EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i2p140-170

Registros de representação semiótica, relevância e conciliação de metas: uma análise do capítulo *Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas* do livro *Matemática compreensão e prática* de Ênio Silveira

Registers of semiotic representation, relevance and goal-conciliation: an analysis of the chapter about systems of linear equations with two variables in Ênio Silveira's book *Matemática conpreensão e prática*

VANESSA ISABEL CATANEO [1]

FÁBIO JOSÉ RAUEN [2]

Resumo*: Analisamos neste artigo o capítulo* Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas *do livro* Matemática Compreensão e Prática: 8º ano, *de Ênio Silveira, a partir das noções teóricas de registros de representação semiótica, relevância e conciliação de metas. Assumimos a hipótese de que as atividades cognitivas de formação de representações identificáveis, tratamento e conversão de representações semióticas estão à serviço de conciliações ativas relevantes de um plano de ação intencional do autor que é passível de ser descrito e explicado pelos estágios de formulação de metas e de formulação, execução e checagem de hipóteses abdutivas antefactuais habilitadoras. Os resultados sugerem prevalência de exemplos e atividades que demandam conversão de representações de situações-problema em língua natural para a representação no registro algébrico, pouco desenvolvimento de interpretações gráficas, casos raros de conversões inversas e ausência de propostas de elaboração de problemas.*

Palavras-chave*: Ensino de sistemas lineares, Teoria de conciliação de metas, Teoria de registros de representação semiótica.*

Abstract*: We analyze in this article the chapter about systems of linear equations with two variables in Ênio Silveira's book* Matemática Compreensão e Prática: 8º ano *[Mathematics comprehension and practice: 8th grade], using the theoretical notions of registers of semiotic representation, relevance and goal-conciliation. We assume that cognitive activities of formation of identifiable representations, treatment and conversion of semiotic representations are at the service of relevant active conciliations of an author's plan of intentional action, which we can describe and explain by the stages of formulation of*

[1] Mestre em Educação pela Universidade do Sul de Santa Catarina (Unisul) e doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Ciências da Linguagem (Unisul). Docente no Centro Universitário Barriga Verde (Unibave) e na Rede Pública Estadual de Santa Catarina. E-mail: vanessaisacataneo@hotmail.com.

[2] Doutor em Letras/Linguística pela Universidade Federal de Santa Catarina. Docente e Coordenador do Programa de Pós-graduação em Ciências da Linguagem da Universidade do Sul de Santa Catarina (PPGCL/UNISUL). E-mail: fabio.rauen@unisul.br.

goals and formulation, execution and checking of enabling ante-factual abductive hypotheses. The results suggest prevalence of examples and activities that require conversion of representations of problem/situations in natural language into representations in algebraic register, little development of graphic interpretations, rare cases of reverse conversions and lack of proposals for problem solving.

Keywords*: Teaching of linear systems, Goal conciliation theory, Theory of registers of semiotic representation.*

Introdução

Conforme a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2016), a resolução algébrica e a representação no plano cartesiano de sistemas de equações polinomiais de 1º grau são objetos de conhecimento do 8º ano do Ensino Fundamental. Sobre esse conteúdo, os estudantes devem "resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas, e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso" (objetivo EF08MA08, p. 265).

Segue desse objetivo que trabalhar com sistemas de equações de 1º grau implica coordenar diferentes registros de representação semiótica (DUVAL, 2009). Cabe aos estudantes representar em sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas problemas relacionados ao seu contexto próximo que são expressos geralmente em língua natural (primeira coordenação), e interpretar esses sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas em uma representação gráfica no plano cartesiano (segunda coordenação).

Apesar de a coordenação de registros ser essencial para atingir esse objetivo, a expertise dos estudantes nesta tarefa não se dá de modo espontâneo por dois motivos fundamentais. Em primeiro lugar, os estudantes podem não reconhecer um mesmo objeto nos diferentes registros de representação, sugerindo dificuldades para distinguir objetos matemáticos abstratos de suas representações semióticas. Em segundo lugar, visto que todo registro de representação semiótica recorta o objeto matemático parcialmente, os estudantes podem enfrentar problemas de congruência na conversão, o que exige conhecimentos sobre especificidades dos pareamentos das unidades significativas dos registros de partida e de chegada.

Os desafios à consecução desse objetivo também podem ser direcionados aos materiais instrucionais, especialmente aqueles eleitos para o Plano Nacional do Livro Didático (PNLD), porque eles podem determinar conteúdos e estratégias a serem trabalhados em sala de aula e, conforme Battaglioli (2008), funcionar como instrumento único para o docente preparar e ministrar suas aulas. Assim, este artigo visa a analisar o capítulo *Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas* do livro *Matemática Compreensão e Prática: 8º ano*, de Ênio Silveira (2015), adotado por escolas catarinenses em 2017, verificando de que modo o material potencializa atividades que demandam por conversão de representações semióticas dos objetos matemáticos.

Para dar conta da análise, adotamos como ferramentas descritivo-explanatórias a teoria de conciliação de metas de Rauen (2014) e a teoria da relevância de Sperber e Wilson (1986, 1995). A teoria de conciliação de metas é uma abordagem pragmático-cognitiva concebida para analisar trocas comunicacionais como parte de planos de ação intencional em direção à consecução proativa de metas. Neste contexto, um plano de ação intencional pode ser analisado em termos de projeção de uma meta e formulação, execução e checagem de pelo menos uma hipótese abdutiva antefactual, que contém uma ação antecedente assumida pelo agente como pelo menos suficiente para atingir a meta consequente.

Segue dessa arquitetura a hipótese operacional de que o capítulo pode ser modelado em termos de sucessivas hipóteses abdutivas com as quais, mediante a proposição de estímulos ostensivos comunicacionais modeláveis pelo procedimento de compreensão orientado pela noção teórica de relevância, habilita-se a consecução das metas informacionais e práticas traçadas pelo autor. Em outras palavras, admitimos a hipótese de que as atividades cognitivas de formação de representações identificáveis, tratamento e conversão de representações semióticas estão à serviço de conciliações ativas em um plano de ação intencional passível de ser modelado pelos estágios de formulação de metas e de formulação, execução e checagem de hipóteses abdutivas antefactuais habilitadoras.

Posto isso, o presente texto foi organizado em mais quatro seções dedicadas a apresentar, respectivamente, a teoria de registros de representação semiótica, as teorias de conciliação de metas e de relevância, a análise do capítulo e a discussão dos resultados.

Registros de Representação

A matemática é uma ciência lógico-formal que, operando com objetos conceptuais abstratos, demanda por representações simbólicas demonstrativas para ser processada e comunicada. Conforme Duval (2009), há dois aspectos essenciais para a compreensão em matemática: a *noésis* e a *semiósis*. Por *noésis*, o autor se refere ao processo consciente do trabalho cerebral que envolve a conceptualização do objeto matemático. Por *semiósis*, o autor se refere às múltiplas formas de representar esse objeto. Para Duval, não é possível haver *noésis* sem *semiósis*, pois é a *semiósis* que viabiliza a *noésis*.

> O desenvolvimento das representações mentais efetua-se como uma interiorização das representações semióticas da mesma maneira que as imagens mentais são uma interiorização das percepções. [...]. A isto é preciso juntar o fato de que a pluralidade dos sistemas semióticos permite uma diversificação das representações do mesmo objeto. Tal pluralidade aumenta as capacidades cognitivas dos sujeitos e, em seguida, as suas representações mentais. (DUVAL, 2009, p. 17).

Duval (2009, p. 53) sugere haver três atividades cognitivas no nível da *semiósis*: a *formação de uma representação identificável*, que corresponde a unidades e regras de formação próprias de um registro; os *tratamentos*, que correspondem a transformações de representações no interior de um registro; e as *conversões*, que correspondem a mudanças de representação, conservando os objetos denotados. Vejamos como isso acontece nas diferentes formas de representação de sistemas lineares.

Por *sistemas lineares* define-se um conjunto finito de equações lineares aplicadas a um conjunto de variáveis. Conforme Howard e Rorres (2001), uma equação linear ou de primeiro grau com uma ou mais variáveis representa uma linha reta no plano cartesiano R^2, que pode ser representada algebricamente por $a_1x + a_2y = b$, onde a_1, a_2 e b são constantes reais e x e y são variáveis.

Segundo Kolman e Hill (2014, p. 1), a representação algébrica genérica de um sistema linear pode ser convenientemente representada na forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3 \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad . \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad . \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

onde $x_1, x_2, ..., x_n$ são incógnitas; a_{ij} são coeficientes e b_i são termos independentes.

Sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas são resolvidos por algoritmos ou métodos de *adição, substituição* e *comparação* ou por *tentativa e erro*. Conforme a solução, os sistemas podem ser classificados em *impossíveis* (SI), *possíveis e determinados* (SPD) e *possíveis e indeterminados* (SPI), conforme a existência de pontos de intersecção entre a reta l_1 (derivada da primeira equação) e a reta l_2 (derivada da segunda equação) em um gráfico no plano cartesiano.

Conforme Howard e Rorres (2001, p. 29), em sistemas possíveis e determinados, "as retas l_1 e l_2 podem cortar-se em um único ponto, caso em que o sistema tem exatamente uma solução"; em sistemas possíveis e indeterminados, "as retas l_1 e l_2 podem coincidir, caso em que existe uma infinidade de soluções do sistema"; e em sistemas impossíveis, "as retas l_1 e l_2 podem ser paralelas, caso em que não há intersecção e, consequentemente, não existe nenhuma solução".

Vejamos o seguinte sistema de equações do 1º grau:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

Nesse sistema, as equações são formadas por unidades significativas próprias do registro algébrico 'x', 'y', '$+$', '$-$', '$=$', '8' e '6'. Cada uma dessas unidades significativas corresponde a uma representação identificável desse registro semiótico.

Quando nos utilizamos de um dos métodos ou algoritmos para a solução desse sistema e obtemos como resultado '$x = 7$' e '$y = 1$', há um tratamento, porque cada passo inferencial é processado no domínio do registro de representação numérico.

Na figura 1, a seguir, podemos observar os respectivos tratamentos do sistema de equações pelos métodos da tentativa e erro, da comparação, da substituição e da adição.

Figura 1 – Tratamentos do sistema de equações do 1º grau

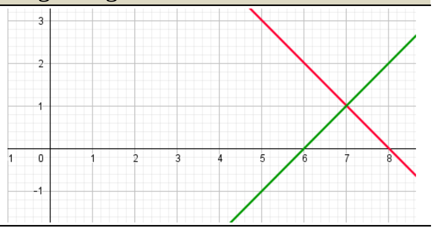
Tentativa e Erro	Método da Comparação	Método da Substituição	Método da Adição

<table>
<tr>
<td>Atribuição de valores para x e y, buscando encontrar um par ordenado que satisfaça as duas equações do sistema com utilização opcional de registro tabular para comparar resultados:
<table><tr><th>x</th><th>y</th><th>$x + y = 8$</th><th>$x - y = 6$</th></tr><tr><td>2</td><td>6</td><td>$2 + 6 = 8$</td><td>$2 - 6 = -4$</td></tr><tr><td>3</td><td>5</td><td>$3 + 5 = 8$</td><td>$3 - 5 = -2$</td></tr><tr><td>4</td><td>4</td><td>$4 + 4 = 8$</td><td>$4 - 4 = 0$</td></tr><tr><td>5</td><td>3</td><td>$5 + 3 = 8$</td><td>$5 - 3 = 2$</td></tr><tr><td>6</td><td>2</td><td>$6 + 2 = 8$</td><td>$6 - 2 = 4$</td></tr><tr><td>$\mathbf{7}$</td><td>$\mathbf{1}$</td><td>$\mathbf{7 + 1 = 8}$</td><td>$\mathbf{7 - 1 = 6}$</td></tr></table>
Observação dos valores que satisfazem as duas equações do sistema:
$\boldsymbol{x = 7}$
$\boldsymbol{y = 1}$</td>
<td>Isolamento da incógnita y nas duas equações, a fim de compará-las.
$y = 8 - x$
$y = x - 6$
Obtenção do valor da incógnita x por comparação das equações:
$8 - x = x - 6$
$8 + 6 = x + x$
$14 = 2x$
$x = \frac{14}{2}$
$\boldsymbol{x = 7}$
Obtenção do valor da incógnita y em uma das equações pela substituição do valor da incógnita x:
$y = 8 - x$
$y = 8 - 7$
$\boldsymbol{y = 1}$</td>
<td>Isolamento da incógnita x em uma das equações, no caso na primeira:
$x + y = 8$
$x = 8 - y$
Obtenção do valor da incógnita y na segunda equação pela substituição da incógnita x por $8 - y$:
$x - y = 6$
$(8 - y) - y = 6$
$-y - y = 6 - 8$
$-2y = -2\,.(-1)$
$2y = 2$
$y = \frac{2}{2}$
$\boldsymbol{y = 1}$
Obtenção do valor da incógnita x em uma das equações pela substituição da incógnita y:
$x - y = 6$
$x - 1 = 6$
$x = 6 + 1$
$\mathbf{x = 7}$</td>
<td>Obtenção e resolução de equação com uma incógnita pela adição membro a membro das equações de origem:
$+\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 6 \end{cases}$
$2x + 0y = 14$
$2x = 14$
$x = \frac{14}{2}$
$\boldsymbol{x = 7}$
Obtenção do valor da incógnita remanescente pela substituição da variável conhecida em uma das duas equações:
$x + y = 8$
$7 + y = 8$
$y = 8 - 7$
$\boldsymbol{y = 1}$</td>
</tr>
</table>

Fonte: Elaboração nossa, 2018.

Quando apresentamos esse sistema numa representação em língua natural ou numa representação gráfica no plano cartesiano, verificamos que as unidades significativas próprias do registro algébrico de partida precisam ser pareadas e “traduzidas” em unidades significativas próprias dos registros em língua natural e gráfico de chegada. Trata-se do que Duval chama de conversão. Na figura 2, a seguir, podemos observar essas conversões.

Figura 2 – Conversão da representação de um sistema linear no registro algébrico para uma representação no registro em língua natural e para uma representação no registro gráfico

Registro algébrico	Registro em Língua natural	Registro gráfico
$\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 6 \end{cases}$	Um número x qualquer somado com outro número y qualquer é igual a oito unidades. Esse mesmo número x qualquer subtraído do mesmo número y qualquer é igual a seis unidades.	

Fonte: Elaboração nossa, 2018.

Dado que toda representação é cognitivamente parcial em relação ao que ela representa, o estudante poderá observar que não são os mesmos aspectos do conteúdo que estão representados na conversão de um registro a outro. Isso leva a concluir que uma apreensão mais significativa dos objetos matemáticos está relacionada com a habilidade de coordenar diferentes registros. Todavia, isso demanda incrementos de custos de processamento, pois, entre outras razões, as conversões nem sempre são congruentes e há sentidos de conversão que são mais ou menos privilegiados no ensino.

Para Duval (2009, p. 68-69), há três critérios para analisar a congruência: a observação de correspondências de caráter semântico, verificando se pode ser associada uma unidade significativa no registro de chegada para cada unidade significativa do registro de partida; a observação de univocidade semântica terminal, verificando se há somente uma unidade significativa no registro de chegada para cada unidade significativa do registro de partida; e a observação da organização sintática, verificando se as unidades estão arranjadas na mesma ordem em ambos os registros. Caso uma conversão atenda aos três critérios, dizemos que ela é congruente; caso contrário, dizemos que ela é não congruente. Quanto menos congruentes são as conversões maiores são custos de processamento que elas demandam.

A observação do sentido da conversão se apresenta mesmo na proposição da denominação e do objetivo do objeto de conhecimento "Sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano" na BNCC (2016). Ao privilegiar o sentido da conversão da representação dos problemas às equações e das equações aos gráficos, conversões de representações inversas ficam em segundo plano.

Todavia, independente dos problemas de incremento de custos de processamento e de privilégio de sentidos de conversão, a BNCC (2016) produz avanços ao propor um ensino que visa a superar a mera resolução descontextualizada de sistemas de equações lineares. Cabe agora verificar se e como o capítulo viabiliza esse avanço.

Conciliação de metas e relevância

Como antecipamos, assumimos neste estudo que a elaboração do capítulo decorre de um plano de ação intencional *a priori* em direção à consecução de metas e submetas. Cabe ao analista produzir uma engenharia reversa *a posteriori*, depreendendo metas que orientaram explícita ou implicitamente a elaboração do material.

Em teoria de conciliação de metas (RAUEN, 2014), um plano de ação intencional pode ser descrito e explicado em quatro estágios. Neste modelo, os três primeiros estágios, aqueles que nos interessam neste artigo, são abdutivos. Em abduções explicativas, observa-se um fato, por exemplo, que a luz de um quarto está acesa (*x é Q*) e, em seguida, abduz-se uma explicação *ex-post-facto*, ou seja, que uma causa antecedente *P* explica o fato consequente *Q*: alguém acendeu a luz. Segue disso que *P* é a causa mais provável ou plausível para *Q* (*x é P*).

Rauen (2014) argumenta que essa modelação pode abrigar casos *a priori*. Assim, uma descrição do tipo *x* é *Q* pode corresponder a certo estado *x* no futuro que satisfaz uma expectativa de alcançar um estado de meta *Q* [estágio 1]. Em seguida, o indivíduo *i* abduz *ex-ante-facto* que há uma ação antecedente *P* provavelmente suficiente para atingir esse estado de consecução de meta *Q* [estágio 2]. Decorre dessa formulação que *x* é *P*, e o indivíduo *i* executa a ação *P* com base nessa expectativa [estágio 3].

Os três últimos estágios do modelo, por sua vez, são dedutivos. Isso ocorre porque a hipótese abdutiva antefactual (*P é Q*) passa a ser tomada como uma premissa maior no plano de ação intencional [estágio 2], a ação antecedente *x é P* passa a ser tomada como premissa menor [estágio 3], e a conclusão *x é Q* deduz-se dessas premissas [estágio 4].

Essa arquitetura pode ser vista na figura 3, a seguir.

Figura 3 – Arquitetura abdutivo-dedutiva da teoria de conciliação de metas

Abdução		[1]		Q
	Dedução	[2]	P	Q
		[3]	P	
		[4]		Q'[3]

Fonte: Elaboração nossa, 2018.

Na etapa de checagem, emergem dois conceitos: o de *conciliação de metas* e o de *confirmação de hipóteses*. Conforme Rauen (2014), há conciliação de metas[4] sempre que o estado *Q'* no estágio [4] satisfaz, coincide com ou corresponde com a meta *Q* no estágio [1].

Há, nesse contexto, quatro possibilidades:

> Numa *conciliação ativa* (1a), o indivíduo i executa a ação P no contexto da hipótese abdutiva antefactual H_a, e a realidade Q' em t_4, como esperado, concilia-se com a meta Q em t_1. Numa *inconciliação ativa* (1b), o indivíduo i

[3] Q' representa a consecução da meta Q.

[4] No sentido empregado pelas ciências contábeis em situações como conciliação bancária ou de balanço.

> executa a ação P no contexto da hipótese abdutiva antefactual H_a, mas a realidade $\neg Q'$ em t_4 não se concilia com a meta Q em t_1. Numa *conciliação passiva* (1c), o indivíduo i não executa a ação P no contexto da hipótese abdutiva antefactual H_a, mas a realidade Q' em t_4, mesmo assim, concilia-se com a meta Q em t_1. Numa *inconciliação passiva* (1d), por fim, o indivíduo i não executa a ação P no contexto da hipótese abdutiva antefactual H_a, e, a realidade $\neg Q'$ em t_4, como esperado, não se concilia com a meta Q em t_1. (RAUEN, 2014, p. 604, tradução da autora, itálicos no original)[5].

A tabela 1, a seguir, resume essas possibilidades:

Tabela 1 – Possibilidades de consecução de metas

Estágios	(1a) Conciliação Ativa	(1b) Inconciliação Ativa	(1c) Conciliação Passiva	(1d) Inconciliação Passiva
[1]	Q	Q	Q	Q
[2]	$P \quad Q$	$P \quad Q$	$P \quad Q$	$P \quad Q$
[3]	P	P	$\neg P$	$\neg P$
[4]	Q'	$\neg Q'$	Q'	$\neg Q'$

Fonte: Rauen (2014, p. 604, tradução e adaptação nossa).

Há confirmação de uma hipótese abdutiva antefactual quando o estado da realidade Q' em t_4 "satisfaz, coincide com ou corresponde com a hipótese abdutiva antefactual H_a em t_2" (RAUEN, 2014, p. 604, tradução nossa, itálico no original), de modo que o resultado da ação P reforça a hipótese abdutiva antefactual H_a.

Conforme o autor, há uma gradação de graus de *confiança* ou *força* atribuído à conexão entre antecedente e consequente, que decorre da ontologia de conciliações e inconciliações pregressas de cada indivíduo. As hipóteses são categóricas $P \Leftrightarrow Q$ quando a ação P é suficiente, necessária e certa para a consecução Q; as hipóteses são bicondicionais $P \leftrightarrow Q$ quando a ação P é suficiente, necessária, mas não certa para a consecução Q; as hipóteses são condicionais $P \rightarrow Q$ quando a ação P é suficiente, mas não é necessária para a consecução Q; as hipóteses são habilitadoras $P \leftarrow Q$ quando a ação P é necessária, mas não é suficiente para a consecução Q; as hipóteses são tautológicas $P - Q$, por fim, quando a ação P não é nem suficiente nem necessária para a consecução Q.

A tabela 2, a seguir, formaliza essas possibilidades:

Tabela 2 – Condições de verdade para a modulação de hipóteses abdutivas antefactuais

Conciliações	Proposições		Categórica	Bicondicional	Condicional	Habilitadora	Tautológica
	P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftarrow Q$	$P - Q$
(1a) Conciliação Ativa	***V***	***V***	***V***	***V***	***V***	***V***	***V***
(1b) Inconciliação Ativa	*V*	*F*	*F*	*F*	*F*	*V*	*V*
(1c) Conciliação Passiva	*F*	*V*	*F*	*F*	*V*	*F*	*V*
(1d) Inconciliação Passiva	*F*	*F*	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*

[5] No original, os estágios são representados por tempos sucessivos t_1, t_2, t_3, t_4, respectivamente.

Fonte: Rauen (2014, p. 606, tradução e adaptação nossa).

Além disso, segundo Rauen (2014), há *autoconciliação* de metas quando o próprio indivíduo analisa se os resultados das ações estão conciliados com as metas iniciais e há heteroconciliação quando essa análise é colaborativa e demanda estímulos comunicacionais. Assim, assumimos que a proposição dos estímulos ostensivos comunicacionais que compõem o capítulo do livro de Silveira (2015) viabiliza, mas não garante a aprendizagem dos sistemas lineares, qualificando as hipóteses abdutivas constituintes como habilitadoras.

Rauen propõe três camadas de intenções para analisar processos comunicacionais. Para ele, uma intenção prática superordena uma intenção informativa, que superordena uma intenção comunicativa. No capítulo em pauta, por exemplo, a *intenção prática* Q de habilitar o estudante a compreender que retas representam equações do 1º grau no plano cartesiano superordena uma *intenção informativa* P de tornar essa proposição manifesta ou mais manifesta no ambiente cognitivo dos leitores[6]; e esta intenção informativa P superordena uma *intenção comunicativa* O de tornar mutuamente manifesto, para autor e leitores, que o autor pretende tornar essa proposição manifesta ou mais manifesta por meio de estímulos ostensivos do capítulo.

Essas camadas de autoconciliação podem ser assim apresentadas:

	Intenção comunicativa	*Intenção informativa*	*Intenção prática*
[1]			Q – Habilitar o estudante a compreender que a reta representa uma função polinomial do 1º grau no plano cartesiano, autor.
[2]		P – Informar ao estudante que a reta representa uma função polinomial do 1º grau no plano cartesiano, autor.	Q – Habilitar o estudante a compreender que a reta representa uma função polinomial do 1º grau no plano cartesiano, autor.
[3]	O – Afirmar que o conjunto de soluções de qualquer equação do 1º grau com duas incógnitas, sendo estas, números reais, é representado no plano cartesiano por uma reta, autor.	P – Informar ao estudante que a reta representa uma função polinomial do 1º grau no plano cartesiano, autor.	
[4]	O – O autor afirma: "O conjunto de soluções de qualquer equação do 1º grau com duas incógnitas, sendo estas, números reais, é representado no plano cartesiano por uma reta" (SILVEIRA, 2015, p. 168).		
[5]		P' – O autor informa ao estudante que a reta representa uma função polinomial do 1º grau no plano cartesiano	

[6] Sobre a noção de manifestabilidade, confiram-se Sperber e Wilson (1995, p. 38-46).

[6]	Q' – O autor habilita o estudante a compreender que a reta representa uma função polinomial do 1º grau no plano cartesiano

Fonte: Falta

Para descrever e explicar como os leitores depreendem essas camadas de intenções, heteroconciliação, Rauen (2014) incorpora de Sperber e Wilson (1986, 1995) o procedimento de interpretação orientado pela noção de relevância. Por relevância, define-se uma função de efeitos cognitivos positivos e esforço de processamento. Os efeitos cognitivos positivos podem ser gerados quando o processamento de um estímulo num contexto de suposições cognitivas prévias fortalece suposições prévias, contradiz e elimina suposições prévias, ou gera implicações – conclusões inferenciais derivadas da combinação desses estímulos com o contexto de suposições prévias. Em síntese, propõe-se em teoria da relevância que, em idênticas condições, a relevância é maior quando os efeitos cognitivos positivos são maiores ou quando os esforços de processamento para gerar esses efeitos cognitivos positivos são menores.

Seguem do conceito de relevância o *princípio cognitivo* de que a mente maximiza os efeitos cognitivos e o *princípio comunicativo* de que enunciados são presumidos como otimamente relevantes. Há *relevância ótima* quando o intérprete avalia o estímulo como pelo menos suficiente para merecer processamento e como o estímulo mais relevante que o falante se dispõe a ou é capaz de elaborar. É essa presunção de relevância ótima que gera um procedimento de compreensão segundo o qual o intérprete segue uma rota de minimização de esforços cognitivos, enriquecendo os estímulos para obter significados explícitos, caso necessário, e completando esses significados em nível implícito, caso pertinente.

Para ilustrar, observemos como Silveira (2015, p. 162) exemplifica a noção de equação. Em dado momento de um campeonato de basquete, Cássio diz a Leonardo: “Seu time não é melhor que o meu!” e propõe: “Se apenas uma de suas vitórias fosse nossa, estaríamos iguais no campeonato”. Para processar a proposta de Cássio, Leonardo (e também professores e estudantes) a encaixa numa forma lógica segundo a qual se uma condição é aceita – uma das vitórias de seu time fosse atribuída ao time de Cássio – então uma consequência é assumida – os times estariam empatados no campeonato (‘$Se\ P, então\ Q$’ou ‘$P \rightarrow Q$’). Cabe a Leonardo emparelhar, se possível, entradas lexicais com entradas enciclopédicas e gerar a explicatura do enunciado seguindo o procedimento de compreensão orientado pela relevância. Vejamos[7]:

Figura 4 – Elaboração da explicatura do enunciado de Cássio

Forma Linguística Entradas Lexicais[8]	Forma Lógica Entradas lógicas[9]	Explicatura Entradas Enciclopédicas
‘Se’	se (condição)	SE
‘apenas’	de algum modo exclusivo	APENAS
‘uma de suas vitórias’	alguma coisa	UMA DAS VITÓRIAS DO TIME DE LEONARDO
‘fosse’	fosse	FOSSE
‘nossa’	alguma coisa	UMA VITÓRIA DO TIME DE CÁSSIO
∅	então (consequência)	ENTÃO
∅	alguém	OS TIMES DE CÁSSIO E DE LEONARDO
‘estaríamos’	estaria	ESTARIAM
‘iguais’	de algum modo	IGUAIS EM PONTUAÇÃO
‘no campeonato’	em algum lugar	NO CAMPEONATO DE BASQUETE

Fonte: Elaboração nossa, 2018.

Além disso, cabe a Leonardo encaixar essa explicatura numa descrição de nível mais alto que leva em consideração o respectivo ato de fala. Vejamos:

> (1a) *CÁSSIO PROPÕE QUE* _______.
> (1b) *CÁSSIO PROPÕE QUE* $P \rightarrow Q$.
> (1c) *CÁSSIO PROPÕE QUE* SE APENAS UMA DAS VITÓRIAS DO TIME DE LEONARDO FOSSE UMA VITÓRIA DO TIME DE CÁSSIO, ENTÃO OS TIMES DE CÁSSIO E DE LEONARDO ESTARIAM IGUAIS EM PONTUAÇÃO NO CAMPEONATO DE BASQUETE.

Obtida a explicatura (1c), Leonardo pode combiná-la com seu conhecimento enciclopédico para convertê-la numa formulação algébrica. Para isso, ele elabora uma cadeia de inferências com as quais algumas suposições $S_1 - S_n$ são tomadas como premissas implicadas para a geração de conclusões implicadas ou implicaturas.

Vejamos, a seguir, uma possível cadeias de inferências:

> S_1 – Cássio propõe que se apenas uma das vitórias do time de Leonardo fosse uma vitória do time de Cássio, então os times de Cássio e de Leonardo estariam

---

[7] O ouvinte encaixa enunciados em formas lógicas, cujos constituintes podem ser acessados por três entradas: lógica, enciclopédica e lexical. Interpretar enunciados consiste em atribuir uma entrada enciclopédica para cada entrada lógica. Enunciados são mais explícitos quando há uma entrada lexical para cada entrada lógica e menos explícitos quando não há uma entrada lexical ou ela precisa ser complementada. Em geral, enunciados são menos que explícitos, e o ouvinte precisa torná-los plenamente proposicionais para atribuir valor de verdade. Sperber e Wilson (1986, 1995) chamam de explicatura o desenvolvimento de formas lógicas nestes termos.

[8] Conforme Silveira e Feltes (2002, p. 18), apresentamos as expressões linguísticas entre aspas simples, as entradas enciclopédicas em versalete minúsculo (CÁSSIO) e as referências no mundo sem qualquer indicativo (Cássio).

[9] Tecnicamente: ‘$P \rightarrow Q$’ ou ‘$P(ser\ nossa\ vitória\ x, \alpha_{exclusão}) \rightarrow Q(estar\ x, \alpha_{modo}, \beta_{lugar})$’.

iguais em pontuação no campeonato de basquete (premissa implicada da explicatura do enunciado de Cássio);
S_2 – A proposta de Cássio deve ser convertida numa formulação algébrica (premissa implicada das condições da tarefa[10]);
S_3 – A proposta de Cássio é uma equação (conclusão implicada por *modus ponens conjuntivo* – $S_1 \wedge S_2 \rightarrow S_3$[11]);
S_4 – y representa o número de vitórias do time de Leonardo (premissa implicada das condições da tarefa);
S_5 – O número de vitórias do time Leonardo é igual a $y - 1$ (conclusão implicada por *modus ponens conjuntivo* – $S_1 \wedge S_4 \rightarrow S_5$)
S_6 – x representa o número de vitórias do time de Cássio (premissa implicada das condições da tarefa);
S_7 – O número de vitórias do time Cássio é igual a $x + 1$ (conclusão implicada por *modus ponens conjuntivo* – $S_1 \wedge S_6 \rightarrow S_7$).
S_8 – A equação que representa a proposta de Cássio é $y - 1 = x + 1$ (conclusão implicada por *modus ponens conjuntivo* – $S_1 \wedge S_2 \wedge S_5 \wedge S_7 \rightarrow S_8$).

Conhecidas em linhas gerais as ferramentas analíticas, cabe aplicá-las na próxima seção ao plano de ação intencional do capítulo *Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas* de Silveira (2015).

Análise do Capítulo

Antes de analisar os estímulos comunicacionais do capítulo, para efeitos de exposição, antecipamos as principais etapas do plano de ação intencional, assumindo que a meta Q do autor é a de habilitar o estudante a representar e resolver situações-problema que envolvem sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas[12]. Para atingir essa meta, sugerimos que o autor se propõe a atingir as submetas P_{1-6} à direita; e, para atingir

[10] Silveira (2015, p. 162) propõe que o enunciado seja convertido numa equação algébrica, que x represente o número de vitórias do time de Cássio e que y represente o número de vitórias do time de Leonardo.

[11] Em teoria da relevância, argumenta-se haver um módulo interpretativo dedutivo que tem livre acesso a suposições provenientes da memória ou do ambiente e opera por regras como *eliminação-e* e *modus ponens*. Numa regra de *eliminação-e*, consideradas duas suposições verdadeiras em conjunto P e Q, cada uma delas é verdadeira separadamente, P ou Q. Formalmente: '$P \wedge Q, P$' ou '$P \wedge Q, Q$' (o símbolo $\wedge$ equivale à operação lógica de conjunção). Numa regra de *modus ponens*, se há uma relação de implicação entre duas suposições P e Q, quando a primeira é afirmada P, segue-se necessariamente a segunda Q. Formalmente: '$P \rightarrow Q, P, Q$' (o símbolo $\rightarrow$ equivale à operação lógica de implicação, '$se\ P\ então\ Q$'). Por vezes, é possível combinar as duas regras como é o caso do *modus ponens conjuntivo*: '$(P \wedge Q) \rightarrow R, P \rightarrow R, R$' ou então '$(P \wedge Q) \rightarrow R, Q \rightarrow R, R$'.

[12] Por constrição de espaço, optamos por uma exposição simplificada do plano de ação intencional que omite a descrição das respectivas hipóteses abdutivas antefactuais habilitadoras: $P_1 \leftarrow Q_1$, $O_1 \leftarrow P_1$, por exemplo. As reticências representam metas ou submetas de nível mais alto: ... Q, por exemplo.

cada uma dessas submetas, que o autor se propõe a atingir as ações antecedentes O_{1-9} à esquerda.

[1]		... Q – Habilitar o estudante a representar e resolver situações-problema que envolvem sistemas de equação do 1º grau com duas incógnitas, autor.
[2]		P_1 – Habilitar o estudante a reconhecer unidades significativas da representação de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas no registro algébrico e gráfico, autor.
[3]	O_1 – Habilitar o estudante a converter representações de situações-problema proposto em língua natural para a representação algébrica, autor.	
[4]	O_2 – Habilitar o estudante a reconhecer conjuntos de pares ordenados como unidades significativas do plano cartesiano, autor.	
[5]	O_3 – Habilitar o estudante a representar pares ordenados no registro gráfico, autor.	
[6]		P_2 – Habilitar o estudante a reconhecer equações do 1º grau com duas incógnitas, autor
[7]	O_4 – Habilitar o estudante a reconhecer a representação algébrica de equações do 1º grau com duas incógnitas, autor.	
[8]	O_5 – Habilitar o estudante a reconhecer retas no plano cartesiano como representação gráfica de equações do 1º grau com duas incógnitas, autor.	
[9]		P_3 – Habilitar o estudante a reconhecer sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas, autor.
[10]		P_4 – Levar o estudante a tratar sistemas de equações do 1º grau por diferentes métodos de solução, autor.
[11]	O_6 – Habilitar o estudante a tratar sistemas de equações do 1º grau com o método da tentativa, autor.	
[12]	O_7 – Habilitar o estudante a tratar sistemas de equações do 1º grau com o método da substituição, autor.	
[13]	O_8 – Habilitar o estudante a tratar sistemas de equações do 1º grau com o método da adição, autor.	
[14]		P_5 – Habilitar o estudante a solucionar graficamente sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas, autor.
[15]	O_9 – Habilitar o estudante a reconhecer sistemas de equações do 1º grau possíveis e determinados, impossíveis e possíveis e indeterminados a partir da representação algébrica, autor.	
[16]		P_6 – Propor ao estudante a resolução de atividades complementares, autor
[17]		... Q' – O autor habilita estudante a resolver situações-problema que envolvem sistemas de equação do 1º grau com duas incógnitas.

A submeta P_1 de habilitar o estudante a reconhecer unidades significativas da representação de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas nos registros algébrico e gráfico envolve três ações antecedentes. A ação O_1 consiste de habilitar o estudante a converter representações de situações-problema propostas em língua natural para representações algébricas. Para tanto, Silveira apresenta um problema envolvendo pontuação de pilotos no campeonato de *Fórmula 1*.

> Em 2014, o inglês Lewis Hamilton tornou-se bicampeão mundial de Fórmula 1. Nas 7 primeiras provas da temporada de 2014 em que pontuou, ele obteve 1º ou 2º lugar, totalizando 161 pontos. Vale lembrar que cada 1º lugar corresponde a 25 pontos e cada 2º lugar, a 18 pontos.
> Considerando que nessas 7 corridas Hamilton obteve 1º lugar em x provas e 2º lugar em y provas, responda às questões.
> – Qual é a equação que representa o total de corridas em que ele ficou em 1º e 2º lugar?
> – Qual é a equação que representa o total de pontos obtidos por ele nessas 7 provas em que pontuou? (SILVEIRA, 2015, p. 161).

O modelo matemático do problema apela para a representação de equações com mais de uma incógnita e, em segundo plano, a conversão de sua representação em língua natural para uma representação algébrica. Com auxílio do docente, cabe ao estudante representar algebricamente o total de corridas em que Hamilton ficou em 1º e 2º lugar ‘$x + y = 7$’ e o total de pontos obtidos ‘$25x + 18y = 161$’. Neste problema, a conversão da representação do registro em língua natural para o registro algébrico, dado que não atende aos critérios de congruência defendidos por Duval (2009)[13], demanda do estudante considerável esforço de processamento.

As duas interrogações que encerram o problema servem de estímulos comunicacionais por meio dos quais o autor torna mutuamente manifesto sua intenção informacional de tornar manifesta a solicitação das representações algébricas. Essas intenções comunicativa L_1 e informacional M_1 estão à serviço da intenção prática N_1 de solicitar que o estudante represente algebricamente o total de corridas em que Hamilton ficou em 1º e 2º lugar e o total de pontos obtidos que, por sua vez, está a serviço da meta prática O_1 de nível mais alto de habilitar o estudante a converter problemas do registro em língua natural para o registro algébrico[14].

Intenção comunicativa	*Intenção informativa*	*Intenções práticas*
		... O_1 – Habilitar o estudante a converter representações de situações-problema propostas em língua natural para uma representação algébrica, autor.
		N_1 – Solicitar que o estudante represente algebricamente o total de corridas em que Hamilton ficou em 1º e 2º lugar e o total de pontos obtidos, autor

[13] Rever a seção *Registros de Representação* deste estudo.

[14] Explicaturas e cadeias inferenciais dos estímulos comunicacionais podem ser feitas nos termos da análise da proposta de Cássio apresentada na seção antecedente e, por constrições de espaço, não serão desenvolvidas.

M_1 – Informar o estudante que o autor solicita que o estudante represente algebricamente o total de corridas em que Hamilton ficou em 1º e 2º lugar e o total de pontos obtidos, autor.

N_1 – Solicitar que o estudante represente algebricamente o total de corridas em que Hamilton ficou em 1º e 2º lugar e o total de pontos obtidos, autor.

L_1 – Questionar o estudante qual é a equação que representa o total de corridas em que Hamilton ficou em 1º e 2º lugar e qual é a equação que representa o total de pontos obtidos por Hamilton nessas 7 provas em que Hamilton pontuou, autor.

M_1 – Informar o estudante que o autor solicita que o estudante represente algebricamente o total de corridas em que Hamilton ficou em 1º e 2º lugar e o total de pontos obtidos, autor.

L_1 – O autor questiona: "Qual é a equação que representa o total de corridas em que ele ficou em 1º e 2º lugar?" e "Qual é a equação que representa o total de pontos obtidos por ele nessas 7 provas em que pontuou?" (SILVEIRA, 2015, p. 161).

Na página seguinte, Silveira apresenta o já parcialmente mencionado exemplo do campeonato de basquete no qual Cássio propõe a Leonardo que o time de Leonardo ceda uma de suas vitórias para que ambos os times fiquem empatados; e Leonardo propõe que o time de Cássio ceda uma de suas vitórias para que o time de Leonardo obtenha o dobro de vitórias. O livro apresenta as respectivas equações: '$y - 1 = x + 1$' e '$y + 1 = 2(x - 1)$' e duas questões: "Que valores x e y podem assumir? Por quê?", habilitando o estudante a compreender que as letras x e y "correspondem ao número de vitórias do time verde [de Cássio] e do time vermelho [de Leonardo], respectivamente" (colchetes nossos); e, atribuindo valores a essas variáveis por sucessivas tentativas, determinar as vitórias de cada time, '5' e '7' respectivamente.

Em termos de conciliação de metas e pressupondo a mediação docente, o autor está propondo as ações M_1 de identificar as variáveis x e y das propostas de Cássio e Leonardo e M_2 de lhes atribuir sucessivos valores por tentativa como forma de resolvê-las – submeta N_1 em direção à consecução da submeta O_1 de nível mais alto.

... O_1 – Habilitar o estudante a converter representações de situações-problema propostas em língua natural para uma representação algébrica, autor.

N_1 – Habilitar o estudante a resolver as propostas de Cássio e de Leonardo pelo método da tentativa e erro, autor.

M_1 – Habilitar o estudante a identificar as variáveis x e y das propostas de Cássio e de Leonardo, autor.

M_2 – Habilitar o estudante a atribuir valores às variáveis x e y das propostas de Cássio e de Leonardo, autor.

A ação O_2 de habilitar o estudante a reconhecer conjuntos de pares ordenados como unidades significativas do plano cartesiano mobiliza o seguinte plano na seção 1 do capítulo:

... O_2 – Habilitar o estudante a reconhecer conjuntos de pares ordenados como unidades significativas do plano cartesiano, autor.

N_1 – Habilitar o estudante a definir pares ordenados através de coordenadas de letras e números, autor.

M_1 – Habilitar o estudante a reconhecer o conceito de par ordenado em jogo de batalha-naval, autor.

M_2 – Habilitar o estudante a localizar posições de peças de xadrez no tabuleiro através de pares ordenados, autor.

M_3 – Habilitar o estudante a localizar coordenadas geográficas no mapa mundial através de pares ordenados, autor.

M_4 – Habilitar o estudante a localizar coordenadas geográficas em GPS através de pares ordenados, autor.

N_2 – Habilitar o estudante a representar algebricamente coordenadas/pares ordenados (x, y), autor.

M_5 – Habilitar o estudante a determinar os valores para x e y, em igualdades de pares ordenados, autor.

Para atingir a ação N_1 de habilitar o estudante a definir pares ordenados através de coordenadas de letras e números, correlacionando o objeto de conhecimento com as experiências dos estudantes, Silveira apresenta nas páginas 163-164 três situações-problema representadas pictórica e linguisticamente. Para conhecer o conceito de par ordenado M_1, apresenta um jogo de batalha naval; para localizar posições de peças M_2 e coordenadas geográficas M_{3-4}, apresenta um jogo de xadrez e um mapa-múndi[15].

A ação N_2 de habilitar o estudante a representar algebricamente coordenadas/pares ordenados (x, y) é alcançada por seis exercícios meramente algébricos na página 164 que visam a determinar os valores para x e y em igualdades de pares ordenados M_5.

Determinar x e y para que cada uma das igualdades seja verdadeira.

a) $(x, y) = (8, -3)$
b) $(8, y + 5) = (x, 8)$
c) $(x, -2) = (8, y)$
d) $(x + 1, y + 1) = (8, 6)$
e) $(x, y + 2) = (5, 4)$
f) $(4, y + 7) = (x + 1, 6)$

Fonte: (SILVEIRA, 2015, p. 164).

[15] Na página 165, há na seção Lendo e aprendendo um texto sobre Sistema de Posicionamento Global (GPS).

Para verificar a igualdade nos exercícios a e c, basta o estudante substituir as incógnitas pelos valores correspondentes do par ordenado. No exercício a, por exemplo, a proposição '$(x, y) = (8, -3)$' é verdadeira, se e somente se $x = 8$ e $y = -3$. Entretanto, para preservar o valor de verdade das proposições nos demais exercícios, são necessários tratamentos ainda não exemplificados pelo autor. No exercício f, o estudante pode isolar os valores das incógnitas para então substituí-las. Segue dos tratamentos que a proposição '$(4, y + 7) = (x + 1{,}6)$' é verdadeira, se e somente se $x = 3$ e $y = -1$.

$$4 = x + 1$$
$$x = 4 - 1$$
$$x = 3$$

$$y + 7 = 6$$
$$y = 6 - 7$$
$$y = -1$$

$$(4, y + 7) = (x + 1{,}6)$$
$$(4, -1 + 7) = (3 + 1{,}6)$$
$$(4{,}6) = (4{,}6)$$

A ação O_3 de habilitar o estudante a representar pares ordenados no registro gráfico mobiliza as submetas de habilitar o estudante a identificar unidades significativas N_1 e localizar e representar pares ordenados no plano cartesiano N_2.

... O_3 – Habilitar o estudante a representar pares ordenados no registro gráfico, autor
N_1 – Habilitar o estudante a identificar unidades significativas que compõem o plano cartesiano, autor.
N_2 – Habilitar o estudante a localizar e representar pares ordenados no plano cartesiano, autor.

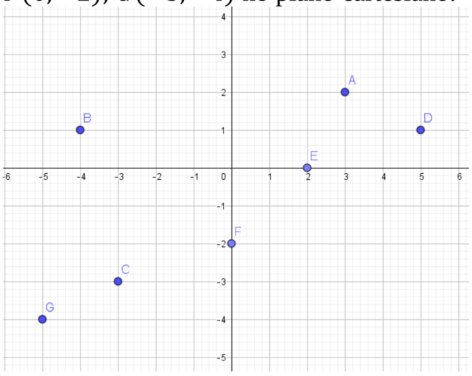
M_1 – Habilitar o estudante a localizar e representar pares ordenados no plano cartesiano em atividades envolvendo os registros em língua natural, algébrico e gráfico, autor.

O estudante precisa compreender que um plano ou espaço cartesiano R^2 consiste na representação de dois eixos perpendiculares, tal que o eixo horizontal é denominado eixo das abcissas representado geralmente pela letra x e o eixo vertical denominado eixo das ordenadas representado geralmente pela letra y, e os pares ordena dos (x, y) determinam coordenadas de pontos. Em cada par ordenado, o primeiro elemento representa a abscissa e o segundo elemento representa a ordenada do ponto. Para tanto, o autor apresenta os seguintes estímulos:

Exemplo
$P(3,4)$
3 e 4 são as coordenadas do ponto P.
3 é a abscissa do ponto P.
4 é a ordenada do ponto P.
Fonte: (SILVEIRA, 2015, p. 166).

Em seguida, o autor solicita que o estudante represente as coordenadas formadas por sete pares ordenados:

Representar os pares ordenados $A(3,2)$; $B(-4,1)$; $C(-3,-3)$; $D(5,1)$; $E(2,0)$; $F(0,-2)$; $G(-5,-4)$ no plano cartesiano.



Fonte: (SILVEIRA, 2015, p. 166, adaptação nossa).

Para dar conta da ação M_1, o autor propõe quatro atividades. A primeira solicita que o estudante determine algebricamente as coordenadas de dez pontos representados no plano cartesiano. A segunda faz o trajeto inverso. A terceira solicita que os estudantes construam o plano cartesiano e represente cinco pontos conforme instruções $a - f$. A quarta solicita que os estudantes reconheçam regularidades da representação gráfica partindo da atividade anterior.

Em comum, exemplos e atividades da ação O_3 estimulam a conversão de representações semióticas, mas são desprovidos de contexto que instigue o estudante a raciocinar e a comparar a aplicação do conceito matemático com situações práticas de seu entorno.

A submeta P_2 de "habilitar o estudante a reconhecer equações do 1º grau com duas incógnitas" mobiliza as ações O_4 de habilitar o estudante a reconhecer a representação algébrica e O_5 de habilitar o estudante a reconhecer retas no plano cartesiano como representação gráfica de uma função polinomial do 1º grau com duas variáveis na seção 2 do capítulo.

	... O_4 – Habilitar o estudante a reconhecer a representação algébrica de equações do 1º grau com duas incógnitas, autor N_1 – Habilitar o estudante a identificar unidades significativas da representação genérica da equação de 1º grau com duas incógnitas, autor.
M_1 – Habilitar o estudante a identificar unidades significativas da representação genérica da equação de 1º grau com duas incógnitas, autor.	
	N_2 – Habilitar o estudante a identificar a fórmula da representação genérica da equação de 1º grau com duas incógnitas, autor. N_3 – Habilitar o estudante a elaborar uma equação que represente a situação problema em língua natural, autor. ... O_5 – Habilitar o estudante a reconhecer retas no plano cartesiano como representação gráfica de equações do 1º grau com duas incógnitas, autor N_1 – Habilitar o estudante a representar no registro gráfico a solução da equação do 1º grau com duas incógnitas, autor.
M_1 – Habilitar o estudante a resolver equações de 1º grau mediante atribuição de valores de x e y em uma tabela, autor. M_2 – Habilitar o estudante a resolver equações de 1º grau mediante atribuição de pares ordenados, autor.	
	N_2 – Habilitar o estudante a compreender que o conjunto solução de equação de 1ºgrau com duas incógnitas envolvendo números reais será representado no registro gráfico por uma reta, autor. N_3 – Propor atividades envolvendo a conversão entre registros, Autor.

Silveira (2015, p. 167) considera um problema em língua natural para atingir a submeta *N3* da ação *O4*. Ao demonstrar a conversão da representação do problema em língua natural para o registro algébrico, cria condições para que o estudante compreenda que valores desconhecidos são representados por símbolos, em geral letras como x, y ou z.

> Emília comprou uma caneta e dois lápis por $R\$\ 10{,}00$. Indicando por x o preço de uma caneta e por y o preço de um lápis, podemos escrever: $x + 2y = 10$. Temos, então, um exemplo de equação do 1ºgrau com duas incógnitas.

Em seguida, Silveira (2015, p. 167) apresenta a representação genérica da equação de 1º grau com duas incógnitas:

> Denominamos equação do 1º grau com duas incógnitas (x, y) aquela que pode ser reduzida a uma equação do tipo $ax + by = c$, em que a, b e c são números reais, chamados coeficientes, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

Para dar conta das submetas N_2 e N_3 da ação *O4*, o autor propõe cinco problemas em duas atividades cuja resolução exige a conversão do registro em língua natural para o registro algébrico. Observe-se que, em comum, a conversão das representações das situações-problema do registro em língua natural para o registro algébrico em ambas as atividades é complexa em função da ausência de congruência.

> 1. Escreva uma equação que represente cada uma das situações a seguir:
> a) O perímetro de um retângulo com lados de medidas x e y é de 48 cm.
> b) O comprimento x de um retângulo excede sua largura y em 9 cm.
> c) De um total de 20 tiros dados no tiro ao alvo, Julinho acertou x e errou y.
> d) No tiro ao alvo, ganhando 5 pontos em cada um dos x tiros acertados e perdendo 3 pontos em cada um dos y tiros errados, Julinho fez 68 pontos.
> 2. No sítio de Pedro há x galinhas e y porcos, em um total de 140 pés. Escreva uma equação que represente essa situação. (SILVEIRA, 2015, p. 167).

Ainda na página 167, o autor aborda a "representação gráfica das soluções de uma equação do 1º grau com duas incógnitas" para atingir a submeta N_1 da ação O_5. Para isso, Silveira parte da equação $x + 2y = 16$ (registro algébrico) para gerar uma tabela (registro tabular) submeta M_1 da ação O_5.

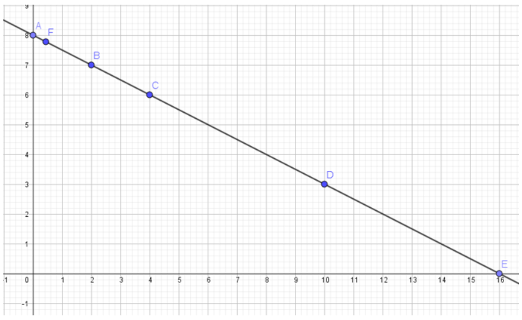
Observe a equação do 1º grau com duas incógnitas $x + 2y = 16$.
Em seguida, veja alguns possíveis valores de x e y.

x	y	$x + 2y = 16$
0	8	$0 + 2 \cdot 8 = 16$
2	7	$2 + 2 \cdot 7 = 16$
4	6	$4 + 2 \cdot 6 = 16$
10	3	$10 + 2 \cdot 3 = 16$
16	0	$16 + 2 \cdot 0 = 16$

A equação $x + 2y = 16$ admite infinitas soluções.
Fonte: (SILVEIRA, 2015, p. 167, adaptação nossa).

Em seguida, apresenta a representação gráfica da função que equivale à equação do 1º grau com duas incógnitas dos valores tabulados de x e y, submeta M_2da ação O_5.

> As soluções de uma equação do 1º grau com duas incógnitas podem ser expressas por pares ordenados (x, y) e representadas graficamente no plano cartesiano.
> Na equação $x + 2y = 16$, os pares ordenados (0,8), (2,7), (4,6), (10,3) e (16,0) são algumas de suas soluções.
> Observe a representação desses pares ordenados no plano cartesiano.
> Note que os pontos estão alinhados – eles sugerem uma reta. No Ensino Médio, vamos demonstrar que o conjunto de todas as soluções de $x + 2y = 16$, em que x e y são números reais, é representado por uma reta.

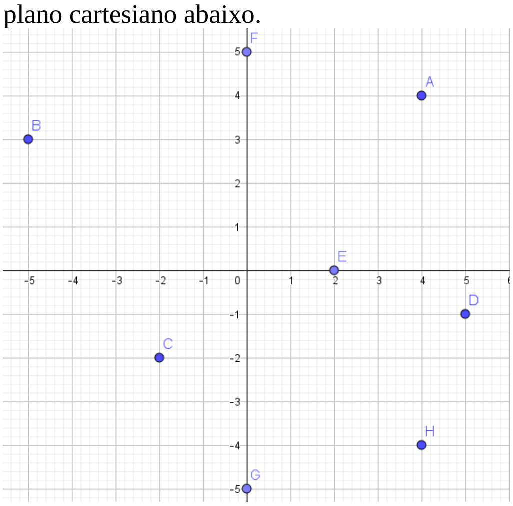


Fonte: (SILVEIRA, 2015 p. 168, adaptação nossa).

O exemplo, embora não represente uma situação-problema[16], permite constatar que a equação admite várias soluções que podem ser expressas por pares ordenados (x, y) alinháveis, sugerindo que a solução gráfica de uma equação do 1ºgrau é uma reta – submeta N_2 da ação O_5.

A fim de reforçar as submetas N_2 e N_3 da ação O_5, o autor propõe três atividades que demandam tratamentos e conversões. A atividade 1 demanda a conversão da representação no registro gráfico para uma representação no registro algébrico, e é um dos exemplos raros de inversão do sentido da conversão. A atividade 2 demanda a conversão da representação no registro em língua natural para uma representação nos registros gráfico e algébrico. A atividade 3, por fim, demanda a conversão da representação no registro algébrico para uma representação no registro gráfico.

1. Determine as coordenadas dos pontos A, B, C, D, E, F, G e H indicados no plano cartesiano abaixo.



2. Copie o plano cartesiano com aqueles cinco pontos cujos pares ordenados são soluções da equação $x + 2y = 16$ (ver acima). Depois, na equação, substitua x por cinco outros números e calcule os valores correspondentes de

[16] Por situação-problema, consideramos neste artigo uma questão advinda do contexto do estudante que é passível de ser representada matematicamente.

y. Localize no plano os pontos (x, y) obtidos. Os novos pontos estão alinhados com os pontos anteriores?
3. Represente graficamente as soluções das equações.

$a)\ x + y = 3$	e) $2x - y = 4$
$b)\ y = x$	f) $x + y = -5$
$c)\ x + 4y = 4$	$g)\ x + y = 0$
d) $x - y = 6$	h) $x + y = 6$

Fonte: (SILVEIRA, 2015, p. 168, adaptação nossa).

Em seguida, Silveira pretende habilitar o estudante a reconhecer sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas – subetapa P_3 na seção 3 do capítulo, propondo o seguinte problema:

> Um grupo de amigos foi à sorveteria e comprou sorvetes com uma ou duas bolas ao preço de $R\$\ 3{,}00$ e $R\$\ 5{,}00$, respectivamente. Foram comprados 12 sorvetes, que custam ao todo $R\$\ 44{,}00$. Quantos sorvetes com uma bola foram comprados? E com duas bolas? (SILVEIRA, 2015 p. 169).

Para modelar esse problema, o estudante deverá representar por x e y os sorvetes com uma e duas bolas, e a soma pela equação: $x + y = 12$. Além disso, sabendo que o preço dos sorvetes é de $R\$\ 3{,}00$ e $R\$\ 5{,}00$, respectivamente, e que o preço pago pelos 12 sorvetes foi de $R\$\ 44{,}00$, deverá representar essa situação pela equação: $3x + 5y = 44$. Estas duas equações formam um sistema de equações de 1º grau com duas incógnitas:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 3x + 5y = 44 \end{cases}$$

O problema demanda quantos sorvetes de cada tipo foram comprados, e a solução será 8 sorvetes com uma bola e 4 sorvetes com duas bolas, formando o par ordenado $(8{,}4)$. Todavia, Silveira não discute a resolução deste sistema. Para "levar o estudante a tratar sistemas de equações do 1º grau por diferentes métodos de solução" – subetapa P_4, apresenta três situações novas, e as ações O_{6-8} (vinculadas a submeta P_4) vão dar conta, respectivamente, do método da tentativa, da substituição e da adição na seção 4 do capítulo.

... O_6 – Habilitar o estudante a tratar sistemas de equações do 1º grau com o método da tentativa, autor.
N_1 – Habilitar o estudante a representar algebricamente um sistema a partir do registro em língua natural, autor.

M_1 – Habilitar o estudante a identificar unidades significativas do registro em língua natural, autor.
M_2 – Habilitar o estudante a buscar a solução para um sistema de equações atribuído valores as incógnitas, autor.

... O_7 – Habilitar o estudante a tratar sistemas de equações do 1º grau com o método da substituição, autor.

N_1 – Habilitar o estudante a buscar a solução para um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas, representado no registro algébrico, autor.

M_1 – Habilitar o estudante a isolar a incógnita de uma das equações, autor.
M_2 – Habilitar o estudante a fazer a substituição do valor da incógnita isolada na segunda equação, a fim de determinar o valor da incógnita resultante, autor.
M_3 – Habilitar o estudante a substituir o valor da incógnita calculada em uma das equações do sistema, a fim de determinar o valor da outra incógnita, autor.

... O_8 – Habilitar o estudante a tratar sistemas de equações do 1º grau com o método da adição, autor.

N_1– Habilitar o estudante a buscar a solução para um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas, representado no registro algébrico, autor.

M_1 – Habilitar o estudante a adicionar duas equações membro a membro, autor.

M_2 – Habilitar o estudante ao adicionar duas equações a eliminar uma das incógnitas, para calcular o valor da incógnita não eliminada, autor.
M_3 – Habilitar o estudante a substituir o valor da incógnita calculada em uma das equações do sistema, a fim de determinar o valor da outra incógnita, autor.

Na ação O_6 – método da tentativa, o autor parte de uma situação-problema, demonstra sua conversão para o registro algébrico e a resolve, utilizando uma tabela com possíveis valores para x e y como registro intermediário até encontrar o par ordenado adequado.

Considere a situação a seguir.
Jonas possui $R\$ \ 130{,}00$ em cédulas de $R\$ \ 10{,}00$ e $R\$ \ 20{,}00$, em um total de 9 cédulas. Quantas cédulas de cada espécie possui Jonas?
Considerando x o número de cédulas de $R\$ \ 10{,}00$ e y o número de cédulas de $R\$ \ 20{,}00$, podemos escrever um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas que represente essa situação:

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ 10x + 20y = 130 \end{cases}$$

A solução do sistema deve satisfazer as duas equações.
Na busca dessa solução podemos realizar tentativas, atribuindo valores a x e a y. Assim:

x	y	$x + y$	$10x + 20y = 130$
2	7	$2 + 7 = 9$	$10 \cdot 2 + 20 \cdot 7 = 160$
3	6	$3 + 6 = 9$	$10 \cdot 3 + 20 \cdot 6 = 150$
4	5	$4 + 5 = 9$	$10 \cdot 4 + 20 \cdot 5 = 140$
5	4	$5 + 4 = 9$	$10 \cdot 5 + 20 \cdot 4 = 130$

Observe que $x = 5$ e $y = 4$, ou seja, o par ordenado $(5, 4)$ é a solução do sistema, pois satisfaz as duas equações.
Resolvemos o sistema acima pelo **método da tentativa**. [...].
Fonte: (SILVEIRA, 2015, p. 169-170, negrito no original, adaptação nossa).

Para atingir as submetas M_{1-3} da ação O_7 – método da substituição, o autor parte de um sistema descontextualizado[17]:

$$\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$$

No livro do docente, o autor sugere que se retome o exemplo dos sorvetes, levando-nos a nos questionar por que não o utilizar na própria exemplificação.

Peça aos alunos que resolvam o sistema que soluciona o problema da sorveteria da página anterior. Espera-se que concluam que foram comprados 8 sorvetes de uma bola e 4 de duas. (SILVEIRA, 2015, p. 170, livro do docente).

Para reforçar a ação O_7, Silveira apresenta três atividades a serem resolvidas pelo método da substituição. A terceira, retoma o problema da pontuação de pilotos no campeonato de *Fórmula 1* que abre o capítulo, levando-nos a nos questionar se a postergação da resolução desse problema é viável em sala de aula.

3. Releia a abertura deste capítulo. Resolvendo o sistema formado pelas duas equações obtidas, descubra em quantas provas, das sete primeiras em que pontuou na temporada de 2014, Hamilton ganhou e em quantas ficou com o 2º lugar. (SILVEIRA, 2015 p. 170).

Para o método da adição – ação O_8, Silveira utiliza a representação pictórica. A noção de equação é representada por uma balança, as incógnitas por estrelas e triângulos e os valores por pesos em quilogramas.

Assim como os dois pratos de uma balança, os dois membros de uma equação devem ser 'equilibrados'. A balança equilibrada simboliza uma igualdade.
Usaremos as balanças para ilustrar a resolução, pelo método da adição, de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas: nas ilustrações representadas por [estrela] e [triângulo] e, algebricamente, por x e y, respectivamente (SILVEIRA, 2015, p. 171, desenhos no original).

[17] Por descontextualizada, definimos neste artigo questões que não envolvem o contexto do estudante nos termos do objetivo EF08MA08 da BNCC (2016).

Cada passo da eliminação da variável y pelo método da adição é explicado mediante o pareamento de figuras de balanças – contendo em seus pratos estrelas, triângulos e pesos – com as respectivas representações algébricas do sistema[18].

$$\begin{cases} 3x = \mathrm{y} + 2 \\ 2x + y = 18 \end{cases}$$

O resultado do tratamento é o par ordenado $(4,10)$, de modo que "um triângulo vale 4 kg e uma estrela vale 10 kg" (SILVEIRA, 2015, p. 171, desenhos no original).

Na página 172, o autor desenvolve o tratamento algébrico pelo método da adição de dois sistemas descontextualizados:

$$\begin{cases} x + y = 16 \\ x - y = 2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x + 5y = -28 \\ 2x + 3y = -7 \end{cases}$$

Em seguida, propõe três atividades. Na primeira, solicita que os estudantes resolvam nove sistemas descontextualizados de equações pelo método da adição. Nas atividades 2 e 3, parte de problemas que demandam por conversão para o registro algébrico[19], respectivamente congruente e não congruente.

> 2. A soma de dois números é 320, e a diferença entre eles é 60. Determine esses números.
> 3. Em uma fazenda só há galinhas e vacas num total de 36 cabeças e 102 pés. Quantas galinhas há nessa fazenda? (SILVEIRA, 2015, p. 173).

A subetapa P_5 visa a habilitar o estudante a solucionar graficamente sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas e mobiliza a ação O_9 de reconhecer os três tipos de sistemas em R_2 na seção 5 do capítulo.

Na ilustração de um sistema possível e determinado[20], o autor parte do sistema:

---

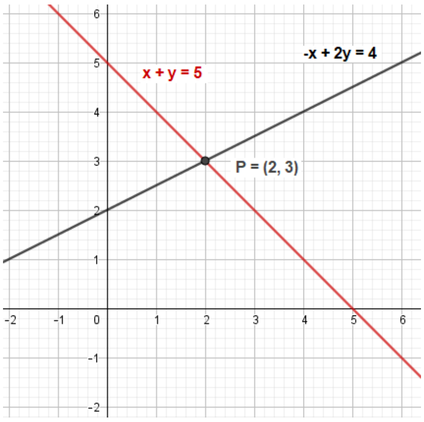
[18] A equação $2x + y = 18$, por exemplo, é representada por uma balança contendo no prato esquerdo uma estrela e dois triângulos e no prato direito um peso de 18 Kg.

[19] Um texto sobre o experimento de Arquimedes de Siracusa para determinar a densidade relativa dos corpos intitulado "Eureka" segue os exercícios e compõe a seção Lendo e aprendendo (p. 173-174).

[20] O padrão de exposição se repete para ilustrar sistemas impossíveis, e possíveis e indeterminados (p. 176-177).

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2y - x = 4 \end{cases}$$

Antecipando o par ordenado $(2, 3)$ como solução, o autor propõe-se a verificá-lo graficamente, atribuindo valores para x e y em cada equação e obtendo pontos que permitem traçar duas retas. Silveira explica que "as coordenadas do ponto de encontro das retas formam o par ordenado que é a solução do sistema", bastando traçar retas perpendiculares aos eixos.



Fonte: (SILVEIRA, 2015, p. 175, adaptação nossa).

E complementa:

> Nesse caso, as retas são concorrentes e o par ordenado $(2, 3)$ é a solução única do sistema. Assim, dizemos que o sistema é possível e determinado, pois tem uma única solução. (SILVEIRA, 2015, p. 175).

Na página 177, o autor apresenta oito atividades de conversão:

> Represente graficamente as soluções dos sistemas. Em seguida, classifique cada
> um dos sistemas em possível e determinado, possível e indeterminado ou impossível.
>
> a) $\begin{cases} x - 5y = 10 \\ 2x - 10y = 20 \end{cases}$
>
> b) $\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ 4x - 6y = 14 \end{cases}$
>
> c) $\begin{cases} 2x - 4y = 10 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$
>
> d) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ -4x - 2y = -8 \end{cases}$
>
> e) $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$
>
> f) $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 6x - 3y = 15 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x + y = 4 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$

Em comum, exemplos e atividades consistem de conversões descontextualizadas que partem do registro algébrico para o registro gráfico, sugerindo o registro de representação tabular como registro intermediário para a definição de pelo menos duas coordenadas que compõem as respectivas retas.

O plano de ação intencional do autor pode ser visto a seguir:

O_9 – Habilitar o estudante a reconhecer sistemas de equações do 1º grau possíveis e determinados, impossíveis e possíveis e indeterminados a partir da representação algébrica, autor.

N_1 – Habilitar o estudante a traçar retas como solução gráfica de cada equação do sistema a partir de dois valores de x e y dispostos numa tabela, autor.
N_2 – Habilitar o estudante a reconhecer a disposição das retas no plano cartesiano (interseção, ausência de interseção e sobreposição) como solução dos sistemas, autor.
N_3 – Habilitar o estudante a traçar retas perpendiculares aos eixos para identificar o par ordenado como solução de sistema possível e determinado, autor.

No final do capítulo[21], Silveira propõe a resolução de atividades complementares, submeta P_6. Primeiro, apresenta uma atividade da Olimpíada Brasileira de Matemática, envolvendo um sistema de equações de 1º grau com três incógnitas a ser resolvido em equipe; depois apresenta um conjunto de cinco atividades para trabalhar conhecimentos adquiridos no capítulo; e, por fim sugere 50 atividades assim distribuídas:

Tabela 3 – Tratamentos e conversões em atividades propostas por Silveira (2015, p. 178-183):

Tipos de tratamento e conversão	Frequência
Tratamento e conversão de uma representação no registro em língua natural para uma representação no registro algébrico ($RLN \rightarrow RA$)	39
Tratamento e conversão da uma representação no registro algébrico para uma representação no registro gráfico ($RA \rightarrow RG$)	1
Tratamento e conversão de uma representação no registro gráfico para uma representação no registro algébrico ($RG \rightarrow RA$)	1
Tratamento e conversão de uma representação do registro em língua natural para uma representação nos registros algébrico e gráfico ($RLN \rightarrow RA \rightarrow RG$)	2
Tratamento somente no registro algébrico (RA)	7
Total	50

Fonte: Elaboração nossa, 2018.

[21] Antes disso, na seção *Lendo e aprendendo*, há um texto sobre o papiro de Rhind. Segundo Silveira (2015, p. 177), "o papiro de Rhind ou papiro Ahmes é um documento egípcio de cerca de 1650 a.C., em que um escriba de nome Ahmes detalha a solução de 85 problemas de Aritmética e Geometria" com equações "cujas incógnitas são representadas por íbis (ave sagrada dos egípcios) cavando o solo".

Dentre as 50 atividades, podemos constatar que 43 demandam por conversões de registros de representação e 7 atividades se restringem a tratamentos algébricos, sugerindo prevalência de tratamentos contextualizados.

Dentre as 43 atividades com conversão, 39 se restringem a modelar algebricamente as situações-problema. Houve apenas dois casos que demandam pelos três registros, um caso que parte do registro algébrico para o registro gráfico e outro que inverte essa conversão, e um caso de interpretação algébrica de um gráfico. Isso sugere atendimento parcial do objetivo EF08MA08 da BNCC (2016, p. 265). Aparte ausência de atividades que demandam pela elaboração de problemas, os exercícios privilegiam a resolução de problemas contextualizados, mas a interpretação gráfica de problemas e sistemas foi exigida apenas em três atividades.

Além disso, o sentido da conversão é prevalentemente orientado da língua natural para o registro algébrico em 42 das 43 atividades. A interpretação algébrica de gráfico ocorreu apenas uma única vez, sugerindo fraca atenção a conversões inversas.

Discussão dos resultados

Neste artigo, verificamos se e como Silveira (2015) potencializa conversões de registros de representação semiótica (DUVAL, 2009) no capítulo *Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas* do livro *Matemática Compreensão e Prática: 8º ano*. Para tanto, assumimos a hipótese operacional de que o capítulo pode ser descrito e explicado por sucessivas hipóteses abdutivas (RAUEN, 2014; SPERBER; WILSON, 1986, 1995).

O estudo sugere que Silveira se propôs a habilitar o estudante a representar e resolver situações-problema que envolvem sistemas de equação do 1º grau com duas incógnitas. Para isso, forneceu condições para o estudante reconhecer unidades significativas da representação de equações e as próprias equações nos registros algébrico e gráfico para então habilitá-los a reconhecer equações do 1º grau com duas incógnitas nesses dois registros; tratá-las algébrica e graficamente; e, a partir da representação algébrica, reconhecer sistemas possíveis e determinados, impossíveis, e possíveis e indeterminados.

Essa modelação revelou-se muito próxima dos quatro objetivos traçados pelo próprio autor no livro do professor:

> Compreender a ideia de par ordenado;
> Identificar uma equação do 1º grau com duas incógnitas e compreender a representação gráfica de suas soluções;
> Compreender a ideia de sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas e compreender como resolvê-lo por tentativa e erro, método da substituição, método da adição e por representação gráfica;
> Resolver situações-problema que envolvem sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas. (SILVEIRA, 2015, p. 338).

Silveira (2015, p. 339), quando tece comentários sobre o capítulo no manual do professor, afirma que

> [...] o aluno alcança a apreensão conceitual quando lhe é exigida a coordenação de diferentes registros, como, por exemplo, o registro algébrico, registro gráfico, registro figural, registro em língua materna etc. Isso se dá porque cada um dos registros caracteriza o conceito matemático de uma maneira e todas as maneiras se complementam.

Essa preocupação se revela em um conjunto expressivo de exemplos contextualizados, de Fórmula 1 à batalha naval, de coordenadas de GPS à Olimpíada de Matemática. Além disso, representações tabulares intermediárias são mobilizadas no método da tentativa e representações figurais não apenas ilustram os casos (figuras de jogadores de basquete, por exemplo), mas os representam (xadrez, mapa-múndi e, notadamente, balanças).

Em síntese, os resultados sugerem que os estímulos ostensivos do capítulo se conciliam com a meta de habilitar o estudante a resolver situações-problema que envolvem sistemas de equação do 1º grau com duas incógnitas. Para tanto, (a) prevalecem no capítulo modelações algébricas de problemas em língua natural, salvo casos descontextualizados; (b) a interpretação gráfica dos sistemas, embora presente, é timidamente desenvolvida em exemplos e atividades; e (c) conversões inversas são raras e se restringem a interpretar gráficos algebricamente.

Embora concebido antes da publicação da BNCC (2016), o capítulo sugere aderência parcial ao objetivo EF08MA08, estabelecido para o ensino e a aprendizagem de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas. Se, de um lado, exemplos e atividades habilitam o estudante a resolver “problemas relacionados ao seu contexto próximo” e, mesmo que timidamente, “interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso”, de outro, não há qualquer remissão a exemplos e atividades que promovam a elaboração de problemas.

Referências

BATTAGLIOLI, C. dos S. M. **Sistemas lineares na segunda série do ensino médio**: um olhar sobre os livros didáticos. 2008. 113 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática)-Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2008.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2016.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano**: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Trad. de Lênio Fernandes Levy e Marisa Roâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

HOWARD, A.; RORRES, C. **Álgebra linear com aplicações**. Trad. de Claus Ivo Doering. 8. ed. Porto Alegre: Bookmann, 2001.

KOLMANN, B.; HILL, D. R. **Introdução à álgebra linear**: com aplicações. Trad. de Alessandra Bosquilha. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.

RAUEN, F. J. For a goal conciliation theory: ante-factual abductive hypotheses and proactive modelling. **Linguagem em (Dis)curso**, v. 14, n. 3, p. 595-615, set./dez. 2014.

SILVEIRA, E. **Matemática**: compreensão e prática: 8º ano. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2015.

SPERBER, D.; WILSON, D. **Relevance**: communication and cognition. 2nd. ed. Oxford: Blackwell, 1995 [1st. ed. 1986].

Recebido em 19/03/2018
Aceito em 17/06/2018