EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i2p47-83

Engenharia Didática de Formação (EDF): sobre o ensino dos Números (Generalizados) de Catalan (NGC)

Didactical Engineering: about the teaching of generalized Catalan numbers

____

FRANCISCO REGIS VIEIRA ALVES[1]

Resumo

Registramos uma considerável atenção dedicada por parte dos autores de livros de História da Matemática (HM) concernentemente aos clássicos fundamentos do Cálculo Diferencial e Integral. Por outro lado, se mostra imprescindível ao entendimento do professor de Matemática uma compreensão sobre um irrefreável processo matemático e epistemológico evolutivo dos objetos matemáticos, desde seu estádio de nascedouro até o momento atual. Assim, o presente trabalho relata uma Engenharia Didática de Formação (EDF) desenvolvida com a participação de cinco professores em formação inicial, no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia – IFCE, no ano de 2017. O tema abordado envolveu a noção de Números Generalizados de Catalan (NGC) que representa uma contribuição de vários matemáticos e a pesquisa atual sobre inúmeros problemas derivados confirmam seu processo de generalização ininterrupto. O estudo envolveu cinco tarefas e duas situações estruturadas de ensino, com o aporte da Teoria das Situações Didáticas (TSD). Os dados coligidos evidenciam várias propriedades e, sobretudo, teoremas e definições matemáticas descobertas e formuladas pelos sujeitos participantes da investigação o que concorreu para o incremento de suas habilidades profissionais e um conhecimento histórico, epistêmico e pragmático sobre a noção.

Palavras-chave: *Número de Catalan, História da Matemática, Engenharia de Formação, Ensino.*

Abstract

We have recorded considerable attention on the part of the authors of Mathematical History (MH) books concerning the classical fundamentals of Differential and Integral Calculus. On the other hand, it is essential to the understanding of the Mathematics teacher an understanding about an unstoppable mathematical and evolutionary epistemological process of the mathematical objects, from its nascent stage to the present moment. Thus, the present work reports a Training Didactic Engineering (EDF) developed with the participation of five teachers in initial formation, in the Federal Institute of Education, Science and Technology - IFCE, in the year 2017. The topic covered involved the notion of Numbers Generalized Catalan (NGC) that represents a contribution of several mathematicians and the current research on numerous derived problems confirm its process of uninterrupted generalization. The study involved five tasks and two structured teaching situations, with the contribution of the Theory of Educational Situations (TSD). The collected data show several properties and, above all, the theorems and mathematical definitions discovered and formulated by the subjects

[1] Coordenador do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PGECM/IFCE. Docente do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática – ENCIMA/UFC. Docente do Programa de Pós-graduação em Educação Profissional e Tecnológica em Rede PROEPT/IFCE.

participating in the research, which contributed to the increase of their professional skills and a historical, epistemic and pragmatic knowledge about the notion.

Keywords: *Catalan numbers, History of Mathematics, Didactical Engineering, Teaching.*

Introdução

De modo geral, observamos uma considerável tendência dos autores de livros de História da Matemática – HM na discussão dos fundamentos da Matemática e, de modo específico, um expediente que dedica grande atenção aos fundamentos do Cálculo Diferencial e Cálculo Infinitesimal, cujos principais pressupostos estabelecidos no século XVII, costumam enlevar o papel distinguido de Isaac Newton e G. W. Leibniz. Por outro lado, um outro aspecto relevante diz respeito ao viés de discussão histórica dos conceitos matemáticos, desde o seu estádio de nascedouro, até os dias atuais, a partir da indicação e a compreensão de um processo epistemológico evolutivo ininterrupto da Matemática que expressa o caráter não estático do conhecimento matemático (ALVES, 2017a).

Em nossos trabalhos, temos acentuado a relevância do papel fundamental e do estabelecimento e da descoberta de definições matemáticas. Neste sentido, as definições matemáticas não apenas nos auxiliam na demarcação de um terreno sólido e confiável dos modelos teóricos vinculados e derivados de uma noção formal, mas, também, podem proporcionar uma compreensão sobre o processo de generalização dos objetos conceituais (ALVES, 2016). Ademais, de uma forma distinta discursiva de objetivação dos objetos e as realizações dos matemáticos no passado, urge uma compreensão, por parte do professor de Matemática, do estádio atual da pesquisa especializada e das tendências matemáticas e epistemológicas, a respeito de noções intimamente relacionadas com o contexto escolar (DEVELAY, 1993).

Isso posto, nas seções vindouras, apresentamos as etapas sistemáticas clássicas desenvolvidas em uma Engenharia Didática – (ED). Mas, tendo em vista nossa atenção maior dedicada a um público particular de professores em formação inicial, adotamos os pressupostos de uma Engenharia Didática de 2ª geração ou, como se tornou mais conhecida, uma Engenharia Didática de Formação – (EDF) visando o ensino no contexto histórico e a ênfase em um componente de formação profissional, com interesse na evolução e aperfeiçoamento de suas práticas ordinárias (PERRIN-GLORIAN, 2016). Diante de uma apreciação preliminar dos livros de HM e adotando uma perspectiva imprescindível de formação de professores, segundo os conteúdos em História da Matemática, escolhemos os Números Generalizados de Catalan (NGC) que, a partir do trabalho de inúmeros matemáticos do passado, vislumbramos uma pesquisa atual vigorosa, confirmada pelo seu caráter de ubiquidade, somente equiparável ao caso dos números de Fibonacci (ALVES, 2016).

Doravante, veremos alguns elementos teóricos assumidos em um estudo desenvolvido no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE. Logo em seguida, apresentaremos os resultados empíricos da investigação. Antes, porém, demarcaremos um cenário epistêmico de investigação afetado por uma perspectiva de Engenharia Didática para a formação de professores que, de modo prosaico, Perrin-Glorian e Bellemain (2016, p. 37) explicam tratar-se de "situações endereçadas diretamente aos professores ou futuros professores, com o objetivo de aprender Matemática para ensinar Matemática".

Sobre a Engenharia Didática de Formação (EDF)

A partir de uma literatura cada vez mais conhecida, observamos duas tendências distintas e derivadas da efervescência acadêmica ocorrida na França, como consequência e uma resposta a um período intenso de reformas educacionais. A primeira tendência da Engenharia Didática clássica, ou Engenharia de 1ª geração, cujo interesse maior se revelou pela modelização das atividades do estudante, seu progresso de aprendizagem e os elementos clássicos perspectivados no triângulo didático indicado por: estudante – professor – conhecimento. Por outro lado, após uma década e, de modo preciso, ao final dos anos 80, determinadas insuficiências foram apontadas/discutidas pelos didatas da Matemática, correspondentemente ao papel e a atividade do professor de Matemática. Por conseguinte, passou ocorrer uma reorientação dos estudos sob o viés da ED, todavia, repercutidos sob a terminologia Engenharia Didática de 2ª geração ou Engenharia Didática de Formação (EDF) (ALVES e CATARINO, 2017; AUMOULOUD e SILVA, 2012). No cenário de discussão e de emergência da vertente de uma tendência de estudos endereçados para a formação, Artigue (2015, p. 492) comenta que "este problema ainda não está resolvido, porém, o aumento de conhecimentos acerca das representações dos professores e suas práticas e, possivelmente, a sua evolução pode nos levar a compreender melhor as dificuldades do desafio". Essas e outras barreiras enfrentadas pelos didatas da Matemática podem ser constatadas, por exemplo, segundo as explicações minuciosas de Perrin-Glorian e Bellemain (2016):

> As dificuldades de transmissão das engenharias didáticas e os dispositivos de formação de professores concorreram para o aparecimento da necessidade de

> se estudar, mais proximamente, o funcionamento do ensino ordinário, do ponto de vista de condicionantes institucionais (e, também, sociais), concebendo o exercício da profissão, por parte do professor e as condutas da classe. Tais pesquisas se desenvolveram, de modo geral, mais a partir de observações naturalistas, do que das engenharias. Todavia, a fronteira entre a observação naturalista e a engenharia didática não se mostra demasiadamente clara e se assemelha, de fato, a uma engenharia didática (ou a adaptação de produtos oriundos de uma engenharia didática preliminar) e foi, também, utilizada como instrumento de estudo para o ensino ordinário e o meio de formação de professores. (PERRRIN-GLORIAN e BELLEMAIN, 1983, p. 54).

Indiscutivelmente, o cenário de apreciação e a identificação dos problemas mencionados acima se mostram condicionados, do ponto de vista epistêmico, por um conjunto de noções pragmáticas, intimamente vinculadas ao conhecimento matemático. Observamos, ainda, que os dispositivos de formação, estruturados via a ED, possuem um papel tanto definidor como estruturante para um perfil ou visando uma competência profissional. De fato, assumimos o interesse pelo real funcionamento de uma classe, diante das demandas e das necessidades do professor de Matemática que não podem ser relativizadas. De fato, pouco mais adiante, Perrin-Glorian e Bellemain (2016, p. 36) acentuam ainda:

> O funcionamento da classe, o papel do professor diante de tal funcionamento, os conhecimentos reais dos estudantes se apresentam como variáveis impossíveis de se negligenciar. Nós fomos, então, escolher estudar, ao mesmo tempo, as características da classe e as características gerais do papel do professor, particularmente visível neste tipo de classe, aonde os estudantes partilham, mais dificilmente, a mesma intenção do professor e, também, porque a proposição do pesquisador de situações originadas de uma engenharia didática de pesquisa, relativamente a qual, não participaram, obrigava os professores em abandonar suas rotinas ou, ao menos, adaptá-las. (PERRRIN-GLORIAN e BELLEMAIN, 2016, p. 36).

Acima, divisamos um fenômeno de ruptura, na medida em que, diante da proposição de um quadro, relativamente pouco conhecido em sua totalidade, do percurso de trabalho exigido para o desenvolvimento real de uma engenharia didática, sobretudo ao caso das engenharias didáticas clássicas ou de 1ª geração, divisamos o fenômeno observado por Perrin-Glorian e Bellemain (2016), no sentido de que, os profissionais deveriam aceitar ou se comprometer com a tarefa da condução do seu ensino, segundo os pressupostos e exigências da área, entretanto, não introjetavam de forma significativa seus fundamentos. Logo em seguida, apreciamos as explicações de Artigue (2015, p. 492) no que concerne à introdução da distinção de duas vertentes ou categorias de engenharias didáticas introduzidas, de modo pioneiro, por Perrin-Glorian.

> Esta distinção introduzida por Perrin-Glorian está relacionada com este assunto e considero-a porque pode afetar uma visão da Engenharia Didática – ED como uma metodologia de pesquisa. Contrastando a Engenharia Didática de Pesquisa e a Engenharia Didática de Desenvolvimento, Perrin-Glorian comparou os níveis teóricos de controle em relação que as duas formas de ED implicam. Ela enfatizou que, em ambos os casos, a análise do conhecimento

> matemático em jogo e o conhecimento dos estudantes, a definição das situações, os *milieus* (meios) associados se condicionam sob controle teórico. Para a Engenharia Didática de Desenvolvimento muito mais flexibilidade é necessária para preparar uma adaptação para diversos contextos. A perda de controle é igualmente considerável, quando se considera o papel do professor diante de condicionantes institucionais não podem ser, em parte removidos, como no caso de uma Engenharia Didática de Pesquisa. Essas considerações concorreram para que Perrin-Glorian, após implementar uma ED como produto oriundo de classes ordinárias, se torna necessária considerar, pelo menos, dois níveis para uma ED, cada um com objetivos específicos distintos. Este é o processo geral que origina uma Engenharia Didática de segunda geração. (ARTIGUE, 2015, p. 492).

Pouco mais adiante, Artigue (2015, p. 492) proporciona uma distinção emblemática. Com efeito, a mesma esclarece que, para o primeiro nível, se observa como objetivo maior a validação teórica das situações provenientes de uma ED, sua capacidade de produzir conhecimento matemático, a identificação de escolhas fundamentais para uma ED, separando o que se mostra essencial do que se mostra vinculado a um contexto particular e que pode ser adaptado ou modificado. “Tal realização associada toma espaço em um lugar ou ambiente protegido e sob controle pelos pesquisadores, no caso de uma Engenharia Didática de Pesquisa” (ARTIGUE, 2015, p. 492). Mas, no segundo nível de uma ED, “o objetivo é o estudo da adaptabilidade de situações validadas a partir de classes ordinárias com professores que não foram envolvidas na primeira fase” (ARTIGUE, 2015, p. 493), todavia, se podem acentuar o interesse imprescindível pela elucidação de conteúdos matemáticos e as organizações possíveis para tais conteúdos, agregado ao interesse de possíveis dificuldades dos estudantes para a aprendizagem de tais conteúdos (PERRIN-GLORIAN e BELLEMAIN, 2016, p. 38).

Neste ponto se vislumbra um movimento dialético distinguido, na medida em que se revela um interesse pela negociação e a introdução de situações pelos próprios professores e, no segundo nível, segundo a autora, são tomados como objeto de estudo, acrescido do próprio impacto de uma ED e suas consequências. Uma implicação imediata de interesse, para o caso de Engenharia Didática de Desenvolvimento ou Formação é que os constructos de uma ED, de *per si*, se tornam um *corpus* de conhecimentos para os professores e a sua necessária disseminação entre demais profissionais do ensino.

Por outro lado, um forte componente marcante da essencialidade da ED, sobretudo, no seu período inicial, se apresenta nitidamente demarcado e impregnado por um campo epistêmico disciplinar e, neste caso, nos referimos ao saber científico, por uma espécie de contágio (BROUSSEAU, 1996). De fato, Chevallard (1982, p. 5) comenta que “a exigência que se faz da engenharia como tipo de atividade, progride um pouco mais, pois engenheiro deve tomar o apoio na Ciência, a mais recente, mas, ainda, deve objetivar seu produto segundo os termos e condições da Ciência". Certamente, recordamos aqui, o papel metafórico da ação do engenheiro, visando a constituição de um projeto preciso.

Chevallard e Johsua (1982, p. 6) observa, ainda, que "a engenharia não é, prioritariamente, uma fonte para a pesquisa e, sim, uma condição para a pesquisa". Entretanto, a despeito de seu papel importante, capaz de proporcionar uma perspectiva de analise diferenciada, a identificação de certos obstáculos são indícios imprescindíveis, necessários e que confirmam um vigoroso ponto de vista em evolução. Com efeito, Chevallard e Johsua (1982, p. 27) sublinha que o funcionamento do sistema educativo, marcado por "um verdadeiro arcaísmo epistemológico". A concepção dominante de ação reporta que tal sistema de ensino se encontra acessível à nossa vontade, "afeito à realidade de nossos desejos" (CHEVALLARD, 1991, p. 27). Por conseguinte, todo um viés epistemológico, no interior do sistema de ensino e, consequentemente, em um sistema de formação de professores, se submete a um "jogo ideológico" de múltiplas relações. Nesse contexto de análise e de pesquisa, a ED se apresenta como um instrumento poderoso:

> Uma descrição prosaica e, até certo ponto confusa, diz respeito que a o método da Engenharia Didática consiste em definir como uma sucessão de quatro fases: concepção, realização, observação e análise de uma sequência de ensino. Ela cessa de ser uma inovação e toma o estatuto de um método uma vez que a concepção visa um conjunto de cenários possíveis dependentes de variáveis globais e locais, e que os valores de tais variáveis são fixados pelo pesquisador em função dos efeitos esperados das condutas dos estudantes e a gestão da classe. (LABORDE, 1999, p. 103).

Diante do cenário anterior, assumiremos um conjunto de pressupostos característicos de uma EDF, todavia, para efeito de nossa investigação, seguiremos um percurso clássico (4 etapas) de uma ED. Por conseguinte, nas próximas seções, discutiremos as fases: (i) análises preliminares; (ii) análise *a priori* e concepção das situações; (iii) experimentação; (iv) análise *a posteriori* e validação interna (LABORDE, 1999) da sequência estruturada.

A cerne de interesse do processo investigativo envolve o seguinte questionamento: Como desenvolver um processo formativo para professores de Matemática, segundo um contexto histórico/epistemológico do conhecimento matemático, afim de proporcionar um acréscimo dos conhecimentos epistêmicos, pragmáticos e habilidades profissionais do professor em formação a respeito dos *Números Generalizados de Catalan* (NGC)?

Com o escopo de responder ao questionamento anterior, indicaremos os seguintes objetivos específicos: (a) descrever uma EDF, balizada pelos pressupostos da Teoria das Situações Didáticas - TSD, tendo em vista a estruturação de uma transposição didática (Chevallard, 1991) do conteúdo envolvendo a noção de *Números Generalizados de Catalan* – (NGC) visando a aquisição de conhecimentos por parte de professores em formação; (b) conceber e aplicar um conjunto de tarefas e de situações didáticas estruturadas com o tema NGC, visando a descoberta de teoremas (propriedades matemáticas) e de definições matemáticas (ALVES, 2016) derivadas e intrinsecamente correlacionadas com os números de Catalan e suas múltiplas representações.

Assumindo posição concorde com os pressupostos de uma ED, observamos que Artigue (1995, p. 38) explica que uma investigação de ED, na fase preliminar e de concepção, se baseia em um quadro teórico didático geral e em conhecimentos adquiridos no próprio campo de estudo. Os elementos mais frequentes considerados nas análises preliminares são apontados por Artigue (1995) como: análise epistemológica dos conteúdos contemplados no ensino; análise do ensino tradicional e seus efeitos; análise das concepções dos estudantes, as dificuldades e obstáculos que determinam sua evolução; análise do campo de restrições (no contexto histórico) de onde devemos situar a realização didática efetiva. Todos os elementos anteriores são desenvolvidos/determinados em termos dos objetivos (a) e (b) de trabalho adotados na presente investigação acerca do tema Números Generalizados de Catalan - NGC.

Outrossim, com o amparo do pensamento de Artigue (2015), buscaremos acentuar maior interesse pela demarcação de conhecimentos matemáticos, metodologicamente estruturados, segundo a Teoria das Situações Didáticas – TSD, cuja repercussão deverá concorrer para o acrescimento de conhecimentos para o professor ou futuro professor de Matemática. Isso posto, diante dos referenciais consultados, o itinerário clássico para a realização de uma análise preliminar, analises *a priori* e concepção de situações, validação (interna e/ou externa) das sequências deve ser mantido em nosso trabalho, embora, como aponta Artigue (2015), retringir-nos-emos ao segundo nível de interesse de uma ED, que consubstancia e caracteriza uma Engenharia Didática de Formação – EDF ou Engenharia Didática de desenvolvimento.

De um ponto de vista macro, podemos afirmar que “a primeira fase se estrutura em torno de uma análise do funcionamento do sistema […]” (ARTIGUE, 1995, p. 39). Não obstante, nos parecem pouco identificáveis os elementos de nosso interesse. Assim, acentuamos o papel das concepções dos estudantes participantes do estudo, bem como uma análise epistemológica dos conteúdos e do ensino atual, representado pelas abordagens presentes nos compêndios de livros de HM (BOYER, 1968; EVES, 1976) e artigos especializados (HURTADO e NOY, 1996; 1999; MCCAMMOND, 2006; SARACEVI; STANIMIROVI; KRTOLICA; MASOVI, 2014; SHAPIRO, 1994) sobre o assunto que se restringem a um circuito e/ou veiculação limitado de divulgação científica.

Análises Preliminares: estudo histórico e epistemológico

Nas análises preliminares, diante do caráter da quase inexistência de discussão sobre os números de Catalan por parte dos livros de HM, optamos pela objetivação deste assunto, inclusive, segundo as diversas referências (artigos) adotadas ao decurso da investigação. Constatamos, pois, o seu percurso de generalização e, ainda, o interesse atual por parte de especialistas e matemáticos profissionais. O entendimento sobre a referida trajetória evolutiva consubstancia um pensamento fundamental para o professor de Matemática.

Assim, observamos que o matemático belga Eugene C. Catalan descobriu, em 1838, os números que adquiriram a maior circulação dentro dos estudos matemáticos de seu tempo e, apesar de uma modesta contribuição matemática inicial que envolveu a descrição da seguinte fórmula ou definição formal $C_n = C(n) = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}, n \geq 0$ por meio de um processo de determinar a quantidade de triângulos, por modos diferentes, circunscritos em figuras poligonais. A ideia vem do problema dos problemas clássicos de triangulação de L. Euler, apresentado por si mesmo em 1751 (Koshy, 2009, p.107). Euler introduziu a própria fórmula fechada (Stanley, 2015, p.178). A seguinte lista numérica indicada por Koshy (2009) descreve alguns dos primeiros números de Catalan abaixo $\{\mathrm{C}_n\}_{n\in IN}$:

$\{1,1,2,5,14,42,132,429,1.430,4.862,16.796,58.786,208.012,742.900,2.674.440,\ldots,\mathrm{C}_n,\ldots,\ldots\}$ (*)

A descoberta recente de Luo Jianjin em 1988 que abordou e descreveu a primeira aparição de números de Catalan devido ao importante trabalho do matemático chinês Ming Antu (c.1692-c.1763) que escreveu um livro em 1731 que incluiu algumas expansões trigonométricas envolvendo números de Catalan (Stojadinovic, 2015). Stanley examina a onipresença (a ubiquidade) dos números de Catalan (2015, p.177) no seguinte trecho:

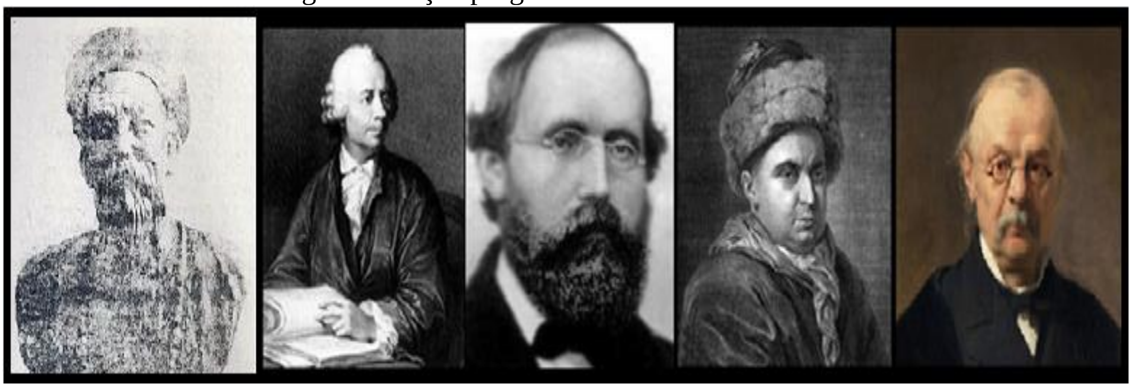
> Na literatura moderna de Matemática, os números catalães são extraordinariamente onipresentes. Embora ocorram em diferentes aspectos, fizemos uso da matemática com eles e é difícil imaginar o momento em que eles eram desconhecidos ou, obscuramente conhecidos e não apreciados. Pode então ser uma surpresa que os números catalães tenham uma história rica e múltiplas descobertas, mesmo recentemente. Aqui precedemos uma revisão de aproximadamente 200, desde a sua descoberta até o presente. (STANLEY, 2015).

Em 1751, Leonhard Euler (1707-1783) encontrou uma fórmula fechada para tais números. O matemático Christian Goldbach (1690-1764) também confirmou alguns resultados fornecidos por L. Euler sem uma prova formal necessária. No entanto, apenas com os resultados de E. Catalan que o assunto adquiriu maior popularidade. De fato, o matemático Eugene Charles Catalan (1814 - 1894) nasceu em Bruges, na Bélgica. Estudou na *École Polythénique* de Paris, ocupando o simples papel do repetidor (BILU, BUGEAUD & MIGNOTTE, 2010, P.1) e recebeu, de acordo com Koshy (2007, p.105), seu doutorado em Ciências em 1841. Eugene Catalan se tornou professor de matemática no Colégio Chalonssur-Marne e depois na França, tornou-se professor de Análise na Universidade de Liège na Bélgica. Publicou obras como *Élements de Geometriè* e *Notions d'Astronomie*, em 1843 e 1860, respectivamente. No campo da matemática avançada, ele publicou numerosos artigos no campo de integrais múltiplas, teoria da superfície, análise matemática, cálculos e probabilidades (KOSHY, 2007; 2012).

Grimaldi (2012, p.147) lembra que Gabriel Lamé (1795-1870) foi o primeiro a fornecer uma prova elegante, usando os modelos do Combinatório, os resultados apresentados, sem o tratamento formal exigido preliminarmente por L. Euler e L von Segner. Seus resultados foram publicados em alguns artigos matemáticos no ano de 1838. Além disso, um pouco mais tarde, em 1839, E. Catalan escreveu vários artigos sobre o assunto, onde determinou o número de formas ou caminhos de uma cadeia de símbolos “n + 1” com parênteses com pares 'n' para que possa envolver esses símbolos (GUIMARÃES, 2012).

Euler estava em Berlim (Prússia) naquele momento, enquanto seu amigo e ex-mentor Goldbach estava em São Petersburgo (Rússia imperial). Eles se conheceram pela primeira vez quando Euler chegou em São Petersburgo em 1727 como jovem e começou uma amizade ao longo da vida com 196 cartas entre eles (VARADARAJAN, 2006). Em setembro de 1751, L. Euler escreveu uma carta a C. Goldbach comunicando a descoberta inesperada de uma nova espécie de números provenientes de um antigo problema de triangulação de polígonos regulares (BARCUTTI e VERRI, 1992; GESSEL, 2004).

Figura 1. Conjunto de matemáticos que contribuíram para o processo evolutivo e de surgimento e da generalização progressiva dos números de Catalan

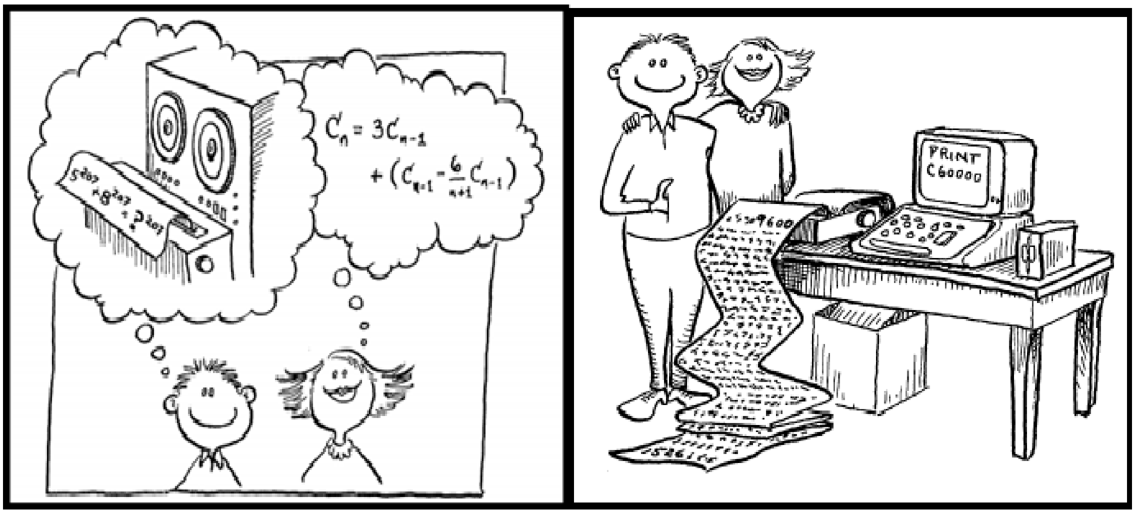


Na imagem acima (figura 1), indicamos alguns matemáticos que contribuíram direta ou indiretamente para a evolução dos números de Catalan. O matemático chinês Ming Antu, no lado esquerdo, então vemos a imagem de L. Euler. Em seguida, Christian Goldbach, e finalmente, por último, no lado direito, temos L. Catalan. Aqui observamos uma clara relevância do processo evolutivo dos números de Catalan, em vista da contribuição nem sempre contígua, todavia, progressiva de vários matemáticos ao longo do tempo. Este entendimento matemático e evolutivo é importante para o professor de Matemática!

Resgatamos um pensamento de Campbell (1984) que questionou a necessidade do aluno de lidar com um problema concreto e real para entender o papel dos números Catalan. Para ilustrar seu campo de aplicação, Campbell (1984, p. 197-198) descreve um diálogo imaginário entre dois alunos (ver figura 2). O autor buscou significar para o leitor que muitos problemas, cuja origem eminentemente teórica, originada do pensamento abstrato e refinado de matemáticos, podem ser objeto de várias aplicações, sobretudo, ao cálculo simbólico computacional. Note-se que Campell (1984), no contexto do uso do Pascal, uma antiga linguagem computacional, discute como obter a fatoração do seguinte grande número: $C_{173} = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 61 \cdot 67 \cdot 89 \cdot 97 \cdot 101 \cdot 109 \cdot 113 \cdot 179 \cdot 181 \cdot 191 \cdot 193 \cdot 197 \cdot 199$ $\cdot 211 \cdot 223 \cdot 227 \cdot 229 \cdot 233 \cdot 239 \cdot 241 \cdot 251 \cdot 257 \cdot 263 \cdot 269 \cdot 271 \cdot 273 \cdot 279 \cdot 283 \cdot 293 \cdot 307 \cdot 311 \cdot 313 \cdot 317 \cdot 331 \cdot 337$.

Antes de concluir a seção atual, apresentaremos algumas definições matemáticas importantes que confirmam um processo evolutivo irrefreável da Matemática e, em particular, um processo matemático evolutivo e generalização dos números Catalan. Observamos um cenário que indica as relações importantes entre os números do Catalan e o progresso correspondente da tecnologia que envolveu o uso de outros métodos algébricos modernos computacionais para seu estudo sistemático (GRAHAM; KNUTH; PASTASHNKI, 1988; ROMAN, 2015; STANLEY, 2015; VAREY, 2011).

Figura 2. Campbell (1984) discute as fortes relações entre os números de Catalan e a evolução da tecnologia mediante a aplicação da noção e antigas linguagens computacionais.



Koshy (2007, p. 109) comenta que em 1941, o matemático H. Urban, analisou o comportamento dos seguintes quocientes: $\frac{C_n}{C_{n-1}} = \frac{4 \cdot n - 2}{n+1}$, $n \geq 1$. Por outro lado, cabe observar um contexto histórico anterior comentado, por exemplo, por Brasil Junior (2014, p. 3) quando observou que em 1751, em uma carta para o matemático Christian Goldbach, Leonard Euler discutiu o seguinte problema: *Dado um polígono convexo de* $n \geq 3$ *lados. De quantas maneiras distintas podemos ligar as diagonais deste polígono de modo que este seja triangulado e as diagonais não se cruzem?* "A ideia é traçar $n - 3$ diagonais no interior de um polígono convexo de n lados, tal que as diagonais não se intersectem e o polígono fique inteiramente dividido em triângulos.

O número de maneiras distintas de se fazer isto será denotado por T_n" (BRASIL JUNIOR, 2014, p. 3). Sobre o mesmo problema, Koshy (2007, p. 108) comenta que o próprio Euler desenvolveu um laborioso trabalho de determinar uma fórmula para T_n que indicou, sem confirmar sua plena (e precisa) correção, a seguinte expressão $T_n = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n-10)}{(n-1)!}, n \geq 3 \cdot$

Koshy (2007, p. 117) comenta que o matemático húngaro Johann Andreas von Segner (1704 – 1777) publicou em 1728 um importante artigo sobre a regra dos sinais de Descartes e proporcionou o avanço em vários ramos da Matemática. Empregando a noção anterior, Segner estabeleceu a relação de recorrência $T_n = \sum_{k=2}^{n-1} T_k \cdot T_{n-k+1}$ ou ainda, podemos escrever $T_n = T_2T_{n-1} + T_3T_{n-2} + T_4T_{n-3} + \cdots + T_{n-1}T_2, n \geq 3$. (Fórmula de Segner, 1758). Uma demonstração combinatória para este problema foi dada pelo matemático francês Gabriel Lamé, em uma carta para Joseph Liouville, em 1838. (Brasil Junior, 2014, p. 4). Por outro lado, desde que vale a igualdade vantajosa $C_n = T_{n+2}$, podemos reescrevê-la: $C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + C_2C_{n-3} + \cdots + + C_{n-3}C_2 + C_{n-2}C_1 + C_{n-1}C_0$ ou ainda, Koshy (2007, p. 117) denota o seguinte produto interno inesperado para o n-ésimo número de Catalan: $C_n = \left(C_0, C_1, C_2, \cdots, C_{n-2}, C_{n-1}\right) \cdot \left(C_{n-1}, C_{n-2}, C_{n-3}, \cdots, C_{n-2}, C_{n-1}\right)$, para $n \geq 1$.

Grimaldi (2012, p. 147) recorda que Gabriel Lamé (1795 – 1870) foi o primeiro a provar de modo elegante, empregando os modelos da Combinatória, os resultados introduzidos, sem o trato formal necessário, por parte de L. Euler e A. Segner. Seus resultados foram publicados em alguns artigos no ano de 1838. E, um pouco mais tarde, em 1839, E. Catalan escreveu vários artigos sobre o assunto, aonde determinava o número de formas ou caminhos no plano, de uma cadeia de ‘n+1’ símbolos com parêntesis com ‘n’ pares de modo que possa envolver tais símbolos.

Veremos, um pouco mais adiante, que tal problema produz, de modo preciso, os números de Catalan. E. antes de finalizarmos a seção atual, trazemos duas definições de um NGC que confirmam o interesse atual pelo seu processo de generalização.

Definição 1: Um número Generalizado de Catalan é dado por $C(n,k)=\frac{1}{kn+1}\binom{(k+1)n}{n}=$

$\frac{1}{kn+1}\binom{kn+n}{n}=\frac{1}{kn+1}\frac{(kn+n)!}{n!(kn)!}$, onde $k\geq 0, C(n,1)=C_{n,k}$. (Koshy, 2007, p.375).

Uma outra generalização de um número de Catalan foi concebida por Gould (1972), como segue $C_n(a,b)=\frac{a}{a+bn}\binom{a+bn}{n}$. Gould (1972) verificou a seguinte e inesperada identidade $C_n(a+c,b)=\sum_{k=0}^{n}C_k(a,b)\cdot C_{n-k}(c,b)$, e que pode ser interpretada como uma generalização da identidade de A. Segner ($C_n=\sum_{i=0}^{n-1}C_{n-i}C_i$).

Em 1874, Catalan concluiu que os números da forma $\left(\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}\right)$ são de fato inteiros e que algum tempo depois eles foram estudados por vários matemáticos (GESSEL e CHIN, 2006). Assim, ocorreu o surgimento na literatura especializada a seguinte definição matemática que recebeu atenção e o trabalho definitivo de Gessel (1992).

Definição 2: Dados os inteiros m, n definiremos $\mathrm{S}(m,n)=\frac{\binom{2m}{m}\binom{2n}{n}}{\binom{m+n}{n}}=\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$

chamados de super números de Catalan ou bivariados de Catalan. (GESSEL, 1992).

Em 1890 a seguinte identidade $\sum_{k=-b}^{b}(-1)^k\binom{2a}{a-k}\binom{2b}{b-k}=\frac{(2a)!(2b)!}{a!b!(a+b)!}$ foi estudada pelo matemático Koloman von Szily (VON SZILY, 1893). Alguns anos depois Gessel (1992) introduziu a noção de super números de Catalan (*super catalan numbers*).

O percurso histórico anterior constitui parte dos interesses de uma investigação balizada por uma EDF, com o escopo de demarcar o terreno epistemológico de interesse e, por conseguinte, compreender seu processo evolutivo, o que concorre e contribui para o alcance de parte dos objetivos (a) e (b), como indicados nos parágrafos predecessores.

Em nosso caso, acentuamos determinados aspectos que confirmam um processo matemático de generalização dos números de Catalan, diante de uma pesquisa atual sobre o assunto, o que se mostra desconsiderado/negligenciado pelos autores de livros de HM (BOYER, 1968; EVES, 1976, ROQUE, 2012)

Análise *a priori*: análises epistemológicas, cognitivas e a concepção das situações

Na fase atual, segundo a tradição dos estudos em ED, objetivaremos uma apreciação do componente histórico evolutivo dos números de Catalan e, logo em seguida, veremos os dados preliminares produzidos por um grupo de cinco professores de Matemática em formação inicial, relativamente ao processo de discussão heurística dos números de Catalan. Por fim, apresentamos duas situações didáticas estruturadas e amparadas pelos pressupostos da TSD, visando a modelização dos elementos para o objetivo (b).

De forma preliminar, apresentamos um conjunto de tarefas ao grupo de professores em formação inicial, ao decurso de quatro encontros ocorridos na disciplina História da Matemática, do último semestre do curso de licenciatura em Matemática do IFCE, no ano de 2017. O conjunto de cinco tarefas possuem forte justificativa histórica e epistemológica e se relacionam ao caráter de ubiquidade dos números de Catalan.

Tarefa 1: Com origem na sequência numérica indicada abaixo em (*), descrever uma fórmula fechada para a mesma, se possível, capaz de produzir os seus elementos.

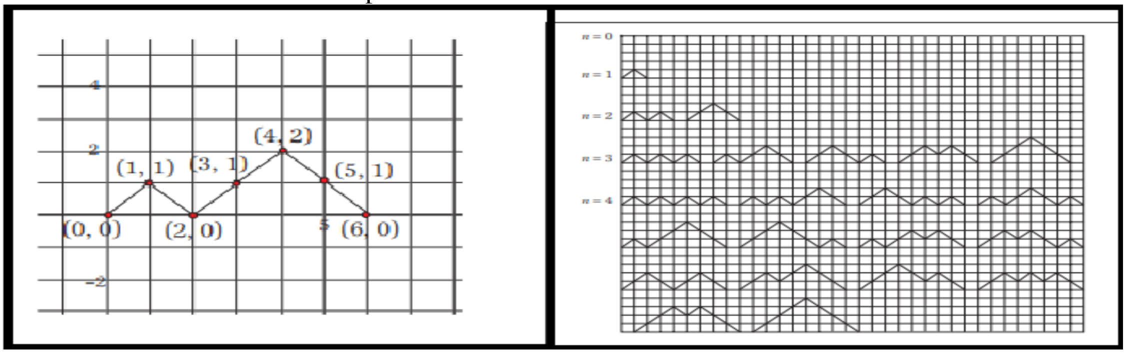
$$\{1,1,2,5,14,42,132,429,1.430,4.862,16.796,58.786,208.012,742.900,2.674.440,\ldots,C_n,\ldots,\ldots\} \; (*)$$

Comentário: Do ponto de vista histórico, a relevância desta tarefa diz respeito ao trabalho de E. Catalan que, a partir dos trabalhos de L. Euler, forneceu a formula fechada (KOSHY, 2006), partindo do problema emblemático da triangulação (SHAPIRO, 1976).

Tarefa II: Considerando dois pontos no plano A e B. Em seguida, uma diagonal de um quadrado quadriculado de lado ‘n’. De quantas formas podemos partir do ponto A e chegar ao ponto B, se que a linha diagonal não seja cruzada ou ultrapassada?

Comentário: Aqui exploramos a representação combinatória da Dicky (Stanley, 2015). Na figura abaixo visualizamos alguns diagramas específicos relacionados com os números de Catalan e o modelo combinatório de Dicky (ao lado esquerdo) (ver fig. 3).

Figura 3. Koshy (2006) discute vários diagramas e modelos de interpretação combinatória que produzem os números de Catalan



Tarefa III: Considerando n pares de parêntesis do tipo () . De quantas formas podemos agrupar pares de parêntesis, de modo que não ocorra nenhum par de parêntesis aberto?

Comentário: Buecu (2010) comenta o problema discutido por E. Catalan, envolvendo regras para concatenar pares parêntesis no interior de parêntesis. Por exemplo, operações do tipo (()()) é permitida, ao passo que ())(() não é permitida. Na figura 3, acima e ao lado direito, Koshy (2006) comenta o padrão da ocorrência dos parêntesis e as operações possíveis e que geram os números de Catalan.

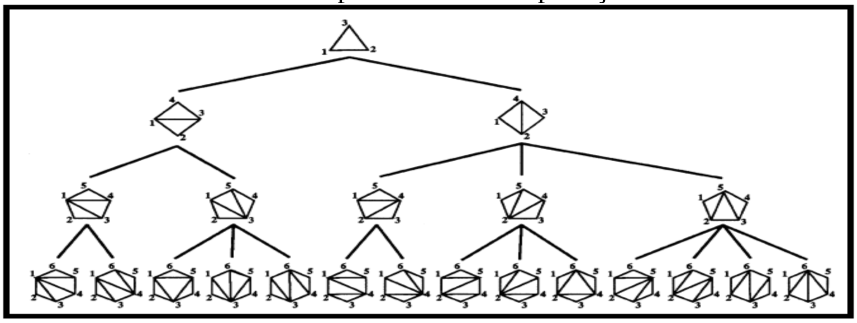
Tarefa IV: Decidir se a partir do triângulo de Pascal é possível extrair uma fórmula fechada para os Números de Catalan?

Comentário: Na literatura mais recente, deparamos o triângulo de Catalan, introduzido por Shapiro em 1976. De modo semelhante, intimas relações com o triângulo de Pascal.

Tarefa V: Em quantas maneiras um polígono convexo plano de ‘n’ lados pode ser dividido em triângulos por diagonais?

Comentário: Leonhard Euler colocou este problema em 1751 para o matemático Christian Goldbach. Na figura 4 abaixo visualizamos um processo de determinação correspondente ao problema de Catalan. Hurtado e Noy (1999) empregam linguagem de programação e noções de Geometria Computacional afim de determinar métodos mais eficientes de execução da determinação das triangulações que correspondem aos números de Catalan.

Figura 4. Hurtado e Noy (1999) discute os processos de triangulação usando os métodos da Geometria Computacional com aplicação atual.

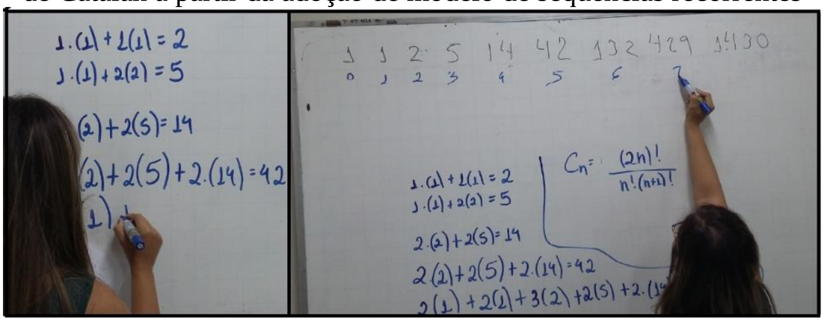


Vejamos, agora, alguns elementos mais representativos registrados na etapa de análise cognitiva dos cinco professores, na medida em que se avaliou, também, uma apreciação dos pré-requisitos necessários para a realização de duas situações didáticas. Na situação de ação, diante da tarefa 1, o professor 1 manifestou o seguinte argumento:

> Pesquisador: Existe uma regra ou fórmula de descrição desta sequência numérica que indicamos em (*)?
>
> Professor 1: A gente começou por três e multiplicou por 3, por 5 e depois por nove...a gente estava tentando adaptar esse pensamento para ver se funcionava....a regra matemática.

Segundo as ponderações do professor 1, logo acima, ficou evidente o arrimo do pensamento indutivo e a compreensão heurística do funcionamento das regras e registros numéricos que determinam a regularidade e a ocorrência dos números de Catalan. Na figura 5, logo abaixo, divisamos algumas tentativas e erros, com o objetivo semelhante ao comentado na seção anterior, quando ocorreu a necessidade matemática de determinar uma fórmula fechada para tais números. Na figura 5, o professor 1 buscou a descoberta de uma fórmula que produz os números e indicou $C_n = {(2n)!}/{n!(n+1)!}$.

Figura 5. O professor 1 buscou determinar uma regra de recorrência ou fórmula para os números de Catalan a partir da adoção de modelo de sequências recorrentes



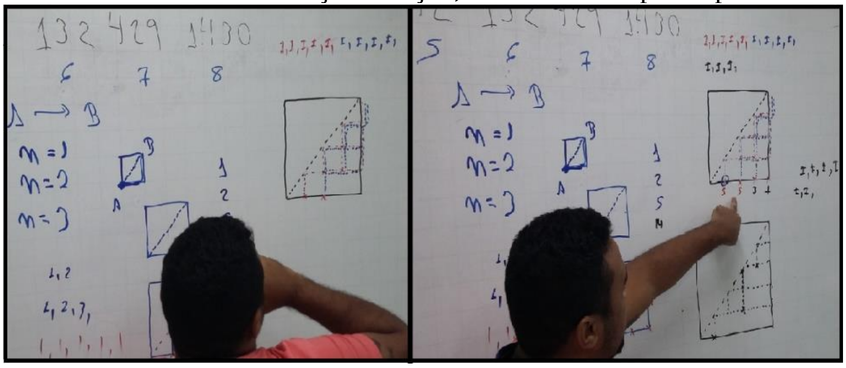
Fonte: dados da pesquisa

No que concerne à tarefa 2, o professor 2 empregou um método previsto para a identificação dos números a partir da trajetória indicada em um quadrado. Vejamos, em seguida, a sua interpretação da tarefa 2 e a correspondente estratégia resolutiva.

> Pesquisador: O que você acha que essa representação tem a ver com essa sequência que indicamos em (*) ?
>
> Professor 3: É a representação geométrica dessa sequência…claro!

Um aspecto importante foi indicado pela compreensão do surgimento dos números de Catalan a partir de múltiplas representações. Na figura 6 visualizamos sua atividade.

Figura 6. O professor 2 buscou identificar os caminhos definidos em cada trajetória e descobriu os números de Catalan na situação de ação, consoante aos pressupostos da TSD.

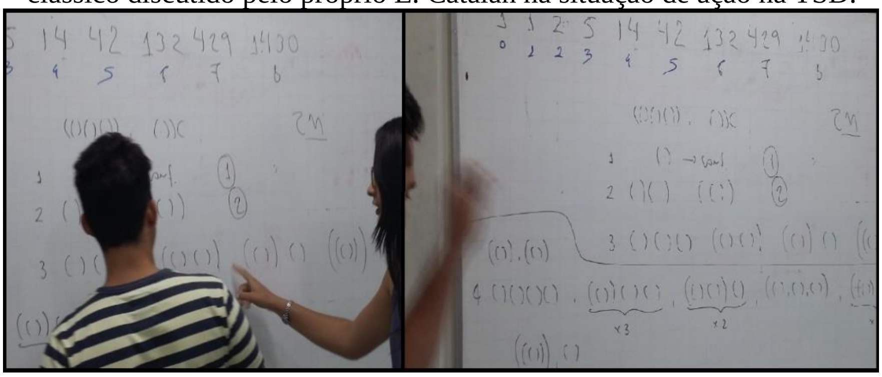


Fonte: dados da pesquisa

Os professores 3 e 4 foram estimulados na adoção do raciocínio ou argumento de Catalan que visou a justaposição e comportamento dos pares parêntesis ( ). Na figura 7 abaixo, divisamos a descrição dos primeiros arranjos de parêntesis (fechados) do tipo ( ).

> Pesquisador: Podemos, agora, fornecer um nome para essa sequência? Ou generalizar? O que ela tem a ver com programação?
>
> Professor 3: Sequência n uplas alguma coisa...alguma coisa terminando em nacci...uma coisa quadrática…um algorítmico passo a passo.

Figura 7. Os professores 3 e 4 identificaram os números de Catalan a partir do problema clássico discutido pelo próprio E. Catalan na situação de ação na TSD.

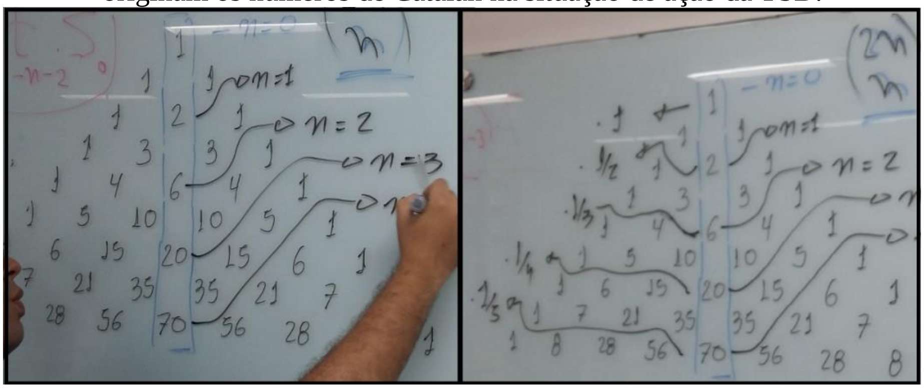


Abaixo observamos que o professor 5 buscou identificar relações extraídas diretamente do triangulo de Pascal. No trecho abaixo registramos um raciocínio extraído da tarefa 5, com o escopo de extrair relações numéricas e regras da configuração do triângulo de Pascal correlacionadas com os números de Catalan.

> Pesquisador: Como foi que você teve a ideia de empregar esses argumentos?
>
> Professor 5: Eu tomei essa fórmula que nós trabalhamos na aula passada e como foi identificado que os elementos do termo central do triângulo de Pascal estão relacionados, então apliquei aqui.

Na figura 8, ainda com respeito ao professor 5, o mesmo explicou um conjunto de regras e operações possíveis e extraídas agora do triângulo de Pascal e que derivou na formulação corresponde de uma fórmula fechada para o número de Catalan. Se enfatiza, aqui, as possibilidades de representações e conceitos matemáticos distintos, que concorrem, inexoravelmente, para o surgimento dos números de Catalan.

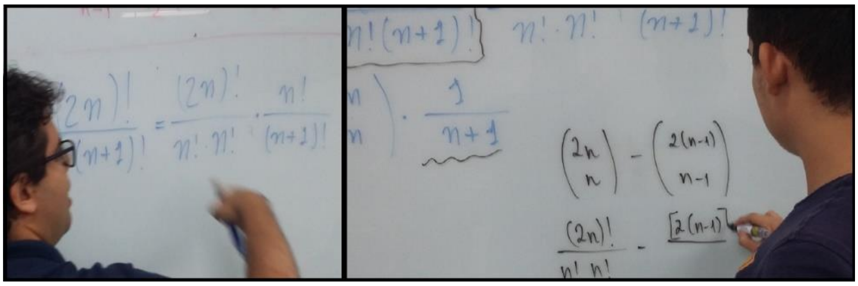
Figura 8. O professor 5 investigou relações numéricas oriundas do triangulo de Pascal que originam os números de Catalan na situação de ação da TSD.



Fonte: dados da pesquisa

Na figura 8 observamos uma situação de ação que corresponde à descoberta de uma fórmula fechada nos números de E. Catalan a partir das relações numéricas investigadas em torno do triangulo de Pascal. Ao lado direito, o professor 5 indicou a fórmula abaixo.

Figura 9. Os professores 1 e 5 determinaram uma fórmula fechada para os números de Catalan a partir do triangulo de Pascal. Tal descoberta se assemelha ao que ocorreu com E. Catalan



Fonte: dados da pesquisa

Logo em seguida, apresentamos a primeira situação didática com o amparo da TSD. Assinalamos um conjunto de habilidades e procedimentos promovidos, por intermédio do conjunto de tarefas inicialmente apresentadas acima e que correspondem aos dados das análises cognitivas dos sujeitos participantes da investigação.

Situação didática I: Com origem nos valores e matrizes indicadas com o *CAS Maple*, identificar um padrão numérico correspondente aos números de Catalan. Vejamos os seguintes exemplos: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4/3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 3/2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 35 & 35 \\ 8/5 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 126 & 126 \\ 5/3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 462 & 462 \\ 12/7 & 2 \end{pmatrix}$, *etc*.

De forma semelhante, temos: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 20 & 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 & 15 \\ 70 & 56 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 70 & 56 \\ 252 & 210 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 252 & 210 \\ 924 & 792 \end{pmatrix}$.

Situação de ação: As relações e os significados matemáticos devem ser depurados na etapa inicial, na medida em que uma linguagem compreensível por todos deve ser mobilizada (ALMOULOUD, 2007, p.38). Dessa os estudantes são estimulados a analisar o comportamento numérico e o determinante das matrizes indicadas no enunciado.

Situação de formulação: Condições diferentes produzem a necessidade da mudança de informações, argumentos eleitos e a criação de uma linguagem para assegurar/permitir tal mudança. Na situação de formulação, o estudante pode justificar suas ações, todavia, a situação não exige. (DOUADY, 1984, apud ARTIGUE, 1984, p. 7).

Situação de validação: Nessa fase, num contexto do "debate da certeza das asserções" (ALMOULOUD, 2007, p. 40). Assim, os dados produzidos com origem nas interações dialéticas dos estudantes, com as informações e inferências empregadas na fase anterior, deverão reforçar as relações conceituais entre o modelo matemático formal e as estratégias escolhidas pelos aprendizes. Ademais, os argumentos de ordem formal e de ordem heurística devem constituir um conjunto de elementos a serem apreciados e depurados na fase de institucionalização final, segundo a TSD.

Situação de institucionalização: Na fase atual, prevemos a descoberta, por intermédio investigativo, do seguinte teorema intimamente correlacionado com os números.

Teorema 1: Para todo $n \geq 1$ temos: (i) se $M_n = \begin{pmatrix} \binom{2n-1}{n-1} & \binom{2n-1}{n-1} \\ \frac{2n}{n+1} & 2 \end{pmatrix}$, então $\det(\mathrm{M}_n) = C_n$; (ii) se $N_n = \begin{pmatrix} \binom{2n-2}{n-1} & \binom{2n-2}{n-2} \\ \binom{2n}{n} & \binom{2n}{n-1} \end{pmatrix}$, com a condição de que $N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, então $\det N_n = C_n \cdot C_{n-1}$, para todo inteiro $n \geq 1$.

Demonstração: De fato, observamos que $\det M_n = 2 \cdot \binom{2n-1}{n-1} - \frac{2n}{n+1} \cdot \binom{2n-1}{n-1}$. Então, realizamos os cálculos $2\binom{2n-1}{n-1} = 2\frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!} = \frac{2 \cdot n(2n-1)!}{n \cdot (n-1)!n!} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} = \binom{2n}{n}$.

Por outro lado, observamos $\frac{2n}{n+1}\binom{2n-1}{n-1} = \frac{2n}{n+1} \cdot \frac{(2n-1)!}{(n-1)!\mathrm{n}!} = \frac{(2n)!}{(n+1)n! \cdot (n-1)!} = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}$ $= \binom{2n}{n-1}$. Por fim, substituiremos: $\det M_n = 2 \cdot \binom{2n-1}{n-1} - \frac{2n}{n+1} \cdot \binom{2n-1}{n-1} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = C_n$.

Para o item (ii) se espera que os estudantes alcancem a seguinte argumentação $\det N_n =$

$$= \binom{2n-2}{n-1} \times \binom{2n}{n-1} - \binom{2n-2}{n-2} \times \binom{2n}{n} = \frac{(2\mathrm{n}-2)!}{(n-1)!(n-1)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} - \frac{(2n-2)!}{(n-2)!\mathrm{n}!} \cdot \frac{(2n)!}{n!n!} =$$

$$= (2\mathrm{n}-2)!(2n)!\left[\frac{1}{(n-1)!(n-1)!} \cdot \frac{1}{(n-1)!(n+1)!} - \frac{1}{(n-2)!\mathrm{n}!} \cdot \frac{1}{n!n!}\right] = (2\mathrm{n}-2)!(2n)!\left[\frac{1}{((n-1)!)^3(n+1)!} - \frac{1}{(n-2)!(\mathrm{n}!)^3}\right]$$

$$= \frac{(2\mathrm{n}-2)!(2n)!}{1}\left[\frac{n^3}{((\mathrm{n}!)^3(n+1)!} - \frac{1}{(n-2)!(\mathrm{n}!)^3}\right] = \frac{(2\mathrm{n}-2)!(2n)!}{(\mathrm{n}!)^3}\left[\frac{n^3}{(n+1)!} - \frac{1}{(n-2)!}\right] =$$

$$= \frac{(2\mathrm{n}-2)!(2n)!}{(\mathrm{n}!)^3}\left[\frac{n^3}{(n+1)!} - \frac{n(n+1)(n-1)}{(n+1)!}\right] = \frac{(2\mathrm{n}-2)!(2n)!}{(\mathrm{n}!)^3(n+1)!}\left[n^3 - n(n^2-1)\right] = \frac{(2\mathrm{n}-2)!(2n)!}{(\mathrm{n}!)^3(n+1)!} \cdot \frac{n}{1}$$

$$= \frac{(2\mathrm{n}-2)!(2n)!}{\mathrm{n}!\mathrm{n}!\mathrm{n}!(n+1)!} \cdot \frac{n}{1} = \frac{(2\mathrm{n}-2)!(2n)!}{(\mathrm{n}-1)!\mathrm{n}!\mathrm{n}!(n+1)!} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!\mathrm{n}!} \cdot \frac{(2n)!}{n!(\mathrm{n}+1)!} = C_{n-1} \cdot C_n, \forall n \geq 0.$$

A segunda situação didática foi balizada pelo objetivo de generalizar as relações e propriedades discutidas nas etapas anteriores e a introdução da definição formal 2.

Situação didática II: Os k-números de Catalan $C(n,k)$ foram introduzidos na literatura em 1992. Os mesmos são definidos por $C(n,k)=\frac{1}{kn+1}\binom{(k+1)n}{n}$. Verificar: (i) $\binom{kn+n}{n}-\binom{kn+n}{n-1}=C(n,k)\cdot\left[(k-1)n+1\right]$; (ii) Se consideramos a matriz $M_{n,k}=\frac{1}{kn-n+1}\begin{pmatrix}\binom{kn+n-1}{n-1} & \binom{kn+n-1}{n-1}\\ \frac{kn+n}{kn+1} & \frac{kn+n}{n}\end{pmatrix}_{2x2}$. Decidir se temos, de fato, a seguinte propriedade derivada da representação matricial $\det M_{n,k}=C(n,k)$.

Situação de ação: Desse modo, ação do professor deverá depurar com o grupo, uma síntese de todos os dados coligidos e aventados nas fases dialéticas anteriores. Vale recordar um momento de relativo antagonismo a ser enfrentado pelo *expert* na situação de devolução (BROUSSEAU, 1988). De fato, Margolinas (1995, p. 342) recorda que as ações envolvendo a "devolução", designam "as ações do professor que visa encarregar os estudantes com responsabilidade de elaboração de estratégias de resolução para situações dadas".

Situação de formulação: Almouloud (2007, p. 38) esclarece que, neste momento, a troca de informações e mensagens entre os aprendentes é imprescindível. Ademais, o resultado do debate a dialética "permite criar um modelo explícito que pode ser formulado com sinais e regras comuns". Dessa forna, preliminarmente, os professores devem observar que $\binom{kn+n}{n}-\binom{kn+n}{n-1}=\frac{(kn+n)!}{n!(kn)!}-\frac{(kn+n)!}{(n-1)!(kn+1)!}=\frac{(kn+n)!}{1}\left(\frac{kn+1}{n!(kn+1)!}-\frac{1}{(n-1)!(kn+1)!}\right)$

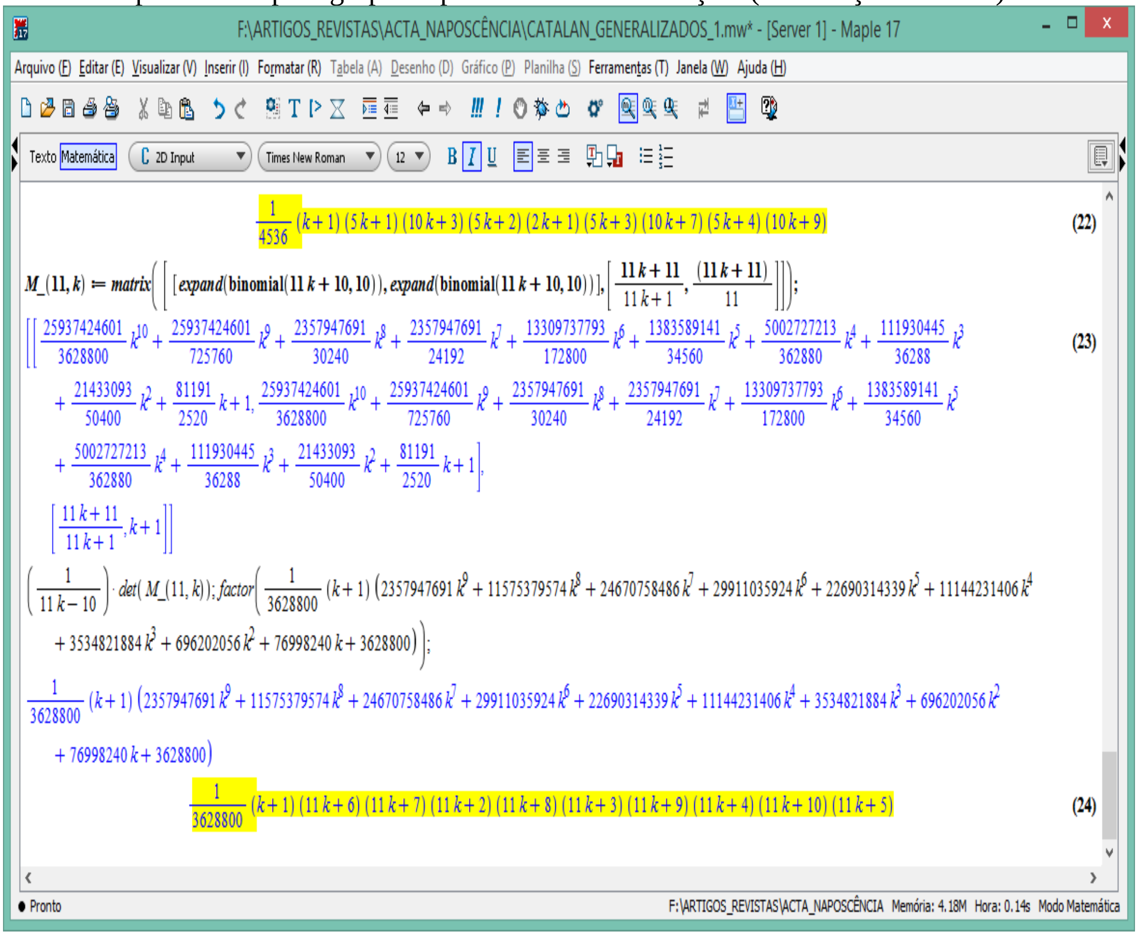
$$=\frac{(kn+n)!}{(kn+1)!}\left(\frac{kn+1}{n!}-\frac{n}{n!}\right)=\frac{(kn+n)!}{n!(kn+1)!}\left(\frac{kn+1}{1}-\frac{n}{1}\right)=\frac{(kn+n)!}{n!(kn+1)!}\left(\frac{kn+1}{1}-\frac{n}{1}\right)$$

$=\frac{(kn+n)!}{n!(kn+1)!}\left[(k-1)n+1\right]$. Isto é, vale que $\binom{kn+n}{n}-\binom{kn+n}{n-1}=C(n,k)\cdot\left[(k-1)n+1\right]$.

Situação de validação: Recordamos que, diferentemente da etapa anterior, mostra-se necessário "provar o que foi afirmado na fase anterior" (ARTIGUE, 1984, p. 7 – 8). Não obstante, quando lidamos com os números generalizados de Catalan C(n,k), o processo de representação se torna bastante fastidioso. Dessa forma, prevemos a utilização do *CAS*

Maple, com o escopo de fornecer um conjunto ampliado e expressivo de dados para proporcionar e estimular a atividade de elaboração de conjecturas dos professores.

Figura 10. O emprego do *CAS Maple* deve auxiliar no processo de elaboração de conjecturas produzidas pelo grupo de professores em formação. (Elaboração do autor)



Fonte: dados da pesquisa

Situação de institucionalização: Na etapa final de discussão da situação didática II, o professor retoma a posição de agente condutor do processo investigativo, observando um fundamento importante apontado por Perrrin-Glorian (2016).

> A necessidade de institucionalização foi formulada em 1980, assim como a existência de um contrato didático implícito; a situação didática é observada desde 1982, como uma situação a-didática imersa em um contrato didático e, ao mesmo tempo em que surge a noção de devolução. Todavia, a teoria das situações se desenvolveu, preliminarmente, em torno da caracterização de situações a-didaticas em situações quase isoladas do professor, o que constitui que a Engenharia Didática, no seu começo, era centrada sobre os aspectos matemáticos (epistemológicos) e cognitivos, não explicitados no papel do professor, ao momento de mobilização das sequências em classe. (PERRIN-GLORIAN e BELLEMAIN, 2016, P. 13)

Dessa forma, os conhecimentos mobilizados pelos sujeitos (pelos professores) nas fases anteriores devem concorrer para a descoberta, da estruturação formal e do entendimento, por parte do grupo e da constituição de um saber científico concernente ao teorema.

Teorema 2(*): Dado o inteiro $n \geq 1$, então se $M_{n,k} = \frac{1}{kn-n+1}\begin{pmatrix} \binom{kn+n-1}{n-1} & \binom{kn+n-1}{n-1} \\ \frac{kn+n}{kn+1} & \frac{kn+n}{n} \end{pmatrix}$, seu determinante fornece que $\det M_{n,k} = C(n,k)$.

Demonstração: De fato, vejamos que $\frac{kn+n}{n}\binom{kn+n-1}{n-1} = \frac{kn+n}{n} \cdot \frac{(kn+n-1)!}{(n-1)!(kn)!} = \frac{kn+n}{1} \cdot \frac{(kn+n-1)!}{n!(kn)!} = \frac{(kn+n)!}{n!(kn)!} = \binom{kn+n}{n}$. Por outro lado, vemos ainda que ocorre que $\frac{kn+n}{kn+1} \cdot \binom{kn+n-1}{n-1} = \frac{kn+n}{kn+1} \cdot \frac{(kn+n-1)!}{(n-1)!(kn)!} = \frac{1}{1} \cdot \frac{(kn+n)!}{(n-1)!(kn+1)!}$.

Finalmente, avaliamos: $\det M_{n,k} = \frac{1}{kn-n+1}\left(\frac{kn+n}{n} \cdot \binom{kn+n-1}{n-1} - \frac{kn+n}{kn+1} \cdot \binom{kn+n-1}{n-1}\right) =$

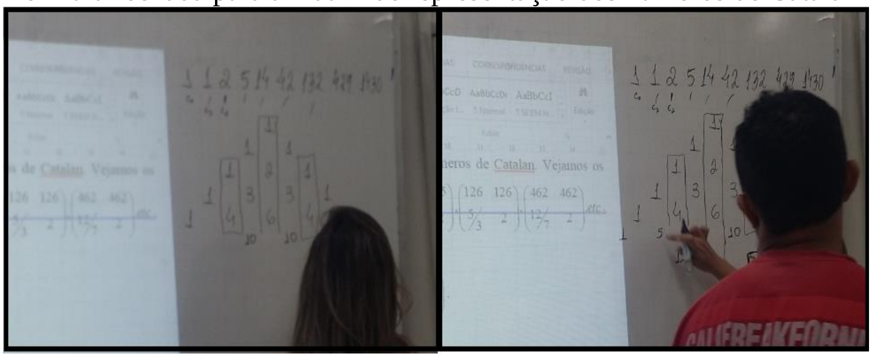
$$= \frac{1}{(kn-n+1)}\left(\binom{kn+n}{n} - \binom{kn+n}{n-1}\right) = C(n,k) \square$$

Finalmente, com origem nos elementos e premissas indicadas nos parágrafos predecessores, passaremos ao conjunto de dados produzidos e que representam um subconjunto de todas as informações coletadas em sala de aula. Os elementos e habilidades estimuladas na análise cognitiva (análises preliminares) (cinco tarefas) assumiu um imprescindível papel para o desenvolvimento dos raciocínios necessários e que serviram como um fio condutor dos argumentos generalizados e formalizados. Cabe observar, entretanto, uma característica fundamental e preservada em um estudo balizado por uma EDF (engenharia de 2ª geração) que busca considerar "situações elaboradas que podem ser mobilizadas por práticas ordinárias dos professores, todavia, lhe proporcionam a possibilidade de refletir sobre a ação dos estudantes diante de situações não usuais" (PERRIN-GLORIAN e BELLEMAIN, 2016, p. 41).

Experimentação

Na fase atual, manifestamos um profundo interesse pela "determinação e seleção dos elementos que permitem os comportamentos dos estudantes e seu significado" (ARTIGUE, 1995, p. 45). Isso posto, abaixo, observamos os professores 1 e 4 em uma situação, busca a identificação de padrões numéricos invariantes a partir de uma lista de matrizes indicadas no enunciado da situação didática 1. Logo em seguida, na situação de formulação, se observou que os professores 1 e 4 concluíram a profunda correspondência entre os números binomiais, dispostos no triangulo de Pascal e os valores indicados em cada grupo de matrizes (ver figura 11). Na figura abaixo observamos o desenvolvimento de suas estratégias originadas nos números de Catalan na fase formulação da TSD.

Figura 11. Os professores 1 e 4 na situação de validação procuraram descrever e formular uma fórmula fechada para a matriz de representação dos números de Catalan



Fonte: dados da pesquisa

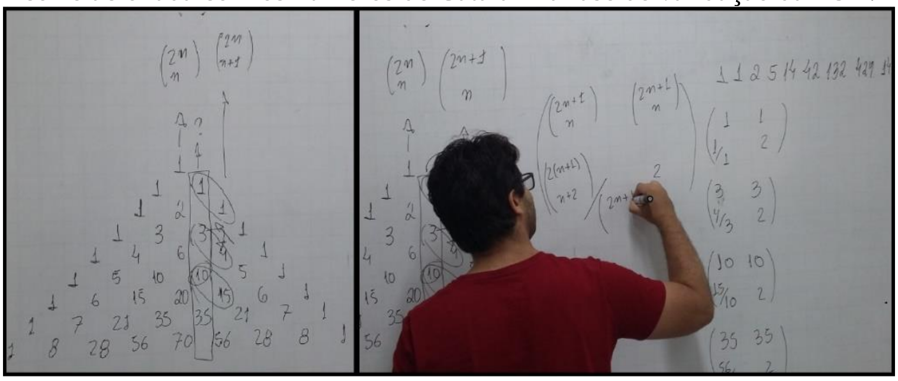
Na situação de validação, na figura 12 abaixo, observamos as ações desenvolvidas pelo professor 5, concernente ao fornecimento de uma fórmula fechada para as matrizes indicada no enunciado da situação didática 1. Na figura 12, ao lado direito, o mesmo produziu a seguinte formulação a partir de regras formuladas e originadas da disposição dos números no triângulo de Pascal que indicou: $\begin{pmatrix} \binom{2n+1}{\text{n}} & \binom{2n+1}{n} \\ \binom{2(n+1)}{n+2} \Big/ \binom{2n+1}{\text{n}} & 2 \end{pmatrix}$.

> Pesquisador: Explique ou esclareça a regra que você descobriu para determinar a matriz de representação dos números de Catalan?

Professor 5: O segundo a_{22} elemento da primeira linha da matriz fica sempre 2 para multiplicar com o primeiro e o elemento a_{21} é sempre a divisão desses dois elementos aqui. Por exemplo, a matriz seguinte, olha para o elemento, visualmente e numericamente, no elemento que se toma como referência para construir a matriz, pegamos o elemento que está logo abaixo aqui no triangulo. Aqui o padrão para conseguir o Catalan. No triângulo, o elemento imediatamente abaixo para constituir esses dois elementos da matriz.

Na figura 12, mediante a situação dialética de validação, registramos a mobilização de conhecimentos discutidos pelo e com a identificação de um sujeito (o professor 5), responsável pela transmissão oficial da estratégia indicativa pelo grupo, da obtenção e da determinação de uma matriz originada das relações e disposição geométrica dos números binomiais dispostos no triângulo de Pascal.

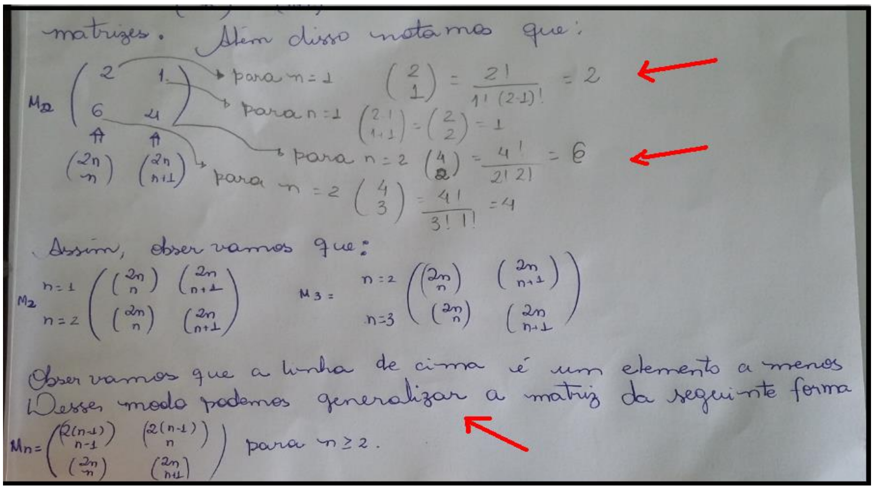
Figura 12. O professor 5 determinou uma fórmula fechada de representação matricial correlacionada com os números de Catalan na fase de validação da TSD.



Fonte: dados da pesquisa

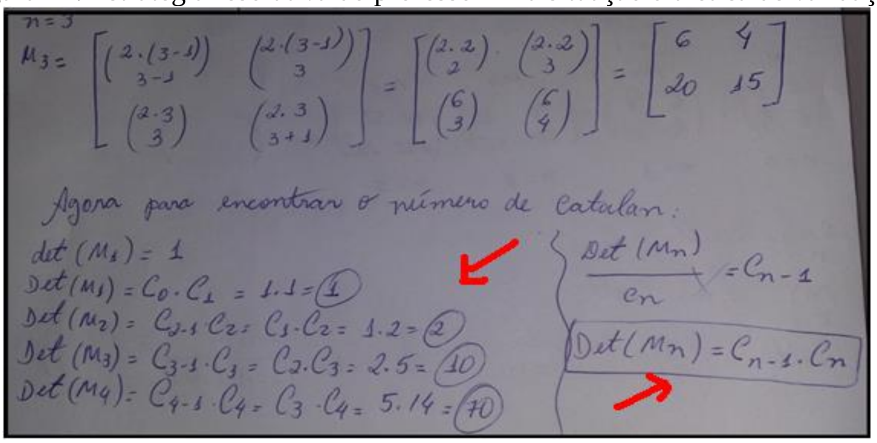
Recordamos que, em relação ao conjunto de matrizes especiais da tarefa 1 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 20 & 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 & 15 \\ 70 & 56 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 70 & 56 \\ 252 & 210 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 252 & 210 \\ 924 & 792 \end{pmatrix}$ o professor 3 forneceu uma estratégia para a determinação de cada matriz a partir do triângulo de Pascal e o pesquisador requereu a descrição de uma regra, de um procedimento operacional, capaz de determinas as matrizes acima e descobrir suas relações com os números de Catalan. Assim, podemos visualizar nas figuras 13 e 14, por exemplo, que o professor 4, descreveu um roteiro para a determinação das matrizes e, posteriormente, a determinação da propriedade ensejada, correlata ao modelo de produção dos números de Catalan.

Figura 13. Estratégia resolutiva do professor 4 na situação de validação envolvendo as representações matriciais correlacionadas com a noção de NGC.



Fonte: dados da pesquisa

Figura 14. Estratégia resolutiva do professor 4 na situação dialética de validação.



Fonte: dados da pesquisa

Por último, na figura 14, registramos a estratégia envolvendo a descoberta da propriedade matricial correlacionada com os números de Catalan. Neste caso, os estudantes compreenderam e deduziram a seguinte relação $\mathrm{Det}(\mathrm{N_n}) = \mathrm{C_n} \cdot \mathrm{C_{n+1}}$ extraída de matrizes especiais, cujas entradas são precisamente números binomiais identificados na pirâmide de Pascal. Portanto, o pesquisador confirmou a validação do conhecimento.

Almouloud (2007, p. 177) adverte que a análise *a posteriori* não se constitui como uma crônica da classe, mas sim, uma análise feita à luz da análise *a priori* dos fundamentos teóricos assumidos, da hipótese de trabalho, de investigação e da problemática da pesquisa. Isso posto, na seção subsequente, acentuaremos determinados elementos que determinam um caráter de replicação e de reprodutibilidade (ARTIGUE, 1984) dos conhecimentos mobilizados ao decurso do desenvolvimento das cinco tarefas e das duas situações didáticas estruturadas.

Análise *a posteriori* e validação interna

Sublinhamos ainda, no bojo das preocupações de Laborde (1999) que, com as respectivas produções dos estudantes são previstas, num estudo de ED, uma *validação interna* da sequência didática, bem como uma *validação externa*. A primeira envolve "uma descrição genérica da classe ou das condutas e tipos de produção majoritárias na classe, estudo de sua evolução e verificação de sua adequação no que concerne ao esperado dos estudantes" (LABORDE, 1997, p. 105). Laborde (1997, p. 105) explica e distingue que a *validação externa* envolve uma comparação das produções dos estudantes antes ou ao longo da sequência, ou ainda após experimentação em sala, o que pode ocorrer por meio de entrevistas individuais ou em grupo, bem como por meio de questionários. E, também, por meio da comparação de produções externas, vinculando outros alunos não submetidos à mesma sequência estruturada de ensino. Diante disso, restringir-nos-emos a uma validação interna da sequência estruturada das atividades desenvolvidas, com o amparo da TSD. Cabe acentuar, entretanto que, diante da quantidade de indivíduos (professores) participantes da pesquisa, não perseguimos variáveis invariantes que superam o potencial revelador dos dados coletados para o grupo objetivado no trabalho.

Decerto que os dados obtidos na fase de experimentação, tendo em vista os objetivos (a) e (b) escolhidos, devem responder apenas aos elementos previstos por uma validação interna. Neste sentido, recordamos que "o término da Engenharia Didática designa um conjunto de sequências de classes concebidas, organizadas e articuladas no tempo, de maneira coerente por um professor-engenheiro, com o fim de realizar um projeto de aprendizagem para uma população determinada de alunos" (DOUADY, 1995, p. 62). Não obstante, tendo em vista o desenvolvimento de uma EDF buscamos acentuar determinadas habilidades e competências que podem consubstanciar/aperfeiçoar sua atividade como professores de Matemática, na condução de uma abordagem afetada pelo contexto histórico e um entendimento epistemológico evolutivo da Matemática (ALVES, 2017b). Outrossim, os conhecimentos mobilizados no percurso investigativo, no contexto histórico evolutivo, determinam um potencial de incorporação de uma cultura matemática do professor que, a partir de uma apreciação preliminar, parece conhecer apenas os números de Fibonacci, em detrimento de outros números especiais (ALVES, 2018).

Com origem nas duas situações problemas considerados na experimentação, constatamos sua potencialidade de explorar e permitir um processo investigativo com o arrimo da tecnologia (ver figura 10). Neste caso, os dados confirmam um papel fundamental para o uso do *CAS Maple*, de modo particular, no sentido de proporcionar a aferição de informações para um grande conjunto de dados particulares visando a formulação e generalização ulterior do modelo de representação dos números generalizados de Catalan. No quadro abaixo, acentuamos algumas propriedades discutidas apenas em artigos científicos especializados de Matemática (ALLEN, 2014; LARCOMBE, 1999; MAYS e WOJCIECHOWSKI, 2000; KOSHY, 2006; 2007; 2012; KOSHY e SALMASSI, 2006. REGEV, 2011; ROMAN, 2015; RUBESTEIN, 1993; SARACEVI, STANIMIROVI, KRTOLICA e MASOVICI, 2014; STOJADINOVIC, 2015), seguindo a propriedade indicada no teorema 2(*) cujo teor envolve certo caráter de ineditismo.

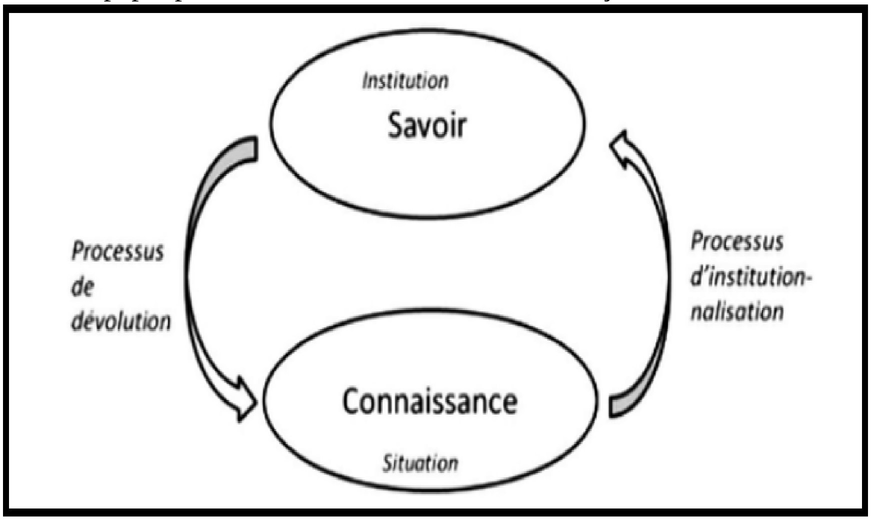
Quadro 1: Quadro das propriedades e teoremas discutidos na institucionalização da TSD.

Números de Catalan	**Representações matriciais relacionadas com os k-números Catalan**
$\det(M_n)=C_n$ $\det(\mathrm{N}_n)=C_n\cdot C_{n+1}$	$M_n=\begin{pmatrix}\binom{2n-1}{n-1} & \binom{2n-1}{n-1}\\ \frac{2n}{n+1} & 2\end{pmatrix}$, $N_n=\begin{pmatrix}\binom{2n-2}{n-1} & \binom{2n-2}{n-2}\\ \binom{2n}{n} & \binom{2n}{n-1}\end{pmatrix}$, $n\geq 1$
$\det(M_{n,k})=C_{n,k}$, para todo $n\geq k\geq 1$.	$M_{n,k}=M(n,k)=\frac{1}{kn-n+1}\times\begin{pmatrix}\binom{kn+n-1}{n-1} & \binom{kn+n-1}{n-1}\\ \frac{kn+n}{kn+1} & \frac{kn+n}{n}\end{pmatrix}$

Fonte: Elaboração do autor.

Ainda no que concerne aos conhecimentos envolvidos, mobilizados e construídos pelo grupo de cinco professores, assinalamos os respectivos conhecimentos que concorreram para o estabelecimento das propriedades matemáticas evidenciadas no quadro 1. Neste sentido, assumimos posição concorde com Margolinas (2015), quando recorda uma das distinções pioneiras realizadas no âmbito da Didática da Matemática (ALVES, 2016), envolvendo a distinção entre conhecimento (*connaisance*) e saber (*savoir*). Neste sentido, Margolinas (2012) explica que um conhecimento possui um papel de equilíbrio entre o sujeito e o meio, constitui o que se pode mobilizar quando ocorre um investimento em uma situação, cuja natureza pode ocorrer como um conhecimento de ação, um conhecimento de interação ou um conhecimento de memorização. Ao passo que, quando objetivamos o saber (*le savoir*) proporcionado ao grupo dos cinco professores em formação, priorizamos um componente de construção social e cultural, que se revela em uma instituição ou, ainda, conforme Margolinas (2015, p. 34), que se consubstancia por um texto ou trabalho científico, eventualmente, materialmente escrito. Na figura 15 divisamos um emblemático ciclo dialético discutida em Didática da Matemática e nos trabalhos desenvolvidos em torno da Engenharia Didática.

Figura 15. Margolinas (2015) descreve a dialética entre conhecimento/saber e seu importante papel para a Didática da Matemática e função no ensino.



Para concluir, recordamos que Brousseau forneceu a indicação de elementos essenciais a *práxis* do professor, ao mencionar que é necessário "poder comparar, não apenas os resultados, mas também as condições nas quais eles foram obtidos e de modo que tais condições sejam reprodutíveis. " (BROUSSEAU, 1986, p. 3). Por conseguinte, as cinco tarefas e as duas situações didáticas estruturadas, amparadas pelo ponto de vista da TSD, permitem um roteiro para a abordagem em sala de aula, um itinerário constitutivo para uma transposição didática (CHEVALLARD, 1991), segundo um contexto histórico, dos Números Generalizados de Catalan – NGC, o que corresponde a um roteiro de abordagem que, de forma geral, não pode ser observado no conjunto dos livros de História da Matemática que foram consultados. Tais elementos concorreram para o alcance dos objetivos (a) e (b).

Do ponto de vista histórico e epistemológico, assinalamos a importância dos números de Catalan confirmada, por exemplo, por Kaurers & Paule (2011, p, 36) quando observam que "não é exagero dizer que os números Catalan são a sequência mais proeminente em combinatória". Por outro lado, McCammond (2006) menciona que "Os números Catalan são um passatempo favorito de muitos matemáticos amadores (e de profissionais)". Ademais, o caráter de ubiquidade matemática pode ser conferido aos números de Fibonaci, como também, ao caso dos números de Catalan, como declara Koshy (2007, p. 132):

> Os números de Catalan são ainda mais fascinantes do que os números de Fibonacci. Como o norte Estrela no céu noturno, são uma luz linda e brilhante no céu matemático. Eles continuam a fornecer um terreno fértil para os teóricos dos números, especialmente os entusiastas dos números de Catalan e os cientistas da computação. (KOSHY, 2007)

Do ponto de vista de uma cultura matemática e de uma cultura pragmática, proporcionamos ao conjunto dos cinco professores, em formação inicial, conhecimentos que promovem a compreensão de múltiplos pontos de vista e que correspondem à noção de NGC. Assim, assumimos posição concorde com Perrin-Glorian e Bellemain (2016, p. 38) quando assinalam, no cenário de uma EDF que "a pesquisa em Didática produz resultados que podem contribuir para melhorar o ensino e a formação de professores". Outrossim, na medida em que assumimos posição concorde com Perrin-Glorian e Bellemain (2016, p. 38), se assinala que "para que os trabalhos possam contribuir para o melhoramento do ensino e a formação de professores, se mostra imprescindível a consideração do real funcionamento da sala de aula e das necessidades dos professores". Em nosso caso, objetivamos um conteúdo matemático com múltiplas relações conceituais e que incide para uma melhor compreensão matemática do futuro professor.

De modo geral, as fontes consultadas proporcionam tal desvelamento, na medida em que realizamos apreciação de artigos científicos e especializados de Matemática, como apresentamos na figura 16 o trabalho de Chunning (2016). Ainda na figura 16, a despeito do sistema de representação simbólica correspondente ao idioma empregado para estruturação do trabalho, de imediato, identificamos vários registros matemáticos e fórmulas que confirmam a discussão do modelo generalizado de Catalan. Em suma, esses e outros indícios científicos confirmam um processo matemático evolutivo e ininterrupto correlato aos Números Generalizados de Catalan - NGC.

Figura 16. Chunning (2016, p. 68) discute várias formas de representação oriundas dos números de Catalan e dos números generalizados de Catalan.

C_n	$C_{m,n}$
$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$	$\frac{1}{mn+1}\binom{(m+1)n}{n}$
$\frac{1}{n}\binom{2n}{n-1}$	$\frac{1}{n}\binom{(m+1)n}{n-1}$
$\frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n}$	$\frac{1}{(m+1)n+1}\binom{(m+1)n+1}{n}$
$\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}$	$\binom{(m+1)n}{n}-m\binom{(m+1)n}{n-1}$
$\binom{2n-1}{n-1}-\binom{2n-1}{n-2}$	$\frac{m+n}{mn+1}\binom{(m+1)n-1}{n-1}-\binom{(m+1)n-1}{n-2}$
$2\binom{2n}{n}-\binom{2n+1}{n}$	$\frac{1}{m}\left[\frac{(m+1)(n+1)}{mn+1}\binom{(m+1)n}{n}-\binom{(m+1)n+1}{n}\right]$
$\binom{2n+1}{n}-2\binom{2n}{n-1}$	$\binom{(m+1)n+1}{n}-(m+1)\binom{(m+1)n}{n-1}$
$\binom{2n+1}{n+1}-2\binom{2n}{n+1}$	$\binom{(m+1)n+1}{mn+1}-(m+1)\binom{(m+1)n}{mn+1}$

廣義 Catalan 數的一些整數論性質

許純寧

一、引言

Catalan 數 C_n (Koshy [4]) 原始定義爲對任意非負整數 n, 滿足遞迴關係式

$$C_{n+1}=C_0C_n+C_1C_{n-1}+\cdots+C_nC_0,\ C_0=1$$

的數列。其一般式爲 $C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, 其前幾項爲 $\{C_n\}_{n\geqslant 0}=\{1,1,2,5,14,42,\ldots\}$。

Catalan 數不只在在組合學中頻繁出現, 在資訊、代數、幾何、拓樸等領域中也可以發現它的蹤影, 也因此 Catalan 數一直是組合學家研究的課題之一。目前已經發現的能用 Catalan 數計數的組合結構就有 207 種, 有興趣的讀者能在 Richard Stanley 的個人網站 [7] 上查看資料。Sands [6] 在 1978 年將 Catalan 數 $C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ 推廣爲 $C_{m,n}=\frac{1}{mn+1}\binom{(m+1)n}{n}$。

本文的主要目的是探討 $C_{2,n}$ 的整數論性質。在第二節中, 我們討論 $C_{m,n}$ 與二項式係數的關係。在第三節中, 我們考慮 $C_{2,n}$ 的一個整除性, 它推廣了 T. Koshy and Z. Gao [1] 在 C_n 的結果。在第四節中, 我們證明了 $C_{2,n}$ 中只有 $C_{2,2}$ 爲質數, 同樣地它推廣了 Koshy 和 Salmassi [5, p.331] 在 C_n 上的結論。

Fonte: Chunning *(2016, p. 68)*

Considerações finais

Nas seções passadas apresentamos os dados coligidos de uma investigação que assumiu os pressupostos de uma EDF (MARGOLINAS; DRIJVERS, 2015) e, no que concerne ao momento de transposição didática e modelização das ações envolvendo o pesquisador e um grupo de cinco professores participantes do estudo, se apoiou na TSD. Observamos que o assunto matemático nominado Números Generalizados de Catalan - NGC costuma ser desconsiderados pelos livros de HM e, sobretudo, pelos autores de livros mais acessíveis aos professores participantes do estudo, nem sempre em língua portuguesa, entretanto, muitas informações sobre seu avanço atual podem ser apreciadas, de modo restritivo, em periódicos especializados de Matemática.

A Engenharia Didática de Formação (EDF) que desenvolvemos proporcionou um percurso sistemático de coleta de dados, a partir da interação com cinco professores em formação inicial, diante de cinco tarefas e duas situações didáticas que permitiram a descoberta, a familiarização e o estudo de propriedades derivadas dos números de Catalan. Nesse contexto, de acordo com o que temos acentuado em nossos trabalhos (ALVES, 2017a; 2018), a compreensão do papel e da generalização progressiva das definições matemáticas se mostrou imprescindível para a constituição de uma cultura matemática para o professor. Ademais, como observam Perrin-Glorian e Bellemain (2016, p. 39) "segunda geração, sobretudo, quando a mesma se apoia em uma engenharia didática clássica, de primeira geração, mas a mesma prolonga seu questionamento". E, no referido contexto, se mostra imprescindível validar o processo de sua difusão. Por conseguinte, a presente (EDF) detém o potencial de produção de conhecimentos sistemáticos que podem ser empregados, utilizados e disseminados pelos futuros professores de Matemática.

Assinalamos, ainda, a descoberta de propriedades e a formulação de determinadas propriedades matemáticas que concorreram para o estabelecimento de fórmulas, definições e dois teoremas envolvendo e a representação matricial associada aos números Generalizados de Catalan. A atividade investigativa dos estudantes (professores) desenvolvidas a partir das cinco tarefas iniciais, que constituíram os dados das análises preliminares e as duas situações didáticas estruturadas permitiram um itinerário de perquirição que proporcionou a interação do grupo, o debate científico e a produção de um conhecimento matemático circunstanciado pelo grupo dos cinco professores em formação inicial.

Os princípios de modelização dos fenômenos originados das interações entre pesquisador – estudantes – saber matemático e o controle sistemático das alterações no estatuto do saber matemático, no sentido previsto e objetivado pela aplicação da TSD, permitiu o acompanhamento, o registro particular e a ocorrência de habilidades e dos raciocínios heurísticos e argumentativos, específicos decorrentes dos números de Catalan, derivados de várias formas de representação (ver figuras 3, 4, 5, 6 e 7) e, sobretudo, envolvendo noções relativamente básicas e importantes para o ensino no contexto da escola básica (matrizes, números binomiais e triângulo de Pascal). Por conseguinte, não apenas um conjunto de conhecimentos intimamente condicionados pelo campo epistêmico foi observado, como também, a descrição de um processo de dialético de produção de conhecimentos pragmáticos dos professores participantes do processo histórico, investigativo e que detêm, sobretudo, a potencialidades de concorrer para o progresso de sua competência profissional (ALVES, 2018).

Finalmente, apresentamos ao decurso da descrição de nossa EDF, um conjunto de elementos que podem consubstanciar um roteiro de abordagem para o ensino, como uma fonte de informação histórica e epistemológica que envolve um processo matemático de generalização e de descoberta de definições matemáticas e propriedades, por vezes, inesperadas, segundo a confirmação de matemáticos profissionais. O cenário anterior se coaduna com o que prevê Perrin-Glorian (2011, apud MARGOLINAS e DRIJVERS, 2015, p. 900) quando acentuam que "a Engenharia Didática é um método: (a) para melhor compreender o ensino; (b) para refletir sobre a produção de recursos para o ensino e a formação de professores". Tal engendramento e as múltiplas contribuições requerem uma reflexão ulterior aprofundada por parte dos professores de Matemática e para professores de modo geral.

Referências

ALMOULOUD, Ag S.. *Fundamentos da Didática da Matemática*. São Paulo: Editora UFPR, 2007.

ALMOULOUD, Ag S.; SILVA, M. J. F. Engenharia didática: evolução e diversidade. *Revemat*. Florianópolis. v. 7, n. 2, p. 22-52, 2012.

ALVES, F. R. V. On teaching of generalized catalan numbers with the maple´s help. *Acta Didactica Naposcencia*. v. 11, nº 1, 25 – 40, 2018. Disponível em: http://adn.teaching.ro/

ALVES, F, R. V. Didática da Matemática: seus pressupostos de ordem epistemológica, metodológica e cognitive. *Interfaces da Educação*. v. 7, nº 21, 131 – 150. 2016.

ALVES, F, R. V. Fórmula de Moivre, ou de Binnet ou de Lamé: demonstrações e generalidades sobre a sequencia generalized de Fibonacci. *Revista Brasileira de História da Matemática*. v. 17, nº 33, 1 – 16, 2017a.

ALVES, F. R. V. Engenharia Didática sobre a noção de Sequência Generalizada de Jacobsthal. *Revista Union Iberoamericana de Matemática*. Nº 51, 83 – 106. 2017b.

ALVES, F. R. V.; CATARINO, M. P. Engenharia didática de Formação (EDF): repercussões para a formação do Professor de Matemática no Brasil. *Educação Matematica em Revista – RS*. v. 2, nº 18, 121 – 137. 2017. Disponível em: http://sbemrs.org/revista/index.php/2011_1/article/view/304

ALLEN, E.. *Combinatorial Interpretations Of Generalizations Of Catalan Numbers And Ballot Numbers*. (Thesis in Mathematics and Science). Pittsburgh: Pittsburgh University, 2014.

ANDREWS, G.. *Number Theory*. New York: West Washington Square, 1971.

ARTIGUE, M.. Ingénierie Didactiques. BRUN, J. (org.). *Didactiques de Mathématiques*, 243 – 264. LAGRANGE J.B. & al. (eds). Jun, Reims, France. 1995.

ARTIGUE, M.. Modélisation et Reproductibilité en Didactiques de Mathématiques. *Les Cahiers Rouge des Didactiques des Mathematiques*, v. 8, nº1, p. 1 – 38, 1984.

ARTIGUE, M.. Perspectives on Design Research: The Case of Didactical Engineering. In: BIKNER-AHSBAHS, Angelika; KNIPPING, Khristine; PRESMEG, Norma. *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education: Examples of Methodology and Methods*. New York: Springer, 467 -497, 2015.

BARCUTTI, E.; VERRY, M. C. Some more properties of Catalan numbers. *Dicrete Mathematics*. nº 102, 229 – 237, 1991.

BERNHART, F. R. Catalan, Motzkin, and Riordan numbers. *Discrete Mathematics*. v. 4, nº 4, p. 73 – 112, 1999. Disponível em: http://users.dimi.uniud.it/~giacomo.dellariccia/Glossary/Catalan/Bernhart1999.pdf

BILU, Y. F.; BUGEAUD, Y; MIGNOTTE. M. *The problem of Catalan*. New York: Springer, 2010.

BOBROWSKI, J.. *Generalized Catalan Numbers and Some Divisibility Properties*. (Master in Science). Nevada: University of Nevada, 2015. Disponível em: https://digitalscholarship.unlv.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=3519&context=thesesdissertations

BRASIL JUNIOR, N. G. *Bijeções envolvendo os Números de Catalan*. (Dissertação de Matemática. Estatistica e Computação). Campinas: UNICAMP, 2014.

BROUSSEAU, G. *Théorisation des phénomènes d´enseignement des Mathématiques* (these de doctorat). Bourdeaux: Université Bourdeaux I, 1986. 905f.

BUESCU, J.. Os incríveis números de Catalan. *Ingenium*. 91 – 95. 2010. Disponível em: http://nda.tecnico.ulisboa.pt/files/sites/40/Os-incriveis-numeros-de-Catalan-ingenium-93-2010.pdf

BOYER, C.. *A History of Mathematics*. London: Wiley and Sons, 1968.

BROUSSEAU, G.. Le contrat didactique: le milieau. *Recherche en Didactiques des Mathématiques*. v. 9, nº 3, 309 – 336. 1988. Disponível em: http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2012/02/contrat-milieu1.pdf

CAMPBELL. D.. M. The Computation of Catalan Numbers. *Mathematics Magazine*, v. 57, No. 4 (Sep., 1984), 195-208. 1984. Disponível em: http://www.jstor.org/stable/pdf/2689673.pdf?refreqid=search%3Af334a92a758df808910f31b230e73395

CATALAN, E. Sur les nombre de Segner. *Circolo Matematico di Palermo*. Itália. 1886. Disponível em: https://orbi.uliege.be/handle/2268/207766

CHEVALLARD, Y. *La transposition didactique*. Paris: presses universitaires. 1991.

CHEVALLARD, Y.; JOHSUA, M. A. Un exemple d'analyse de la transposition didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*. Vol 3.2, 1982.

CHUNNING, X. Some interger properties of generalized catalan numbers. *Buletin Sinica*. v. 22, nº 12, 66 – 74. 2016. Disponível em: http://web.math.sinica.edu.tw/math_media/d402/40208.pdf

DEVELAY, M.. Pour une épistémologie des savoirs scolaires. *Pédagogie Collegialle*. v. 7, nº 1, 35 – 40. 1993. Disponível em: http://aqpc.qc.ca/sites/default/files/revue/develay_07_1.pdf

DOUADY, R.. La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. Gomez, P. (org.) *Ingenieria Didactica en Educación Matemática*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano, 1 – 7, 1995.

EVES, H.. *An introduction to History of Mathematics*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1976.

GESSEL, I. E. Super ballot numbers. *Journal of Symbolic Mathematics*. 179 – 194. 1992. disponível em: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.86.4040

GESSEL, I. E.; Xin, G. *A combinatorial interpretation of the numbers*. 2(3), 1 – 20. 2004. Disponível em: https://arxiv.org/pdf/math/0401300.pdf

GRAHAM, R, L; KNUTH, D. E.; PASTASHNKI, O. *Concrete Mathematics*. Second edition. California: Addison & Wesley Publshers, 1988.

GRIMALDI, R.. P. *Fibonacci and Catalan Numbers*. New Jersey: Wiley & Sons Publications, 2012.

GUIMARÃES, H. L. A. *O passeio de Catalan na Praia e as gramissianas de retas*. (dissertação de mestrado). Recife: UFPE, 2012.

HURTADO, F.; NOY, M. Graph of triangulations of a convex polygon and tree of triangulations. *Computational Geometry*, v. 13, 179–188, 1999. Disponível em: https://pdfs.semanticscholar.org/15b6/a9de791dcf14a4f5276577c336dfd799ee0b.pdf

HURTADO, F.; NOY, M. Ears of triangulations and Catalan numbers. *Discrete Mathematics*. nº 149, 319 – 324, 1996.

LARCOMBE. P. L. The 18th Century Chinese descovery of the Catalan numbers. *Mathematical spectrum*. 32(1), 6 – 7, 1999.

LAURENTIN, J.. Réflexions sur la triangulation des polygones convexes. *Bulletin de la Sabix*. 2(2), 141 – 150, 2016.

KOSHY, T.. SALMASSI. M.. Parity and Primality of Catalan Numbers. *The College Mathematics Journal*, Vol. 37, No. 1, Jan. 52-53. 2006.

KOSHY, T.. The ubiquitous Catalan numbers. *Mathematic Teacher*. 100(3), 184 – 188. 2006. Disponível em: http://lyceeenligne.free.fr/IMG/pdf/Catalan.pdf

KOSHY, T.. Some Catalan identities with interesting consequences. *The Mathematical Gazette*, 96(536), (July 2012), p. 323-328. 2012. Disponível em: http://www.jstor.org/stable/pdf/23248576.pdf?refreqid=excelsior%3A61b9ded96ef2b57e3adaf21f6f15b358

KOSHY, T.. *Catalan Numbers with application*. Oxford: Oxford University Press, 2007.

KOSHY, T..; Gao, Zhenguang. Convergence of a Catalan Series. *The college mathematics journal*. 43(2), 141 – 146. 2012. Disponível em: http://www.geofhagopian.net/papers/Convergence_Catalan_Series.pdf

KOSHY, T.; GAO, Z.. Some divisibility properties of Catalan numbers. *The Mathematical Gazette*, v. 95 nº 532, 96 – 102. 2011. Disponível em: http://www.jstor.org/stable/pdf/23248631.pdf?refreqid=excelsior:46af9b06c52625441d77125d755cfb22

MARGOLINAS, C. Essai de généalogie en didactique des mathématiques. *Revue suisse des sciences de l'éducation*. 7(3), p. 343 – 360, 2005.

MARGOLINAS, C.. Situations, savoirs et connaissances... comme lieux de rencontre? *Formation et pratiques d'enseignement en questions*. nº 19, 31 – 39, 2015. Disponível em: http://www.revuedeshep.ch/site-fpeq-n/Site_FPEQ/19_files/2015-Margolinas-FPEQ-19.pdf

MARGOLINAS, C.. Essai de généalogie en didactique des mathématiques. *Revue suisse des sciences de l'éducation*. v. 27, nº 3, 343 – 360, 2005. Disponível em: http://www.pedocs.de/volltexte/2011/4128/pdf/SZBW_2005_H3_S343_Margolinas_D_A.pdf

MARGOLINAS, C.; DRIJVERS, P. Didactical engineering in France; an insider's and an outsider's view on its foundations, its practice and its impact. *ZDM Mathematics Education*, nº 47, 893 – 903, 2015. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-015-0698-z

MAYS, M.E.; WOJCIECHOWSKI, J. A determinant property of Catalan numbers. *Discrete Math*. 21, no. 1-3, 125–133, 2000.

MCCAMMOND, J. Noncrossing partitions in surprising locations. *American Mathematical Monthly*, nº 113, 598 – 610, 2006.

PASTRÉ, P.. L´analyse du travail en Didactique professionnelle. *Revue Française de Pédagogie*, v. 3, nº 138, 9 – 17, 2002.

PASTRÉ, P. La Didactique Professionelle. *Education, Sciences & Society*, v. 2, nº 1, 83 – 95. 2011. Disponível em: https://riviste.unimc.it/index.php/es_s/article/view/136/65

PERRIN-GLORIAN, M-J; BELLEMAIN, P. M. B. L'ingenierie didactique entre recherche et ressource pour l'enseignement et la formation des maitres. *Anais do I Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática - LADIMA*. 1 – 15, 2016.

PERRIN-GLORIAN, M. J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Vers une ingénierie didactique de deuxième génération? In: MARGOLINAS, Claire; DRIJVERS, P. *Didactical engineering in France; an insider's and an outsider's view on its foundations, its practice and its impact*. ZDM Mathematics Education. 47(4), p. 893–903, 2015.

REGEV, A. A proof of catalan's convolution formula. *INTEGERS*, v. 12. nº 1, 2011. Disponível em: http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/EMIS/journals/INTEGERS/papers/m29/m29.pdf

RIBENBOIN, P. A conjectura de Catalan. *Matemática Universitária*. nº 21, Junho, 3 – 16. 1996. Disponível em: http://rmu.sbm.org.br/Conteudo/n20_n21/n20_n21_Artigo01.pd

ROMAN. S. *An Introduction to Catalan Numbers*. London: Birkhauser, 2015.

ROQUE, T. *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: ZAHAR editora, 2012.

RUBENSTEIN, D. Catalan Numbers Revisited. *Journal of combinatorial theory*. 486 – 490, 1993.

SHAPIRO, L. W. A Catalan triangle. *Discrete Mathematics*. nº 14, 83–90, 1976.

STANLEY, R. P. *The Catalan numbers*. Cambridge: Cambridge University Press, 2015.

STOJADINOVIĆ, T. On Catalan Numbers. *Teaching of Mathematics*, 18(1), 16-24. 2015. Available in: http://elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/tm/34/tmn34p16-24.pdf

TRIVEDI, M. B.; JHA, P. Approaches differ: Catalan numbers. *International Journal of Advanced Science and Research*. 2(6), 82 – 89. 2017. Available in: http://www.allsciencejournal.com/archives/2017/vol2/issue6/2-6-21

SARACEVI, M. H.; STANIMIROVI, S, P.; KRTOLICA, S; MASOVI. C. Construction and Notation of Convex Polygon Triangulation Based on Ballot Problem. *Romanian Journal of information science and technology*, v. 17, nº 3, 237–251, 2014. Disponível em: http://www.romjist.ro/content/pdf/03-msaracevic2014.pdf

VARADARAJAN, V. S. Euler through time: a new look at old themes, *AMS*, Providence, RI, 2006.

VAREY, A. *Catalan Numbers: New and Old* (Master of Science and Mathematics). Wisconsin-Milwaukee: Wisconsin-Milwaukee University. 2011.

VON SZILY. Über die quadratsummen der binomial coëfficienten. *Math Nat Berlim*. 12(1), 84 – 91, 1894.

Texto recebido: 05/04/2018
Texto aprovado: 10/06/2018