{0{,}0{,}0\}, Boxed \rightarrow False, PlotTheme \rightarrow$ Scientific, $AxesStyle \rightarrow Directive[Blue, 12]]$, para graficar una función de dos variables.

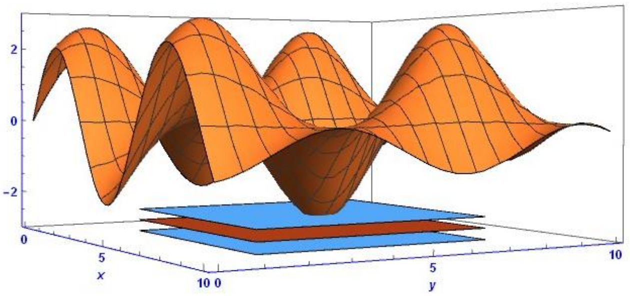
Paso 2: Escribir el comando, ContourPlot3D $[z == -3, \{x, 2{,}8\}, \{y, 2{,}8\}, \{z, -6{,}2\}, Axeslabel \rightarrow$ {X",Y"}, $LabelStyle \rightarrow Directive[Blue, Bold], AxesOrigin \rightarrow \{0{,}0{,}0\}, Boxed \rightarrow False, PlotTheme \rightarrow$ "Classic", $AxesStyle \rightarrow Directive[Blue, 12], Mesh \rightarrow None]$, para graficar el plano horizontal representado por $z = -3$.

Paso 3: Escribir el comando, $\text{ContourPlot3D}[z == -2{,}7, \{x, 2{,}8\}, \{y, 2{,}8\}, \{z, -6{,}2\}, Axeslabel \rightarrow \{\text{X","Y"}\}, LabelStyle \rightarrow Directive[Blue, Bold], AxesOrigin \rightarrow \{0{,}0{,}0\}, Boxed \rightarrow False, PlotTheme \rightarrow \text{"Web"}, AxesStyle \rightarrow Directive[Blue, 12], Mesh \rightarrow None]$, para graficar el plano horizontal representado por $z = -2{,}7$.

Paso 4: Escribir el comando, $\text{ContourPlot3D}[z == -2{,}4, \{x, 2{,}8\}, \{y, 2{,}8\}, \{z, -6{,}2\}, Axeslabel \rightarrow \{\text{X","Y"}\}, LabelStyle \rightarrow Directive[Blue, Bold], AxesOrigin \rightarrow \{0{,}0{,}0\}, Boxed \rightarrow False, PlotTheme \rightarrow \text{"}Classic\text{"}, AxesStyle \rightarrow Directive[Blue, 12], Mesh \rightarrow None]$, para graficar el plano horizontal representado por $z = -2{,}4$.

Paso 5: Escribir el comando $Show[S1, P1, P2, P3]$ para representar en un único gráfico tanto la superficie, S1, como el conjunto de planos, {P1,P2,P3}, hasta tener la aprehensión perceptiva del posible valor mínimo. Hecho que sucede cuando el plano horizontal es tangente a la función de dos variables.

Figura 4 – Aprehensión secuencial del mínimo absoluto de una función de dos variables.



Fuente: Ingar, 2014, p.59

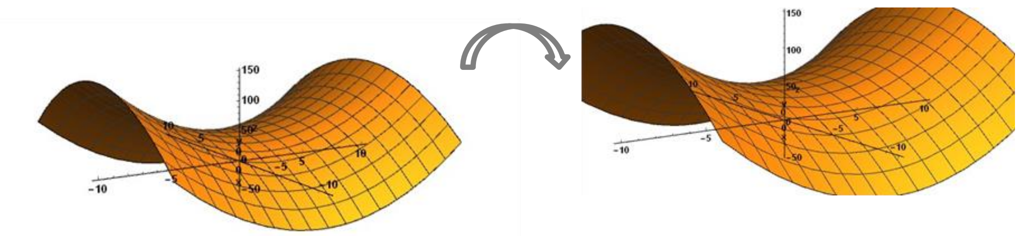
Observamos en la Figura 4 que la aprehensión secuencial de construcción de planos horizontales muestra un patrón, lo que permite conjeturar que la función de dos variables representada algebraicamente por $f(x,y)=x^3-3xy+y^3$ tiene un mínimo absoluto en el punto (0,0) puesto que por la aprehensión perceptiva, el plano representado por z=0 es tangente a la superficie en ese punto.

Para Duval (1994), la aprehensión operatoria corresponde a la transformación y modificación de una figura inicial en otras posibles figuras y en la organización perceptiva de esas modificaciones para mostrar la idea de una solución de una determinada situación problema. Su función es de exploración heurística, porque frecuentemente la figura geométrica es transformada en otras para mostrar una idea de la solución de un problema o una demostración. El autor distingue tres tipos de modificaciones que pueden ser de la misma forma y orientación, pero con variación de tamaño (modificaciones ópticas); del mismo tamaño y forma, pero con variación de orientación: rotación, traslación (modificaciones posicionales); y de descomposición y recomposición (modificaciones mereológicas), buscando reciprocidad entre el diseño y la representación mental.

En la representación de una función de dos variables en el registro gráfico, Ingar (2014) afirma que la aprehensión operatoria en el registro gráfico es la transformación o modificación de un gráfico inicial en otros gráficos para mostrar la idea de una solución de un problema con la misma función de exploración heurística, porque permite elaborar conjeturas para resolver el problema. La autora afirma que esta exploración heurística es posible con el apoyo del software, puesto que este permite el dinamismo del registro gráfico, lo que no es posible con el gráfico hecho con lápiz y papel, sobre todo cuando se grafica funciones de dos variables.

La investigadora distingue tres modificaciones: óptica, posicional y mereológica. La modificación óptica implica variación de tamaño y constancia de forma. Ocurre cuando, presionando la tecla *Ctrl* y clicando el botón izquierdo del mouse, movemos físicamente el mouse y manipulamos el gráfico de tal manera que lo ampliamos o lo reducimos. Por ejemplo, en la figura 5, tenemos la ampliación del gráfico.

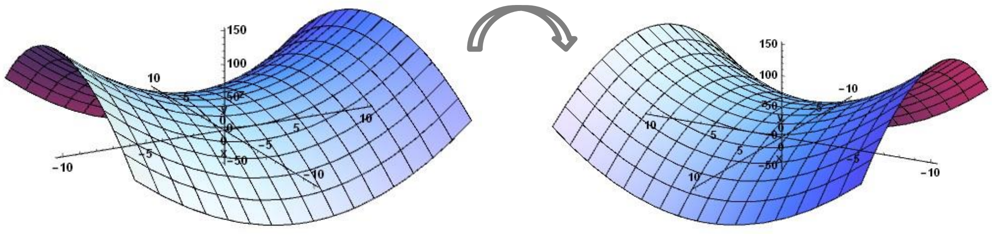
Figura 5 – Modificación óptica



Fuente: Ingar, 2014, p.60

La modificación posicional ocurre cuando se mantiene el mismo tamaño y forma, pero se varía la posición. Esto tiene lugar cuando, por medio de movimientos físicos del mouse, podemos rotar el gráfico alrededor el eje z, rotarlo alrededor el plano xy y trasladarlo. Por ejemplo, la figura 6 muestra la rotación del gráfico *CAS* alrededor del eje z.

Figura 6 – Modificación posicional

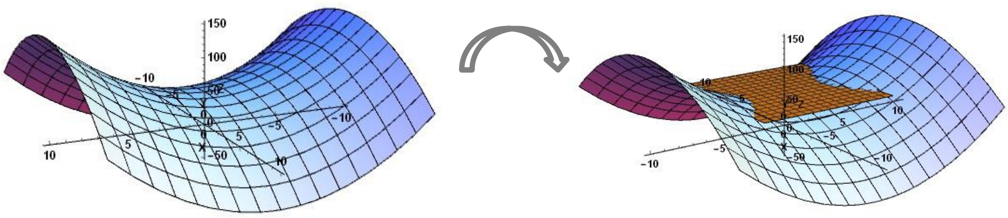


Fuente: Ingar, 2014, p.61

Por su parte, la modificación mereológica trata de los cortes, es decir, las intersecciones entre superficies, lo que ocurre cuando, por medio de dos comandos del *software Mathematica*, generamos cortes en los planos horizontales z=k, con los planos x=h, y=p y con los planos inclinados. Por ejemplo, en la figura 7, mostramos el corte del gráfico en el plano horizontal z=60, obtenido cuando escribimos el comando:

ContourPlot3D*[{z==20},{x,-5,5},{y,-5,5},{z,0,100},AxesLabel→{"X","Y","Z"}, AxesOrigin→{0,0,0}, Boxed→False]* y luego el comando *Show* para mostrar los cortes.

Figura 7 – Modificación mereológica



Fuente: Ingar, 2014, p.61

Así, levantamos la hipótesis sobre la necesidad de estas aprehensiones para comprender las posibles variaciones en el registro gráfico de funciones de dos variables, puesto que estamos interesados en estudiar las actividades cognitivas que el estudiante moviliza para desarrollar la visualización en dicho registro, ya que las aprehensiones en este registro permiten la organización de relaciones entre unidades de representación, es decir, entre las variables visuales. Además, el registro gráfico permite tratamientos puramente visuales que pueden olvidarse cuando se pasa a otro registro (lengua natural, algebraico), pero que permitieron reconocer y escoger los procesos a efectuar en este otro registro para obtener la solución matemática del problema.

Metodología

La investigación se desenvolvió a través de un enfoque cualitativo y como metodología, la Ingeniería Didáctica. Según Artigue (1988), la Ingeniería Didáctica vista como metodología de investigación, se caracteriza por un esquema experimental basado en realizaciones didácticas en salón de clase, es decir, en la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza.

Para la autora, esta metodología se caracteriza también, en relación a otros tipos de investigaciones basados en las experimentaciones en clase, por el registro en el cual se sitúa y por los modos que le están asociados. La Ingeniería Didáctica se sitúa en el registro de los estudios de casos, cuya validación es esencialmente interna y fundamentalmente en el confronto entre análisis a priori y el análisis a posteriori. Así, esta metodología es singular, no por los objetivos de las investigaciones llevadas a cabo, sino por las características de su funcionamiento metodológico.

Con respecto al software, el *CAS Mathematica*, los estudiantes utilizaron la versión 8 dado que, estaba instalado en las laptops del laboratorio de cómputo, escenario donde se realizó la experimentación. Más aún, este *CAS* permite la manipulación en el registro gráfico en tres dimensiones y facilita el proceso que lleva a la visualización de un representante de la función de dos variables en el registro gráfico.

Los estudiantes trabajaron tanto con el *CAS Mathematica* como con sus conocimientos previos de funciones de dos variables reales. Utilizaron los comandos que permiten representar gráficamente puntos, planos y superficies en R^3. El tiempo de duración de las situaciones didácticas fue de tres horas cada una. Las situaciones didácticas propuestas tuvieron en común la exigencia de una discriminación de variables visuales de las formas perceptivas elementales que se imponen a primera vista para conseguir una capacidad fundamental, que es la condición necesaria para toda utilización heurística de los registros gráficos: realizar tratamientos en el registro gráfico con el fin de descubrir sobre el gráfico un procedimiento de solución.

En este artículo presentamos la segunda situación didáctica correspondiente al segundo encuentro con los estudiantes y analizaremos el trabajo desarrollado por tres parejas. Estas parejas nunca tuvieron contacto con las nociones de valor máximo, mínimo y punto de silla, exigidos para resolver la situación didáctica, y fueron elegidas considerando su voluntad por participar.

Los estudiantes trabajaron en parejas y cada cual fue llamada de grupo, utilizaron una laptop y una ficha de trabajo durante el encuentro. El esclarecimiento del texto, sólo cuando fuera solicitado, y la mediación del profesor-investigador se hicieron por medio de preguntas que estimularon a movilizar los conocimientos previos de los estudiantes.

Análisis de una situación didáctica

La continua necesidad de atender la demanda de productos variados y saludables a todo tipo de consumidores motivó a una empresa a elaborar galletas naturales y a lanzar al mercado dos tipos de ellas: la galleta integral y la galleta de avena, cuya presentación es hecha en bolsas de 24 unidades. Los costos totales de producción son de dos y tres soles por bolsa, respectivamente. La demanda (en miles de bolsas) de galletas integrales que pueden ser vendidas cada semana es cuatro veces la diferencia del precio del segundo producto en relación al primero, y la demanda (en miles de bolsas) de galletas de avena es cuatro veces la diferencia del precio del primer producto en relación al doble del segundo; pero la preferencia de los consumidores por esta galleta aumenta su demanda siempre en 36 miles de bolsas. ¿Cuál será la mayor utilidad que obtiene la empresa y cuáles serían los precios de venta de cada tipo de galleta? Justifique su respuesta.

Las variables didácticas consideradas fueron:

- La función costo total de producción de bolsas de galletas.
- La función demanda de bolsas de galletas.
- La función utilidad, cuya representación es una función de dos variables del tipo $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$.

Análisis a *priori*

Esa situación tiene por finalidad llevar al estudiante a comprender las nociones de valor máximo local de una función de dos variables representada por $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$ permitiendo que los estudiantes movilicen sus conocimientos de plano tangente a una superficie y de derivadas parciales en un punto, dado que esos conocimientos ya fueron construidos por los estudiantes, es decir que movilicen sus conocimientos disponibles (ROBERT, 1998).

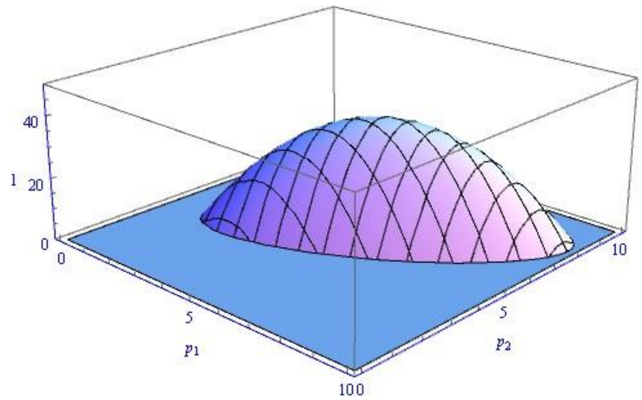
Esperamos que todos los grupos, después de leer el enunciado del problema, realicen la conversión del registro en lengua natural para el registro algebraico, pudiendo representar el costo total de producción con la letra **C**, por ejemplo; el objeto función demanda, por ejemplo, por $q = f(p_1, p_2)$, dado que, según los datos de la situación, éste relaciona la cantidad de bolsas de galleta (en miles de bolsas) con los precios unitarios de cada bolsa de galleta, y el ingreso total por la venta de bolsas de galletas lo representarían por R_T. Para representar algébricamente cada uno de los objetos, los grupos podrían representarlos tanto para las galletas integrales como para las de avena, o sea, para las galletas integrales, la función de demanda de galletas podría ser representada por $q_1 = 4(p_2 - p_1)$, y la función ingreso total sería representada como $R_1(p_1, p_2) = 4(p_2 - p_1)p_1$.

Igualmente, para las galletas de avena, la función de demanda de galletas sería representada por $q_2 = 36 + 4(p_1 - 2p_2)$, y la función ingreso podría ser representada como $R_2(p_1, p_2) = [36 + 4(p_1 - 2p_2]p_2$. Podrían los grupos, por medio de operaciones posibles en ecuaciones y expresiones algebraicas, representar la función lucro por: $l(p_1, p_2) \;=\; 8p_1p_2 + 52p_2 - 4{p_1}^2 - 4p_1 - 8{p_2}^2 - 108$.

Esperamos que los estudiantes representen la función lucro en su forma canónica, pero observarían que no es posible y que esa representación algebraica no es conocida. Luego, suponemos que los grupos, usen el *software Mathematica*, como medio, para representar en el registro gráfico la función lucro (ver figura 8) pudiendo escribir, por ejemplo, el comando,

$$Plot3D[8p_1p_2 - 4p_1^2 - 8p_2^2 + 52p_2 - 4p_1 - 108, \{p_1, 0{,}10\}, \{p_2, 0{,}10\}, PlotRange \rightarrow \{0{,}50\}, AxesLabel \rightarrow \{"p_1", "p_2", "l"\}$$

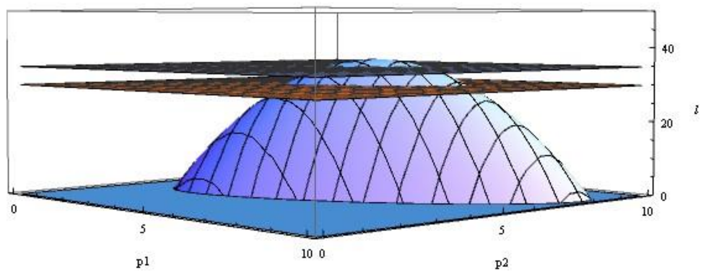
Figura 8 – Registro CAS_MATH de la función lucro



Fuente: Ingar, 2014, p. 127

Suponemos que, por la aprehensión perceptiva, los grupos identifiquen que el registro gráfico de la función lucro es un paraboloide elíptico rotado, por la aprehensión operatoria realicen modificaciones ópticas y posicionales en dicho registro gráfico, identificando la relación de los puntos de la superficie con respecto al eje l (eje z) y a la curvatura de la superficie, lo que permitirá tener una percepción del posible valor máximo de la función lucro. Es más, esperamos que los grupos, por medio de modificaciones mereológicas dentro del registro gráfico *CAS_MATH*, tracen planos perpendiculares al eje l, por ejemplo, los planos representados por l=30 y l=35, conforme se muestra en la figura 9.

Figura 9 – Modificación mereológica de un registro gráfico



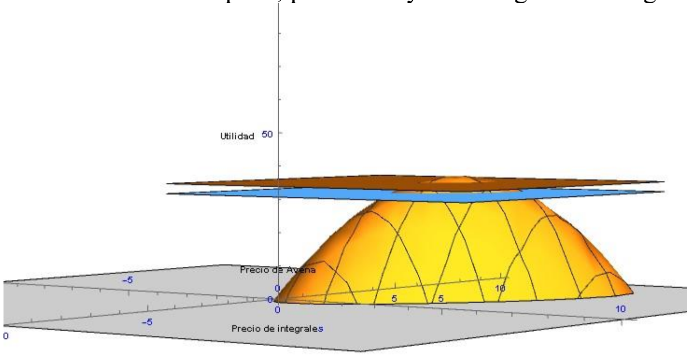
Fuente: Ingar, 2014, p.127

Esperamos que los estudiantes conjeturen y formulen que, en el valor máximo, la superficie está debajo completamente, del plano perpendicular al eje l, y que el valor máximo de la superficie se localiza en el punto donde el plano perpendicular al eje l es tangente a la superficie.

Análisis a *posteriori*

El grupo 1, representó la función lucro en el gráfico *CAS* para tener una aprehensión perceptiva del valor máximo, por medio de modificaciones ópticas, es decir, el grupo presionó la tecla *ctrl* y clicó el botón izquierdo del mouse, movió físicamente el mouse y manipuló el gráfico de tal manera que ampliando y reduciendo el registro gráfico percibió la posición de la superficie en relación a los ejes coordenados orientados positivamente, como muestra la Figura 10. Tal como lo habíamos supuesto en el análisis a priori.

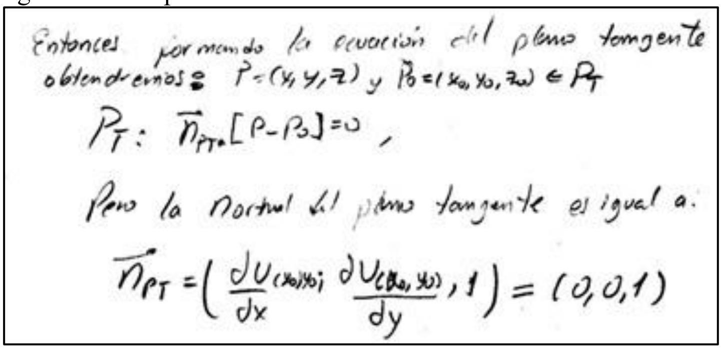
Figura 10 – Modificación óptica, posicional y mereológica en el registro *CAS*



Fuente: Ingar, 2014, p.130

Esto significa que el grupo desarrolló su aprehensión operatoria la cual produce la fecundidad intuitiva del registro gráfico *CAS*, pero esa aprehensión es dirigida por la aprehensión perceptiva, es decir, empezó a desarrollar su proceso de visualización para identificar el valor máximo de la función lucro. Más aún, afirmamos que existe conexión entre la aprehensión operatoria y discursiva, dado que el estudiante hizo una interpretación discursiva de los elementos visuales del registro gráfico *CAS*, conforme se muestra en la figura 11, esto significa que el grupo desarrolló su proceso heurístico para resolver la situación didáctica.

Figura11 - Interpretación discursiva de elementos visuales [3]


Entonces formando la ecuación del plano tangente obtendremos: $P=(x,y,z)$ y $P_0=(x_0,y_0,z_0) \in P_T$

$P_T: \vec{n}_{PT} \cdot [P-P_0]=0$,

Pero la normal del plano tangente es igual a:

$\vec{n}_{PT} = \left(\frac{dU(x_0,y_0)}{dx}; \frac{dU(x_0,y_0)}{dy}, 1 \right) = (0,0,1)$

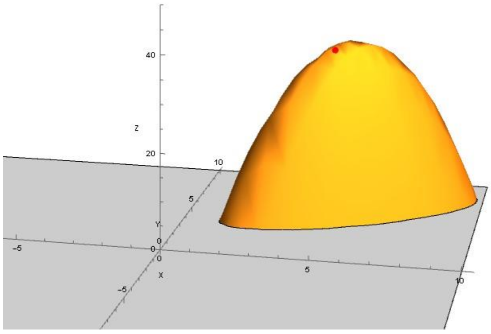
Fuente: Ingar, 2014, p.134

Afirmamos, que la manera de ver de este grupo corresponde a la aprehensión global cualitativa lo que ayudó a su aprendizaje sobre el uso de la derivada parcial para encontrar el valor máximo y el valor de máximo de una función de dos variables reales, cuya representación algebraica no era conocida.

El grupo 2, en un primer momento, basándose en su aprehensión perceptiva, ve el registro gráfico *CAS* de manera icónica, pues relaciona los puntos de la superficie con el eje l, variable que representa la función lucro. En un segundo momento, realiza modificaciones ópticas y posicionales en el registro gráfico *CAS*, para representar puntos en la superficie representada por l, esto nos permite afirmar que el grupo comienza a identificar una asociación entre dos valores numéricos, es decir, lo que es observado por el grupo son asociaciones (puntos, ternas ordenadas). Hecho que no habíamos supuesto en el análisis a priori. Lo que significa que la manera de ver del grupo es, además, local, relaciona un punto con una terna ordenada, conforme la Figura 12.

[3] Entonces formando la ecuación del plano tangente obtendremos $P = (x, y, z)$ y $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in P_T$. $P_T: \vec{n}_{P_T}[P - P_0] = 0$. Pero la normal al plano tangente es igual a $\vec{n}_{P_T} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial U}{\partial y}(x_0, y_0), 1\right) = (0,0,1)$.

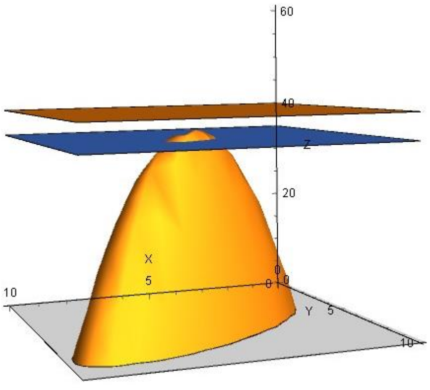
Figura 12 - Representación gráfica de un punto



Fuente: Ingar, 2014, p.132

Ya, en un segundo momento, el grupo 2 por medio de modificaciones ópticas y mereológicas representa gráficamente los planos representados por *z=35*, *z=40* percibiendo la posición de la superficie en relación con el eje z, conforme se muestra en la figura 13.

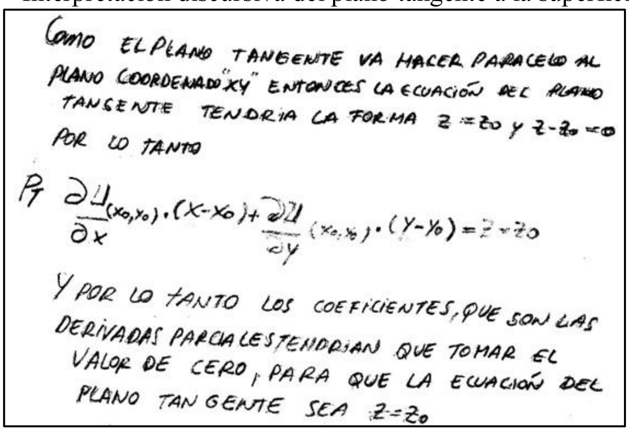
Figura 13 – Modificación óptica y mereológica en el registro *CAS*



Fuente: Ingar, 2014, p.133

Es por la aprehensión operatoria y como muestra la figura 14, que el grupo 2 siente la necesidad de usar las derivadas parciales para encontrar el valor máximo local de la función lucro.

Figura 14 – Interpretación discursiva del plano tangente a la superficie


Como EL PLANO TANGENTE VA HACER PARALELO AL PLANO COORDENADO "XY" ENTONCES LA ECUACIÓN DEL PLANO TANGENTE TENDRIA LA FORMA $z = z_0$ y $z - z_0 = 0$ POR LO TANTO

$$P_T \quad \frac{\partial U}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(X-X_0)+\frac{\partial U}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(Y-Y_0)=z-z_0$$

Y POR LO TANTO LOS COEFICIENTES, QUE SON LAS DERIVADAS PARCIALES TENDRIAN QUE TOMAR EL VALOR DE CERO, PARA QUE LA ECUACIÓN DEL PLANO TANGENTE SEA $z=z_0$

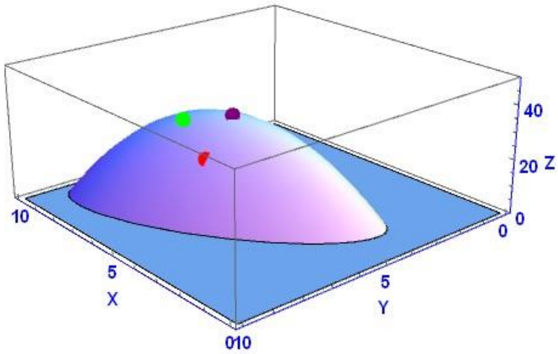
Fuente: Ingar, 2014, p.134

Lo que significa que el grupo consigue pasar de una aprehensión local a una aprehensión global cualitativa. Esta última la habíamos supuesto en el análisis a priori,

El grupo 3, a diferencia del grupo 1 y del grupo 2, representó gráficamente la función lucro en el registro gráfico *CAS_MATH*, conforme lo habíamos supuesto en el análisis a priori. En un primer momento, este grupo vió el gráfico de manera icónica dado que, el registro gráfico se presta para que el grupo identifique una analogía con cambio de posición, es decir estar más alto, estar más bajo. Afirmamos que debido a que el registro gráfico se parece al perfil de una colina, el grupo en relación con un nivel horizontal observa desplazamientos de subida para identificar el valor máximo de la función lucro. En un segundo momento, el grupo identifica una asociación entre dos valores numéricos (puntos-ternas ordenadas) lo que nos indica que esta asociación se limita a la aplicación de una simple regla de codificación, pues cada punto de intersección de un octante puede ser asociado a una terna de números, conforme muestra la Figura 15.

Afirmamos que este grupo, si bien realiza modificaciones en el registro gráfico *CAS_MATH*, su manera de ver se limita a operaciones locales y sucesivas de codificación, que es equivalente a una lectura del gráfico. La aprehensión perceptiva subordina al tipo de tratamiento que puede ser desarrollado en el registro gráfico.

Figura 15 – Representación de ternas ordenadas en el gráfico *CAS_MATH* de la función lucro



Fuente: Ingar, 2014, p.133

Dicho lo anterior, afirmamos que el grupo fue guiado por la aprensión perceptiva del registro gráfico *CAS*, a ver este registro de modo local e icónico. Este grupo no pasó a una aprehensión global cualitativa. Hecho que no habíamos supuesto en el análisis a priori.

Consideraciones finales

Consideramos que la aprehensión operatoria en el registro gráfico CAS, tales como las modificaciones: óptica, posicional y mereológica, son operaciones fundamentales en el registro gráfico, porque brindan la posibilidad de hacer modificaciones en dicho registro y relacionarlas con propiedades matemáticas por medio de la aprehensión discursiva para, así, tener otra manera de ver la enseñanza del cálculo de funciones de varias variables.

Asimismo, pensamos que la articulación de las aprehensiones en el registro gráfico CAS, permite a los alumnos conjeturar las propiedades de las funciones de dos variables y de las derivadas parciales cuando, por ejemplo, el estudiante aplica esas nociones a problemas de optimización.

Recomendamos el uso del *software Mathematica* como medio para facilitar el proceso de visualización, puesto que permite que el usuario, por medio de la articulación de la aprehensión, perceptiva, operatoria y discursiva, movilice y realice conexiones con los conocimientos de los elementos del cálculo de dos variables que emergen en la representación gráfica de las funciones de dos variables.

El desarrollo de las tres maneras de ver apunta hacia una dirección en la enseñanza y aprendizaje del cálculo de varias variables en clase, que van de la puntual a la aprehensión global cualitativa, que es específica de las matemáticas y exige un cambio completo del funcionamiento cognitivo por parte del estudiante de ingeniería

Agradecimientos

Al Programa Convenio de Pos Grado Internacional de la Coordinación de Perfeccionamiento de Personal de Nivel Superior CAPES-PEC/PG por la concesión de la beca para mis estudios de Doctorado y al grupo PEA-MAT del programa de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica de São Paulo por las reuniones y discusiones académicas.

Referencias

DUVAL, R. Les différents fonctionnements possibles d'une figure dans une dérmarche géométric. *Repères,* n.17, p. 121-138, 1994.

DUVAL, R. Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In HITT, F.; SANTOS, M. (Eds.). *Proceedings of the 21st North American PME Conference,* 1999, v.1, p. 3-26.

DUVAL, R. *Los problemas Fundamentales en el Aprendizaje de la Matemáticas y las Formas Superiores en el Desarrollo Cognitivo*. Traducción de Myriam Vega Restrepo. Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática, 2004.

GUZMÁN, M. *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático.* España, Ediciones Pirámide, S.A. 1996.

HENRIQUES, A. *L'enseignement et L'apprentissage des Integrales Multiples: Analyse Didactique Integrant L'usage du Logiciel Maple.* 2006. 536 f. Tesis (Doctorado en Didáctica de las Matemáticas). Universite Joseph Fourier. Grenoble. Francia. 2006. Disponible en: < https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00100353/document>. Acceso en: 08 ene.2015.

INGAR, K. *A visualização na Aprendizagem dos Valores Máximos e Mínimos Locais da Função de Duas Variáveis Reais*. 2014. 202 f. Tesis (Doctorado em Educación Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil. 2014.

INGAR, K. y SILVA, M. A visualização de valores máximos e mínimos de funções de duas variáveis. In: *12th international conference on technology in mathematics teaching*, 12, 2015, Faro, Portugal. Proceedings… Faro: Universidad de Algarve, 2015. p. 687-695.

INGAR, K. y SILVA, M. El Aprendizaje de los Valores Máximos y Mínimos Locales de Funciones de dos Variables a partir de la Noción de Registros de Representación Semiótica. En: FLORES y UGARTE (Eds.). *Investigaciones en Educación Matemática*. Lima: Fondo Editorial PUCP, 2016. p. 103-122.

KABAEL, T. The effects of the function machine on students'understanding levels and their image and definition for the concept of function. In SWARS, S. L.; STINSON, D.W., y LEMONS-SMITH, S. (Eds.). *Proceedings of the 31sr anual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics education*, v. 5, p. 58-64. 2009.

KASHEFI, H.; ZALEHA, I y MOHAMMAD, Y. Obstacles in the Learning of Two-variable Functions through Mathematical Thinking Approach. *Procedia Social and Behavioral Sciences,* 8, p. 173-180, 2010. Disponible en: < https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042810021294 >.

MONTIEL, M., WILHELMI, M., VIDAKOVIC, D. y ELSTAK, I. Using the onto-semiotic approach to identify and analyze mathematical meaning when transiting between different coordinate systems in a multivariate context. *Educational Studies in Mathematics,* v. 72, n. 2, p. 139-160, 2009. Disponible en: < https://slides.tips/using-the-onto-semiotic-approach-to-identify-and-analyze-mathematical-meaning-wh.html>.

ROBERT, A. Outils d'analyses des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherches en didactique des mathématiques*, v. 18, n. 2, p. 139-190, 1998.

TRIGUEROS, M y MARTÍNEZ-PLANELL, R. Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics*, v. 73, n. 1, p. 3-19, 2010.

TRIGUEROS, M., y MARTÍNEZ-PLANELL, R. How are graphs of two variable functions taught? In: WIEST L.R y LAMBERG T. (Eds.). *Proceedings of the 33rd Annual Metting of the North America Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Reno, Nevada, USA, 2011.

YERUSHALMY, M. Designing representations: Reasonning about functions of two variables. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, p. 431-466. 1997.

ZIMMERMANN, W. y CUNNINGHAM. Visualization in teaching and learning mathematics. In: Zimmermann, W. y Cunningham, S. (Eds). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, MAA. n. 19. 1991.

Texto recebido: 28/02/2018
Texto aprovado: 02/10/2018