EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i1p136-159

Articulando os raciocínios combinatório e probabilístico a partir da resolução de problemas na EJA

Articulating combinatorial reasoning and probabilistic reasoning from problem solving in Youth and Adult Education

---

EWELLEN TENORIO DE LIMA [1]

RUTE ELIZABETE DE SOUZA ROSA BORBA [2]

Resumo

O presente estudo investigou as contribuições que a exploração de problemas combinatórios pode trazer para o raciocínio probabilístico e vice-versa, tendo como foco as relações que se estabelecem entre conhecimentos referentes à Combinatória e à Probabilidade. A coleta de dados consistiu na realização de entrevistas clínicas com 24 estudantes da EJA nas quais foram propostos problemas combinatórios e probabilísticos articulados entre si. Os desempenhos foram influenciados pelo nível de escolaridade dos participantes, pelos tipos de problemas propostos e pela ordem de apresentação desses. Foi possível perceber relações entre conhecimentos de combinatória e de probabilidade, que levam à defesa de que a articulação entre os mesmos pode beneficiar o desenvolvimento de tais raciocínios na EJA.

Palavras-chave: *Combinatória, Probabilidade, Educação de Jovens e Adultos.*

Abstract

The present study investigated the contributions that the exploration of combinatorial problems can bring to probabilistic reasoning and vice versa, focusing on the relations that are established between knowledge regarding Combinatorics and Probability. Data collection consisted on clinical interviews with 24 students from Youth and Adult Education, in which combinatorial and probabilistic problems were proposed. Participants' performances were influenced by their level of education, types of problems proposed and order of presentation of the problems. It was possible to perceive relations between knowledge of Combinatorics and Probability, which lead to the defence that the articulation between them can benefit the development of these reasoning in Youth and Adult Education.

Keywords: *Combinatorics, Probability, Youth and Adult Education.*

[1] Doutoranda em Educação Matemática e Tecnológica pela Universidade Federal de Pernambuco – UFPE. Email: ewellentlima@gmail.com

[2] Doutora em Psicologia Cognitiva pela Oxford Brookes University. Docente do Departamento de Métodos e Técnicas de Ensino do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE. E-mail: resrborba@gmail.com

Combinatória, Probabilidade e suas relações

Morgado, Pitombeira de Carvalho, Pinto de Carvalho e Fernandez (1991) afirmam que a Análise Combinatória[3] "é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas" (p. 1). Esses autores apontam os dois tipos de problema mais frequentes no estudo dessa área da Matemática, sendo estes relacionados a "1. demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições; 2. contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas" (p. 2).

Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) destacam que conhecimentos combinatórios permitem que seja realizada a enumeração de todos os modos possíveis de organização e combinação de objetos, de forma que haja certeza de que nenhuma possibilidade foi omitida. Dessa maneira, o uso da Combinatória faz com que não seja necessário listar ou enumerar todos os elementos que formam um conjunto para que se determine o número total de elementos que o compõe.

Por sua vez, a Probabilidade é definida por Morgado *et al.* (1991) como "o ramo da Matemática que cria, desenvolve e em geral pesquisa modelos que podem ser utilizados para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios" (p. 119). Segundo tais autores, "a definição de probabilidade como quociente do número de 'casos favoráveis' sobre o número de 'casos possíveis' foi a primeira definição formal de probabilidade" (p. 119).

No entanto, é importante ressaltar que existem várias concepções relativas ao termo 'probabilidade' dentro e fora do contexto escolar, que conduzem a distintos pontos de vista sobre a natureza dessa área da Matemática, como, por exemplo: a concepção clássica, a concepção frequencial/empírica, a subjetiva, a lógica e a formal (GODINO; BATANERO; CAÑIZARES, 1991). A depender do contexto, uma concepção pode ser mais adequada que a outra, pois "situações relacionadas à incerteza podem ser interpretadas de diferentes maneiras, por diferentes conceitos probabilísticos, conduzindo ou não as pessoas às respostas adequadas" (SANTOS, 2010 *apud* SANTOS, 2015, p. 50).

No desenvolvimento do estudo aqui relatado trabalhou-se com a concepção mais comumente presente nos problemas escolarizados: a concepção clássica (também conhecida como concepção laplaciana). Essa escolha pautou-se no foco central do estudo (as relações entre Combinatória e Probabilidade), pois tal concepção de probabilidade é

[3] Termo considerado sinônimo de combinatória no presente estudo.

a mais fortemente relacionada à Combinatória, visto que, em conformidade com a mesma, o primeiro passo para a resolução de um problema probabilístico consiste em “explicitar qual é o conjunto de possíveis resultados do experimento e calcular o número de elementos contidos nele” (MORGADO *et al.*, 1991, p. 120), ou seja, o conjunto composto por todas as possibilidades de eventos (construção de natureza combinatória).

Destaca-se, ainda, que os raciocínios combinatório e probabilístico são modos de pensar constituintes do raciocínio lógico-matemático, sendo importantes para a compreensão de problemas escolares e cotidianos, pois provêm ferramentas que permitem relacionar conjuntos de elementos, pensar sobre proporções e compreender eventos aleatórios. Dada tal importância, diferentes autores têm defendido que o ensino da Combinatória e da Probabilidade seja realizado ao longo da Educação Básica, tendo-se em vista o pleno desenvolvimento de ambos os raciocínios (FISCHBEIN, 1975; BORBA, 2016; CAMPOS; CARVALHO, 2016).

Autores como Piaget e Inhelder (1951 *apud* NAVARRO-PELAYO; BATANERO; GODINO, 1996) e Santos (2015) apontam que o raciocínio combinatório é de suma importância para a compreensão da ideia de probabilidade, visto que tal raciocínio permite ao sujeito compreender experimentos aleatórios, dos mais elementares aos mais elaborados. Por outro lado, conceitos probabilísticos (dentre eles o de espaço amostral) constituem uma importante ferramenta para a resolução de problemas combinatórios.

À luz do principal aporte teórico do presente estudo – a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1986; 1996) –, tem-se que conceitos relativos à Combinatória e à Probabilidade estão inseridos em um mesmo campo conceitual. Dessa forma, conceitos dessas duas áreas da Matemática estão estreitamente relacionados entre si.

Neste sentido, o presente estudo surgiu do interesse em investigar não só um e outro raciocínio, mas as relações que se estabelecem entre conhecimentos combinatórios e probabilísticos a partir da resolução de problemas articulados entre si por meio de revisitações. Tais revisitações consistiram na proposição de novos olhares aos problemas presentes nos instrumentos de coleta utilizados, visando a exploração de diferentes aspectos dos problemas propostos.

Dada a incipiência de estudos exploratórios com adultos, referentes aos raciocínios em questão, optou-se por realizar o presente estudo com estudantes da Educação de Jovens e Adultos – EJA, em função da ampla bagagem possuída por tais estudantes – advinda tanto de experiências cotidianas quanto de experiências sociais (como, por exemplo, das relações de trabalho e de compra e venda). Destaca-se, ainda, que essa bagagem de conhecimentos prévios pode e deve servir de ponto de partida para o desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos de tais estudantes na escola.

Nas próximas seções os aportes teóricos adotados no estudo em questão serão brevemente apresentados. Tais aportes serviram de base para a construção dos instrumentos de coleta utilizados, bem como para as análises de dados conduzidas, cujos principais achados são apresentados no presente artigo sob um olhar predominantemente qualitativo, tendo por foco as relações estabelecidas entre a Combinatória e a Probabilidade a partir das articulações propostas.

A Teoria dos Campos Conceituais: Estruturas multiplicativas

A Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1986, 1996) tem como objeto central o processo de conceitualização por parte dos sujeitos e atribui um papel central aos próprios conceitos matemáticos, visto que "relativamente a uma psicologia cognitiva centrada nas estruturas lógicas como é a de Piaget, a Teoria dos Campos Conceituais aparece antes como uma psicologia dos conceitos" (VERGNAUD, 1996, p. 167). Tal teoria acrescenta às contribuições de Piaget, um olhar aprofundado voltado aos conceitos e também às articulações entre os mesmos. São essas articulações que levam à constituição dos diferentes campos conceituais.

Vergnaud (1986) afirma que "um conceito pode, com efeito, ser definido como um tripé de três conjuntos" (p. 9), sendo estes: o conjunto das **situações** que atribuem sentido ao conceito (S), o conjunto dos **invariantes** – propriedades e relações constantes nas diversas situações – (I) e o conjunto das **representações simbólicas** utilizadas para representar os conceitos (R). Por sua vez, um campo conceitual é definido pelo teórico como "um conjunto de situações, cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão" (p. 10). Cabe ressaltar, ainda, que diferentes campos conceituais não são independentes: eles podem interagir entre si.

No presente estudo voltou-se o olhar para o campo das estruturas multiplicativas, que diz respeito ao "conjunto das situações que exigem uma multiplicação, uma divisão ou uma combinação destas duas operações" (VERGNAUD, 1996, p. 167). Compõem esse campo conceitual conceitos como o de número racional, proporcionalidade, funções e, em especial, os conceitos relacionados à Combinatória e à Probabilidade.

À luz da Teoria dos Campos Conceituais, a análise, investigação e classificação das diferentes situações que dão sentido a determinado conceito assume grande importância, pois "as concepções dos alunos são formadas pelas situações que eles tenham encontrado" (VERGNAUD, 1986, p. 2). Dessa forma, defende-se que a restrição do trabalho com um conceito à exploração de um único tipo de situação, não estimulará a compreensão desse conceito em sua amplitude.

Portanto, para que seja possível se ter uma vasta compreensão de um conceito é importante que se busque lhe atribuir sentido a partir do contato com problemas que abordem as diferentes situações referentes ao mesmo, inclusive no processo de ensino das diferentes áreas da Matemática.

Diferentes situações combinatórias e probabilísticas

Tendo em vista a importância da proposição de problemas combinatórios e probabilísticos de diferentes naturezas (que abordem diferentes situações referentes à Combinatória e à Probabilidade), foram considerados, no presente estudo, os tipos de problemas conforme classificação unificada proposta por Pessoa e Borba (2009) e a argumentação de Bryant e Nunes (2012), que apontam, respectivamente, a existência de quatro diferentes tipos de problemas combinatórios e de quatro exigências cognitivas ao amplo entendimento da Probabilidade.

A partir da junção de categorizações anteriores, Pessoa e Borba (2009) propõem que os problemas combinatórios sejam classificados, de acordo com seus invariantes de ordem e de escolha, em problemas que exploram as situações de **produto cartesiano**, **combinação**, **arranjo** e **permutação**.

Nos problemas de produto cartesiano, nos quais existem dois ou mais conjuntos de elementos, a escolha consiste em um elemento de cada conjunto e a ordem de organização desses elementos não constitui possibilidades distintas. Nos demais problemas combinatórios a escolha é realizada a partir de um conjunto único, consistindo em alguns elementos desse conjunto quanto se trata de problemas de combinação ou de arranjo (a mudança de ordem não cria novas possibilidades no primeiro tipo de problema, enquanto o faz no segundo tipo) ou em todos os elementos do conjunto, no caso dos problemas de permutação. Nesse último tipo de problema as diferentes possibilidades são obtidas a partir da modificação da posição dos elementos que compõem o conjunto em questão.

No que se refere às exigências cognitivas da Probabilidade, Bryant e Nunes (2012) apontam que a probabilidade é um conceito complexo e que para entendê-la é imprescindível: 1) **compreender a noção de aleatoriedade**, 2) **formar e categorizar espaços amostrais**, 3) **comparar e quantificar probabilidades** e 4) **entender correlações.**

O entendimento da aleatoriedade está relacionado à compreensão da natureza de eventos não determinísticos, isto é, eventos aleatórios. Segundo Bryant e Nunes (2012), a primeira exigência cognitiva refere-se à incerteza sobre resultados de eventos que ainda não ocorreram e que "as pessoas sabem que podem acontecer, mas não têm certeza se e quando eles acontecerão" (p. 3, tradução nossa). Dessa forma, o entendimento de tal exigência cognitiva é essencial para a distinção de um evento (ou uma sequência de eventos) aleatório de um não aleatório.

A aleatoriedade é um conceito probabilístico muito presente no cotidiano e desempenha um papel importante, visto que quando utilizado no dia a dia, como, por exemplo, ao se lançar um dado, uma moeda ou se embaralhar cartas, se tem o propósito de criar uma situação aleatória na qual todos os envolvidos tenham a mesma chance de sucesso.

A segunda exigência cognitiva está fortemente relacionada ao pensamento combinatório, pois se refere ao levantamento de todas as possibilidades referentes a dado problema. Esse é um importante passo para o cálculo de probabilidades, sendo também essencial para o próprio entendimento da aleatoriedade. Problemas probabilísticos "são sempre sobre um conjunto de eventos possíveis, mas incertos [...], nós precisamos saber precisamente quais são todos os eventos possíveis" (BRYANT; NUNES, 2012, p. 29, tradução nossa). Dessa forma, reforça-se o papel do conhecimento acerca do espaço amostral para a resolução de problemas probabilísticos.

Por sua vez, a terceira exigência cognitiva citada se refere à capacidade de comparar e quantificar probabilidades, habilidades que pressupõem o entendimento do caráter proporcional intrínseco à probabilidade de um evento dado. É preciso que se tenha em mente que "o cálculo da probabilidade de ocorrência de um evento ou de uma classe de eventos deve se basear na quantidade total do espaço amostral e não apenas na quantidade de eventos que nós queremos prever" (BRYANT; NUNES, 2012, p. 46, tradução nossa).

Por fim, a quarta exigência cognitiva se refere ao entendimento de dependência e independência de eventos, visto que a associação entre dois eventos pode acontecer aleatoriamente ou representar uma relação genuína. Nesse caso, dado que "o objetivo de analisar a correlação entre dois eventos é determinar se eles co-ocorrem mais frequentemente do que se espera que ocorram ao acaso" (BRYANT; NUNES, 2012, p. 67, tradução nossa), a habilidade mais importante, nesse sentido, é distinguir um evento aleatório de um não aleatório.

Os conhecimentos combinatórios e probabilísticos dos participantes do presente estudo foram investigados tendo-se em vista a natureza distinta de diferentes problemas combinatórios e probabilísticos, conforme os aportes teóricos citados. Além disso, teve-se como foco principal as relações que se estabelecem entre essas duas importantes áreas da Matemática, a partir da resolução de problemas articulados entre si por meio de revisitações propostas, conforme método descrito a seguir.

Método

O estudo aqui relatado consistiu em um estudo de sondagem com caráter quanti-qualitativo que teve por objetivo analisar as contribuições que a exploração de problemas combinatórios pode trazer para o raciocínio probabilístico e vice-versa. Para tal, verificou-se os desempenhos dos participantes em função das diferentes situações combinatórias e probabilísticas abordadas nos problemas propostos, do nível de escolarização dos mesmos e da ordem de apresentação dos problemas. Foram analisadas, também, as representações simbólicas e estratégias utilizadas durante a resolução desses problemas e as relações entre os raciocínios combinatório e probabilístico evidenciadas em tais resoluções.

Participaram do estudo 24 estudantes adultos da EJA, com idades que variaram de 25 a 59 anos, sendo a média de idade de aproximadamente 36 anos. Esses participantes foram classificados em três grupos, sendo: estudantes do Módulo II (equivalente aos 4º e 5º anos do Ensino Fundamental), estudantes do Módulo IV (8º e 9º anos) e estudantes da EJA Médio 3 (equivalente ao último ano do Ensino Médio). Dessa forma, a coleta de dados foi realizada junto a estudantes concluindo etapas equivalentes, respectivamente, ao fim dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, fim dos Anos Finais e fim do Ensino Médio (e consequentemente, da Educação Básica).

Essa coleta de dados consistiu na realização de entrevistas clínicas individuais, que tiveram duração de aproximadamente 45 minutos, nas quais foi proposta a resolução de um teste composto por problemas combinatórios e probabilísticos articulados entre si (metade dos participantes de cada grupo resolveu o Teste 1 e a outra metade o Teste 2).

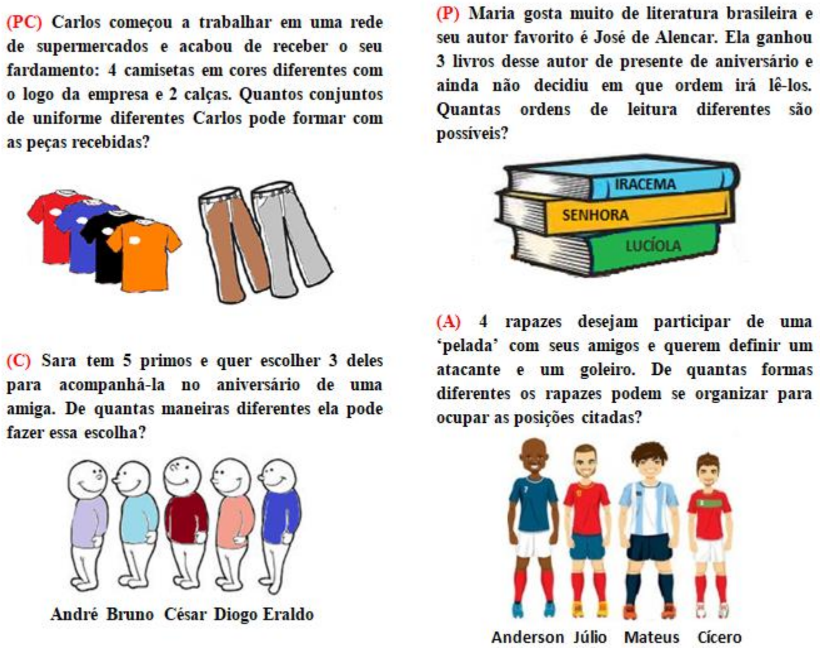
Todos os problemas foram lidos em voz alta pela pesquisadora e os participantes tiveram acesso ao teste escrito, lápis, papel, caneta e calculadora.

Ambos os testes foram compostos por quatro problemas combinatórios de diferentes naturezas (abordando as situações de produto cartesiano, combinação, arranjo e permutação) e 16 problemas probabilísticos referentes às diferentes exigências cognitivas da Probabilidade (sendo estes divididos em quatro blocos, cada um relacionado a uma situação combinatória).

Os Testes 1 e 2 diferenciavam-se entre si apenas em função da ordem de apresentação dos problemas: no Teste 1 cada problema combinatório foi proposto antes dos quatro problemas probabilísticos correspondentes, isto é, os problemas combinatórios foram revisitados sob o olhar da Probabilidade. Por outro lado, no Teste 2, cada bloco de problemas probabilísticos foi apresentado anteriormente ao problema que abordou a situação combinatória explorada. Desta forma, no segundo tipo de teste as revisitações propostas seguiram a ordem contrária: problemas probabilísticos sendo revisitados sob o olhar da Combinatória.

Na Figura 1 são apresentados os quatro problemas combinatórios presentes nos instrumentos de coleta utilizados.

Figura 1 – Problemas combinatórios propostos



PC→ produto cartesiano, duas etapas de escolha, 8 possibilidades;
C → combinação, três etapas de escolha, 10 possibilidades;
P → permutação, três etapas de escolha, 6 possibilidades;
A→ arranjo, duas etapas de escolha, 12 possibilidades.

Fonte: Lima, 2018, p. 69

Por sua vez, na Figura 2, a título de exemplificação, é apresentado o bloco de problemas probabilísticos relacionado ao problema de permutação – os demais blocos de problemas probabilísticos foram construídos de maneira semelhante: explorando o contexto presente no problema combinatório correspondente, bem como diferentes aspectos de compreensão dos mesmos (relacionados à construção de espaços amostrais, entendimento de correlações, de aleatoriedade e de comparação de probabilidades).

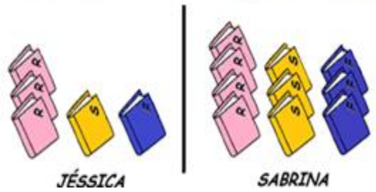
Figura 2 – Problemas probabilísticos propostos (relacionados ao problema de permutação)

(EAP) Liste todas as ordens de leitura que Maria pode escolher com os 3 livros que ganhou de presente.

(COP) Se Maria decidir que vai ler o livro *Senhora* primeiro, os livros *Iracema* e *Lucíola* têm a mesma chance de serem lidos em seguida ou algum deles tem mais chance? Por quê?

(ALP) Maria decidiu jogar um dado para definir qual livro vai ler primeiro. Ela decidiu que se o lançamento tiver como resultado os números 1 ou 2 ela lerá o livro *Lucíola*, se o resultado do dado for 3 ou 4 lerá o livro *Senhora* e se o resultado for 5 ou 6 lerá o livro *Iracema*. Todos os livros têm a mesma chance de ser o primeiro a ser lido ou algum livro tem mais chance de ser sorteado? Justifique.

(CPDP) Jéssica e Sabrina são amigas de Maria e também gostam muito de ler. Jéssica tem 3 livros de romance, 1 de suspense e 1 de ficção científica. Sabrina tem 4 livros de romance, 3 de suspense e 3 de ficção científica. Se elas escolherem um livro ao acaso, quem tem mais chances de ler um livro de romance? Explique.



EAP → espaço amostral de permutação; COP → correlação de permutação;
ALP → aleatoriedade de permutação; CPDP → comparação de probabilidades diferentes de permutação.

Fonte: Lima, 2018, p. 71

Os problemas referentes às situações combinatórias consideradas, distintas entre si em função de seus invariantes de ordem e de escolha (Figura 1), foram elaborados de maneira a possuírem número de etapas de escolha e ordem de grandeza semelhantes (tendo de 6 a 12 possibilidades), considerando-se a diversidade de níveis de escolarização dos participantes do estudo. Assim, ao propor problemas combinatórios com um número de possibilidades relativamente baixo proporcionou-se que o uso de diferentes representações simbólicas/estratégias pudesse levar ao êxito na resolução dos mesmos.

No que diz respeito aos problemas probabilísticos, os problemas de espaço amostral solicitaram a listagem de todas as possibilidades referentes às situações combinatórias abordadas. Destaca-se que a listagem é uma representação simbólica/estratégia que pode surgir espontaneamente na resolução de problemas combinatórios, contudo, ao propor tais problemas de espaço amostral buscou-se levar todos os participantes a utilizarem essa estratégia na busca pelo esgotamento de possibilidades de cada problema combinatório.

Por sua vez, os problemas de correlação buscaram investigar a capacidade dos participantes de perceberem a independência entre os eventos abordados, sendo necessário que esses se desprendessem de preferências e opiniões pessoais ao resolverem tais problemas.

Os problemas referentes ao entendimento da aleatoriedade demandavam, além da compreensão do caráter aleatório das situações dadas, o julgamento da equiprobabilidade dos eventos em questão.

Por fim, os problemas de comparação apresentaram contextos semelhantes aos dos problemas combinatórios correspondentes e demandavam a comparação de probabilidades de eventos distintos, sendo indispensável à consideração do caráter proporcional intrínseco ao cálculo de probabilidades.

Foram realizadas análises quantitativas e qualitativas a partir das áudio-gravações das entrevistas clínicas e do material escrito produzido pelos participantes. No presente artigo, é dado destaque às análises de caráter qualitativo, destacando-se as relações estabelecidas entre o raciocínio combinatório e o probabilístico frente à resolução dos problemas propostos. São apresentadas, para tal, resoluções de participantes e diálogos participante-pesquisadora, a fim de ilustrar tais discussões.

Para a realização das análises quantitativas, aqui apresentadas de maneira mais geral, foram atribuídas pontuações aos problemas combinatórios e de espaço amostral considerando-se o número de possibilidades levantadas, sendo: zero (0) pontos quando menos da metade das possibilidades foi indicada, um (1) ponto quando metade ou mais das possibilidades foi indicada e dois (2) pontos quando houve esgotamento das possibilidades, ou seja, um acerto total.

No que se refere aos demais problemas probabilísticos, dada a natureza distinta dos mesmos em comparação aos acima discutidos, foi atribuído zero (0) pontos quando houve erro, um (1) ponto quando houve acerto com justificativa ausente ou inadequada e dois (2) pontos para acertos com justificativas adequadas.

A análise dos resultados e discussão dos principais achados do referido estudo são apresentadas a seguir com base nos referenciais teóricos anteriormente apontados.

Principais resultados

Ao resolverem os testes propostos, durante as entrevistas clínicas realizadas, os participantes do estudo desenvolvido apresentaram desempenhos totais que variaram entre 2 e 33 pontos (de um total possível de 40 pontos, conforme pontuações atribuídas a cada problema), sendo o desempenho médio igual a 17,16 pontos. Tal resultado alerta para uma grande defasagem no que diz respeito aos conhecimentos combinatórios e probabilísticos desses estudantes da EJA.

As dificuldades que levaram a esse resultado estiveram relacionadas a incompreensões dos invariantes dos problemas combinatórios, ao não desprendimento de preferências pessoais ao levantar possibilidades (já que em problemas escolarizados se espera que todas as possibilidades sejam consideradas e não apenas algumas) e também à dificuldade em justificar as respostas dadas aos problemas probabilísticos.

Um maior entendimento acerca dos desempenhos apresentados é possível a partir da análise dos mesmos em função de diferentes variáveis consideradas no estudo conduzido: 1) o nível de escolarização dos participantes, 2) as diferentes situações combinatórias e probabilísticas abordadas e 3) a ordem de revisitação proposta, isto é, o tipo de teste.

No que diz respeito a primeira variável, foi possível perceber que o desempenho apresentado pelos diferentes grupos de participantes foi influenciado pelo nível de escolarização dos mesmos, tendo os estudantes do Módulo II apresentado desempenho médio de aproximadamente 8,6 pontos enquanto os estudantes do Módulo IV apresentaram desempenho médio de aproximadamente 18,8 e os estudantes da EJA Médio 3 de aproximadamente 24,1 pontos.

Assim, a escolarização, por si só, proporcionou alguns avanços nos raciocínios combinatório e probabilístico dos participantes do estudo. É válido destacar, no entanto, que os desempenhos apresentados foram, no geral, insatisfatórios e melhores médias eram esperadas, especialmente no que diz respeito aos estudantes da EJA Médio 3 (estudantes concluindo a Educação Básica), tendo-se em vista que propostas curriculares voltadas para esse público de estudantes (PERNAMBUCO, 2012) dão destaque a conhecimentos combinatórios e probabilísticos (o que está presente em proporção muito menor nos documentos curriculares voltados para os demais grupos de participantes).

Outra variável que teve grande influência sobre os desempenhos apresentados pelos participantes diz respeito aos diferentes tipos de problema propostos (combinatórios e probabilísticos).

De maneira geral, o melhor desempenho referente aos problemas combinatórios foi observado no problema de produto cartesiano[4], resultado que corrobora os achados de estudos anteriores como os de Pessoa (2009), de Azevedo (2013) e de Lima (2010), realizados com estudantes da Educação Básica em diferentes momentos de escolarização, tendo sido o último deles realizado com estudantes da EJA. Esse resultado pode se dever ao fato de que tal situação combinatória é mais comumente trabalhada em sala de aula desde o início da escolarização.

Por outro lado, o menor percentual de acertos nos problemas combinatórios esteve relacionado à situação de combinação. O mesmo foi observado nos estudos de Pessoa (2009), de Lima (2010) e no de Azevedo (2013) – neste último estudo, antes do processo interventivo desenvolvido. Nesse tipo de situação combinatória a ordem dos elementos não constitui novas possibilidades e, assim, a grande dificuldade ao resolver o problema desse tipo esteve pautada em incompreensões dos invariantes de tal situação (principalmente do invariante de ordem, mas em alguns casos também do invariante de escolha).

Por sua vez, no que se refere às exigências cognitivas da probabilidade, o desempenho dos participantes ao construírem espaços amostrais esteve diretamente relacionado à situação combinatória correspondente[5]. Dessa maneira o maior desempenho foi observado no problema de espaço amostral de produto cartesiano, enquanto o menor desempenho diz respeito ao problema de espaço amostral de combinação.

Quanto aos demais problemas probabilísticos[6], os participantes apresentaram facilidade em identificar a ausência de correlações nos problemas propostos e em compreender o caráter aleatório de eventos dados, mas ao comparar probabilidades diferentes obtiveram desempenho muito baixo, pois, muitas vezes, tomaram por base apenas o número de casos favoráveis, desconsiderando os espaços amostrais ao fazerem tais comparações

[4] Os desempenhos médios observados no que diz respeito aos problemas combinatórios (de um máximo de 2 pontos), foram de aproximadamente 1,2 pontos no problema de produto cartesiano, 0,8 pontos no problema de permutação e também no de arranjo e de 0,3 pontos no problema de combinação.

[5] Os desempenhos médios referentes aos problemas de construção de espaços amostrais (de um máximo de 2 pontos), foram de aproximadamente 1,4 pontos no problema de espaço amostral de produto cartesiano, 1,0 ponto no problema de espaço amostral de permutação, 0,7 pontos no problema de espaço amostral de arranjo e de 0,3 pontos no problema de espaço amostral de combinação.

[6] Desempenhos médios de aproximadamente 4,5 pontos nos problemas de correlação, 3,2 pontos nos problemas de comparação de probabilidades diferentes e de 3,1 pontos nos problemas de aleatoriedade. Considerou-se um máximo de 8 pontos, pois o tipo de situação combinatória correspondente não influenciou diretamente os desempenhos apresentados nesses problemas e, assim, as pontuações dos quatro problemas de cada tipo foram reunidas.

(dificuldade também observada nos estudos de Batista e Francisco (2015), de Santos (2015) e de Lima e Silva (2017)).

Contudo, o grande número de justificativas inadequadas levou a um baixo desempenho nos problemas que exploravam a exigência cognitiva relacionada ao entendimento da aleatoriedade, pois os problemas desse tipo demandavam, também, a explicitação da equiprobabilidade dos eventos em questão.

Essa influência do tipo de problema no desempenho (no que se refere tanto à Combinatória quanto à Probabilidade) reforça que o tipo de situação é um elemento importante na conceitualização por parte dos sujeitos (VERGNAUD, 1986; 1996), não sendo as distintas situações de um mesmo conceito igualmente compreendidas pelos participantes.

A proposição de problemas combinatórios e probabilísticos articulados entre si a partir de revisitações buscou, por um lado, permitir que se investigasse como a resolução de problemas probabilísticos que exploraram as quatro exigências cognitivas ao entendimento da probabilidade (relativas a espaço amostral, correlação, aleatoriedade e comparação de probabilidades) pode influenciar o desempenho apresentado frente à resolução de problemas que abordaram as diferentes situações combinatórias (Teste 1). No sentido oposto, buscou-se investigar, também, como a resolução de problemas combinatórios de diferentes naturezas pode contribuir para a compreensão das exigências cognitivas relacionadas ao raciocínio probabilístico (Teste 2).

Dessa forma, ao estabelecer o foco principal do presente estudo, isto é, as relações que se estabelecem entre os raciocínios combinatório e probabilístico a partir da resolução de problemas articulados entre si, levou-se em consideração, também, o tipo de teste, ou seja, a ordem de apresentação de tais problemas – a terceira variável considerada no estudo.

De maneira geral, o tipo de teste não influenciou diretamente o desempenho dos participantes, havendo uma pequena diferença nos desempenhos médios apresentados: 18,2 pontos para o Teste 1 e 16,2 pontos para o Teste 2. No entanto, a ordem de apresentação dos problemas propostos teve influência qualitativa sobre as relações estabelecidas entre Combinatória e Probabilidade, principalmente a partir da construção de espaços amostrais.

Tal exigência cognitiva, referente à construção de espaços amostrais, é aquela que se relaciona de maneira mais explícita aos conhecimentos combinatórios. A resolução dos problemas referentes a essa exigência cognitiva proporcionou aos participantes o uso de uma estratégia/representação simbólica específica na resolução/revisitação de problemas combinatórios: a listagem de possibilidades.

Em função disso, o tipo de teste teve influência sobre a potencialidade de tais revisitações, pois a ordem de apresentação dos problemas determinou, em certa proporção, as estratégias e representações simbólicas eleitas pelos participantes para resolução dos problemas propostos.

No Teste 1, cada problema combinatório foi resolvido antes do bloco de problemas probabilísticos correspondente (e, consequentemente, antes do problema de espaço amostral). Nesse tipo de teste os problemas de construção de espaços amostrais atuaram como um rico momento de refinamento de respostas, que permitiu que os participantes organizassem as possibilidades já levantadas e reavaliassem os invariantes de ordem e de escolha considerados. Tal revisitação muitas vezes levou a um avanço de desempenho (seja pela descoberta de novas possibilidades, eliminação de casos repetidos ou até mesmo o esgotamento de possibilidades). Um exemplo dessa relação é apresentado nas Figuras 3 e 4 a seguir, que apresentam uma resolução de participante e sua respectiva revisitação a partir da construção de espaço amostral.

Figura 3 – Teste 1 (antes da revisitação): Problema de arranjo resolvido por P17 (EJA Médio 3); enumeração oral; indicação de mais da metade das possibilidades

Fonte: Lima, 2018, p. 121

Ao resolver o problema de arranjo, antes da revisitação, o participante P17 demonstrou compreensão dos invariantes de ordem e de escolha referentes a tal situação combinatória (ver diálogo abaixo). No entanto, não conseguiu esgotar as possibilidades. A não indicação de todas as possibilidades pode se dever ao uso de enumeração oral, estratégia/representação simbólica que dificulta a visualização/organização dos casos já considerados.

Pesquisadora: [...] você já me falou Júlio e Cícero. Desses dois quem vai ser o goleiro e quem vai ser o atacante?

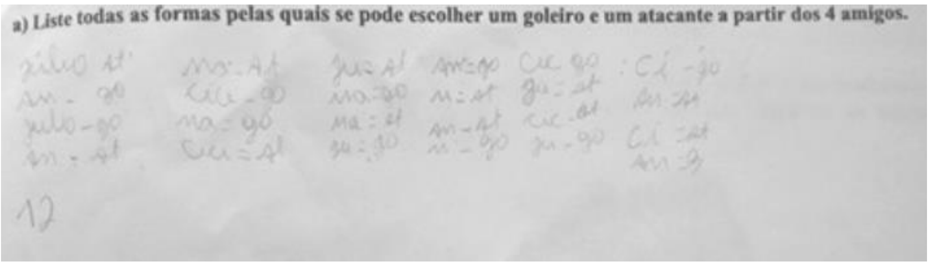
P17: O goleiro vai ser Júlio e o atacante vai ser César...

(indica oralmente outra dupla de rapazes)

Pesquisadora: Quantas formas são possíveis? Duas?

P17: São quatro. ***Pode ser o contrário também****. [...]*

Figura 4 – Teste 1(revisitação): Problema de espaço amostral de arranjo resolvido por P17 (EJA Médio 3); listagem reduzida sistemática; indicação de todas as possibilidades



Fonte: Lima, 2018, p. 122

A partir da revisitação ao problema de arranjo proposta no problema de espaço amostral correspondente (Figura 4) o participante P17 conseguiu registrar, por escrito, as possibilidades já indicadas anteriormente de forma oral e, ao utilizar sistematicamente essas possibilidades indicou novos pares (e seus inversos), chegando ao número de possibilidades referentes ao problema em questão: 12. Para tal, utilizou uma listagem reduzida sistemática que consiste na utilização de abreviações para registro das possibilidades consideradas, bem como das posições a serem ocupadas por cada rapaz no caso do problema de arranjo, por exemplo.

A revisitação, a partir da construção de espaço amostral, auxiliou, assim, o esgotamento de possibilidades, pois facilitou a visualização dos casos inicialmente considerados e permitiu que o participante controlasse, também, a inversão dos pares (visto que na situação combinatória de arranjo a ordem determina possibilidades distintas).

Destaca-se, dessa maneira, que ao se tratar das revisitações propostas no Teste 1, a listagem das possibilidades referentes a cada problema combinatório (solicitada nos problemas de espaço amostral) permitiu que os estudantes que não haviam utilizado tal representação simbólica/estratégia espontaneamente pudessem produzir registro escrito, registro que muitas vezes proporcionou avanços nos desempenhos. Por sua vez, aqueles estudantes que já haviam utilizado a listagem ao resolver os problemas combinatórios puderam rever tais registros e refinar as respostas dadas.

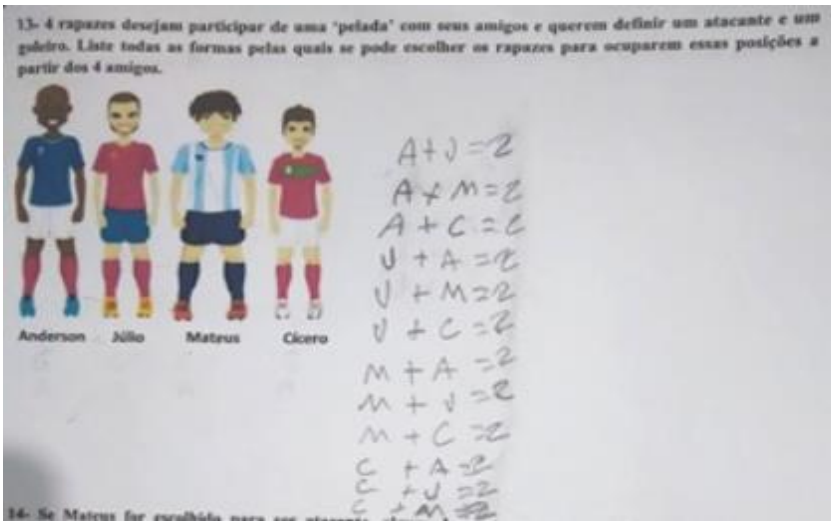
Essa revisitação permitiu, assim, que os estudantes levantassem reflexões acerca dos invariantes de ordem e de escolha das situações combinatórias trabalhadas para buscar esgotar as possibilidades das mesmas.

Essa relação entre os distintos problemas combinatórios e os de construção de espaços amostrais teve efeitos diferentes no que diz respeito à revisitação proposta no Teste 2. Ao resolverem inicialmente as situações abordadas utilizando a listagem, os participantes puderam registrar/organizar os casos indicados já nesse primeiro contato com o problema, beneficiando-se das potencialidades do uso de tal representação simbólica/estratégia já no levantamento inicial de possibilidades referentes às diferentes situações combinatórias consideradas. Isso fez com que grande parte dos participantes que resolveu o Teste 2 tenha resistido a revisitar os problemas probabilísticos sob o olhar da Combinatória. Isto é, muitos participantes, ao resolverem os problemas combinatórios, decidiram apenas repetir o número de possibilidades já obtido a partir do problema de espaço amostral correspondente – isso ocorreu principalmente frente às situações combinatórias nas quais esses participantes apresentaram mais dificuldades, chegando a quase 60% nos problemas de combinação e arranjo[7]. Atribui-se tal resistência ao fato de que os participantes do presente estudo, muitas vezes, não pareciam possuir um repertório de representações simbólicas/estratégias muito amplo (isso é evidenciado a partir do uso majoritário da enumeração oral na resolução dos problemas propostos). Assim, o uso da listagem ao resolver os problemas de espaço amostral levava à melhor resposta que os estudantes eram capazes de construir (sendo esta a primeira resposta dada, no caso do Teste 2).

Destaca-se que isso fez, no entanto, com que muitos estudantes perdessem a chance de ajustar os registros feitos e eliminarem casos repetidos ou descobrirem novas possibilidades, melhorando seus desempenhos. A revisitação às listagens já construídas é um importante momento para refletir sobre os invariantes das situações abordadas, como ilustrado na resolução do problema de espaço amostral de arranjo e revisitação correspondente pelo participante P16 (Figuras 5 e 6). Assim, estudantes que não revisitaram os problemas desse tipo poderiam, por meio de revisitações semelhantes à ilustrada a seguir, ter refinado as respostas dadas, aproximando-se ou até chegando ao esgotamento das possibilidades referentes às diferentes situações combinatórias.

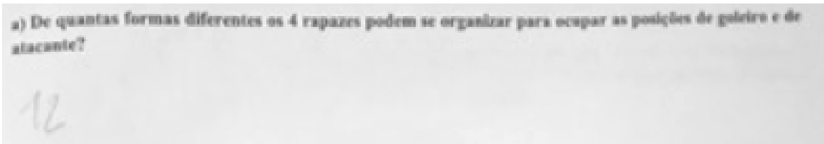
[7] Percentuais de não revisitação no Teste 2: 25% no problema de produto cartesiano, 41,7% no problema de permutação e 58,3% nos problemas de combinação e de arranjo.

Figura 5 – Teste 2 (antes da revisitação): Problema de espaço amostral de arranjo resolvido por P16 (Módulo IV); listagem reduzida sistemática; consideração de casos repetidos



Fonte: Lima, 2018, p. 126

Figura 6 – Teste 2 (revisitação): Problema de arranjo resolvido por P16 (Módulo IV); enumeração oral; indicação de todas as possibilidades



Fonte: Lima, 2018, p. 126

Ao resolver o problema de espaço amostral de arranjo, o participante P16 percebeu que cada dupla de rapazes poderia ser contada duas vezes, pois nesse tipo de situação combinatória a ordem determina novas possibilidades. Isto é, escolher Anderson para ocupar a posição de atacante e Júlio para ocupar a de goleiro é diferente de escolher Júlio para ser atacante e Anderson para ser goleiro, por exemplo. Essa inversão de posição foi representada por P16 a partir da utilização do número dois após cada par de rapazes listado (Figura 5). Posteriormente, P16 indicou os casos invertidos na própria listagem reduzida, esgotando as possibilidades. Por ter colocado o número dois após cada possibilidade, contou, dessa forma, o dobro de possibilidades existentes.

A partir da revisitação à listagem produzida, contudo, conseguiu perceber esse erro e, oralmente, ajustou sua resposta e chegou ao resultado correto (Figura 6):

> *[...] O estudante revisa a listagem e percebe que considerou o dobro de possibilidades.*
>
> *P16: [...] eu já tinha contado duas vezes, pra dizer que tinha trocado. Mas aí eu escrevi de novo (risos).*

Pesquisadora: Tem dupla repetida, então?

P16: 'Tá' tudo repetido! Eu escrevi 24, mas 'é' só 12.

Assim, a articulação entre os problemas combinatórios e as respectivas construções de espaços amostrais proporcionaram importantes contribuições aos raciocínios combinatório e probabilístico dos participantes do estudo (em ambos os tipos de teste, sendo mais favorável, contudo, no Teste 1 – no qual os problemas combinatórios eram resolvidos primeiro e revisitados a partir dos problemas probabilísticos).

É válido destacar, ainda, que a construção de espaços amostrais a partir da listagem de possibilidades é possível e útil quando se trata de problemas com um número de possibilidades não elevado, consistindo, assim, em uma representação simbólica/estratégia viável para a resolução desse tipo de problema.

É imprescindível que, à medida que avancem os níveis de escolarização, o repertório de representações/estratégias dos estudantes seja ampliado para que os mesmos sejam capazes de resolver problemas mais complexos e/ou com maior ordem de grandeza.

No entanto, é necessário enfatizar que foi possível observar, também, relações entre o raciocínio combinatório e o probabilístico a partir das demais exigências cognitivas da probabilidade abordadas, mesmo que estas sejam menos evidentemente relacionadas à Combinatória.

Ao resolverem os problemas que abordaram a exigência cognitiva referente ao entendimento de correlações, os estudantes precisavam deixar de lado preferências pessoais ao avaliar as distintas possibilidades relativas aos problemas combinatórios propostos. Defasagens no raciocínio combinatório foram o que levou estudantes do Módulo II a apresentarem grandes dificuldades nesse tipo problema, pois tiveram dificuldades em considerar as diversas possibilidades de cada situação combinatória às quais os problemas de correlação se referiam. Apresentaram assim justificativas inconsistentes, como "*combina mais*" ao responder problemas desse tipo.

Estudantes dos Módulos IV e da EJA Médio 3, que apresentaram melhores desempenhos ao resolverem problemas combinatórios parecem ter tido maior facilidade em deixar argumentos desse tipo de lado e avaliar corretamente a existência, ou não, de correlações entre eventos.

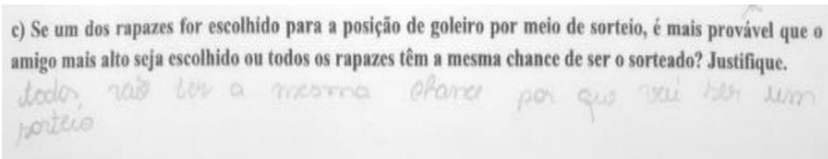
Esse dado alerta, ainda, para o fato de que a resolução e discussão de problemas de correlação pode consistir em uma estratégia de intervenção para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, pois trabalha fortemente com a ideia de possibilidade.

Estudantes que resolveram adequadamente problemas referentes a tal exigência percebem que qualquer elemento poderia ser escolhido/combinado, não existindo (nos problemas propostos) restrições que pudessem se basear em preferências/opiniões pessoais.

Nem sempre essa característica dos problemas combinatórios é facilmente percebida, principalmente por estudantes em início de escolarização e/ou ao se tratar das situações mais complexas, como a de combinação.

No que se refere à exigência cognitiva relativa ao entendimento da aleatoriedade, destaca-se que nos problemas desse tipo propostos no presente estudo trabalhou-se com eventos equiprováveis. Em função disso, resoluções corretas demandavam a consideração dos espaços amostrais abordados, pois ao se afirmar que diferentes eventos teriam a mesma chance de ocorrer, seria necessário, além de se considerar o caráter aleatório dos mesmos, conferir se tais eventos eram equiprováveis. O êxito ao resolver esse tipo de problema estava, assim, também relacionado ao raciocínio combinatório e as dificuldades apresentadas pelos participantes pautaram-se na não evidenciação, nas justificativas apresentadas, da consideração/percepção da equiprobabilidade intrínseca às situações abordadas. O baixo desempenho médio obtido nos problemas de aleatoriedade foi causado justamente pelo grande número de justificativas inadequadas a tais problemas, como a de P13 (Figura 7).

Figura 7 – Problema de aleatoriedade de arranjo resolvido por P13 (Módulo IV); acerto com justificativa inadequada


c) Se um dos rapazes for escolhido para a posição de goleiro por meio de sorteio, é mais provável que o amigo mais alto seja escolhido ou todos os rapazes têm a mesma chance de ser o sorteado? Justifique.

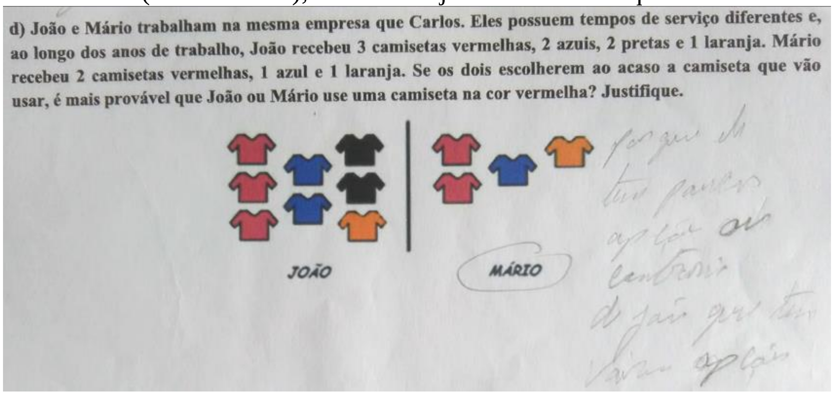
todos vão ter a mesma chance por que vai ter um sorteio

Fonte: Lima, 2018, p. 117

Em sua justificativa, P13 indica compreender a aleatoriedade por trás de um sorteio (dada a imprevisibilidade do resultado), mas toma isso como suficiente para que todos os participantes do mesmo tenham a mesma chance de serem sorteados, o que é preciso se deixar claro que ocorre apenas quando há equiprobabilidade de eventos.

Por fim, a exigência cognitiva referente à comparação de probabilidades diferentes foi aquela na qual os participantes do estudo apresentaram maiores dificuldades (mesmo que o desempenho médio na mesma tenha sido bem semelhante ao apresentado nos problemas de aleatoriedade, foi observado um número muito maior de erros). Como já apontado anteriormente, o baixo desempenho nos problemas que abordaram tal exigência cognitiva se deveu a não consideração do caráter proporcional intrínseco à comparação de probabilidades, pois era preciso que se considerassem todos os eventos possíveis e não apenas as favoráveis ao resolver tais problemas. Essa dificuldade é ilustrada na resolução do participante P19, apresentada na Figura 8.

Figura 8 – Problema de comparação de probabilidades diferentes de produto cartesiano resolvido por P19 (EJA Médio 3); acerto com justificativa inadequada



Fonte: Lima, 2018, p. 118

O participante P19 acertou o problema de comparação de probabilidades diferentes referente à situação de produto cartesiano ao afirmar que Mário tem mais chance de usar uma camiseta vermelha. Contudo, a justificativa apresentada pelo mesmo não leva em consideração as proporções referentes ao número de camisetas de cada rapaz: "[Mário] *tem poucas opções, ao contrário de João que tem várias*". Essa justificativa mostra que a resposta de P19 foi baseada no número total de camisetas de cada rapaz e não reflete, portanto, o caráter proporcional inerente à comparação de probabilidades de forma consistente. Nesse tipo de problema probabilístico era necessário que cada espaço amostral fosse analisado e, posteriormente, fossem comparados para que se chegasse à conclusão correta. Demandava-se, portanto, uma construção de natureza combinatória (relativa a um e a outro espaço amostral) para que tais probabilidades fossem comparadas.

É imprescindível ressaltar a importância da realização de entrevistas clínicas na condução do estudo aqui apresentado. Esse método permitiu que fossem investigadas, de maneira mais detalhada, as concepções dos participantes acerca de conceitos da Combinatória e da Probabilidade, as estratégias/representações simbólicas utilizadas, bem como as dificuldades e incompreensões apresentadas.

O uso desse método de coleta abriu, ainda, espaço para "motivar o sujeito à reflexão, o que não é possível numa situação totalmente padronizada" (CARRAHER, 1998, p. 6), prevenindo que os problemas fossem deixados em branco por insegurança ou resistência por parte dos participantes em resolvê-los, atitudes comuns entre estudantes da EJA.

Isso evidencia a importância da comunicação no incentivo à resolução de problemas, pois questionamentos levantados durante as entrevistas clínicas proporcionaram o surgimento de novas reflexões por parte dos participantes. Defende-se, assim, que a comunicação professor-estudante exerce papel essencial nos processos de ensino e de aprendizagem.

A seguir são apresentadas algumas considerações a partir da retomada dos principais resultados do estudo desenvolvido, bem como são apontadas algumas implicações educacionais do mesmo.

Algumas considerações

A partir das análises aqui apresentadas, foi possível observar contribuições aos raciocínios combinatório e probabilístico que surgem da resolução de problemas que articulam Combinatória e Probabilidade. A articulação proposta nos instrumentos de coleta utilizados se deu por meio da revisitação de problemas combinatórios sob o olhar da Probabilidade (Teste 1) ou, no sentido contrário, de problemas probabilísticos sob o olhar da Combinatória (Teste 2). Essas revisitações proporcionaram que estudantes da EJA aprofundassem seus entendimentos dos problemas já resolvidos a partir da exploração de diferentes aspectos dos mesmos, referentes às distintas situações combinatórias e exigências cognitivas da probabilidade consideradas.

Essa forma de articulação entre tais áreas da Matemática mostrou contribuir para os desempenhos apresentados pelos participantes ao resolverem os diversos problemas propostos. Apresentou-se, assim, como uma estratégia promissora quando se tem em vista o desenvolvimento do raciocínio combinatório e do raciocínio probabilístico, visto que proporcionou que os estudantes reavaliassem suas resoluções aos problemas, repensando os invariantes considerados e refinando e/ou modificando as representações simbólicas utilizadas.

A relação entre problemas combinatórios e probabilísticos é mais explícita no que diz respeito à construção de espaços amostrais (uma das exigências cognitivas da probabilidade). Dada tal relação, a articulação proposta a partir da revisitação de problemas foi qualitativamente mais promissora no Teste 1, no qual problemas combinatórios foram resolvidos inicialmente (a partir do uso de estratégias/representações simbólicas diversas – majoritariamente a partir da enumeração oral das possibilidades) e, posteriormente, dentre as revisitações propostas, foi solicitada a construção do espaço amostral correspondente, isto é, o uso da listagem para registro das possibilidades levantadas. Essa listagem proporcionou a descoberta de novas possibilidades dos diferentes problemas combinatórios, pois o registro escrito facilitou a organização/visualização das mesmas, bem como a avaliação dos invariantes de ordem e escolha considerados, levando, assim, ao refinamento das resoluções aos problemas combinatórios.

As revisitações propostas no Teste 2 também levaram a avanços de desempenho. Contudo, a maior parte dos participantes apresentou resistência em revisitar os problemas probabilísticos à luz da Combinatória, optando pela repetição da resposta dada anteriormente. Assim, perderam a chance de refinar suas respostas, como observado em grande número no que se refere aos participantes que resolveram o primeiro tipo de teste. É válido destacar que quantitativamente não foi observada diferença estatisticamente significativa de desempenho no que diz respeito aos dois tipos de teste em questão.

Por outro lado, conhecimentos relativos à Combinatória e ao levantamento de possibilidades proporcionaram um melhor desempenho frente à resolução dos diversos problemas probabilísticos, que demandavam o desprendimento de preferências pessoais ao resolvê-los, sendo necessária a consideração de todo o espaço amostral para a resolução de problemas que exploraram as demais exigências cognitivas da probabilidade (correlação, aleatoriedade e comparação de probabilidades diferentes).

É válido ressaltar que a instrução escolar específica é de suma importância para o desenvolvimento de ambos os raciocínios aqui tratados – e pode ocorrer, inclusive a partir da articulação entre Combinatória e Probabilidade. A instrução formal deve proporcionar o contato com problemas que abordem as diversas situações combinatórias e as distintas exigências cognitivas da probabilidade, a exploração dos invariantes de cada uma dessas áreas matemáticas (e as relações entre elas), bem como a sistematização de estratégias e ampliação do repertório de representações simbólicas adequadas à resolução de tais problemas.

Defende-se, por fim, que a articulação entre Combinatória e Probabilidade pode beneficiar o desenvolvimento dos raciocínios combinatório e probabilístico na EJA. Os resultados aqui apresentados chamam atenção, ainda, para o fato de que a articulação entre Combinatória e Probabilidade deve ser planejada de maneira que as contribuições da mesma aos raciocínios combinatório e probabilístico sejam potencializadas. É importante destacar, contudo, que o presente artigo não tem por objetivo indicar um tipo ou ordem ideal no que diz respeito à articulação entre conceitos combinatórios e probabilísticos, mas busca elucidar possíveis contribuições dessa articulação, que se mostrou proveitosa em ambas as direções consideradas no presente estudo: Combinatória revisitada sob o olhar da Probabilidade e vice-versa.

Espera-se, dessa maneira, contribuir para o surgimento de reflexões referentes ao ensino da Combinatória e da Probabilidade e às possibilidades de articulação entre tais áreas da Matemática em diferentes níveis e modalidades de ensino. É importante que novos estudos busquem aprofundar essa discussão, explorando diferentes maneiras de articulação entre essas áreas da Matemática, bem como elucidar propostas de ensino que visem o desenvolvimento dos raciocínios combinatório e probabilístico a partir da articulação entre Combinatória e Probabilidade na EJA e em outras modalidades e variados níveis de ensino.

Referências

AZEVEDO, J. *Alunos de anos iniciais construindo árvores de possibilidades: é melhor no papel ou no computador?* Dissertação. Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica. Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2013.

BATANERO, M. C.; GODINO, J.; NAVARRO-PELAYO, V. *Razonamiento Combinatorio.* Madrid: Síntesis. 1996.

BATISTA, R.; FRANCISCO, V. Noções probabilísticas de alunos da EJA. In: *Anais do Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* – 4º SIPEMAT. Ilhéus, 2015.

BORBA, R. Antes cedo do que tarde: o aprendizado da Combinatória no início da escolarização. In: *Anais do Encontro de Combinatória, Estatística e Probabilidade dos Anos Iniciais* – Encepai. Recife, 2016.

BRYANT, P.; NUNES, T. *Children's understanding of probability: a literature review.* Nuffield Foundation. 2012. Disponível em: http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/files/Nuffield_CuP_FULL_REPORTv_FINAL.pdf. Acessado em 26.05.2016.

CAMPOS, T.; CARVALHO, J. I. Probabilidade nos Anos Iniciais da Educação Básica: contribuições de um programa de ensino. In: *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana* – Em Teia, Recife, PE, v. 7, n. 1, 2016.

FISCHBEIN, E. *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht, 1975.

GODINO, J.; BATANERO, M. C.; CAÑIZARES, M. J. *Azar y Probabilidad.* Madrid: Síntesis, 1991.

LIMA, E. *Raciocínios combinatório e probabilístico na EJA: investigando relações.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018.

LIMA, E.; SILVA, A. Conhecimentos matemáticos de estudantes da Educação de Jovens e Adultos: estatística, probabilidade, combinatória e porcentagem. In: *Anais do VII Encontro Pernambucano de Educação Matemática – EPEM.* Garanhuns, 2017.

LIMA, R. de C. *O raciocínio combinatório de alunos da educação de jovens e adultos: do início da escolarização até o ensino médio*. Dissertação. Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica. Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2010.

MORGADO, A.; PITOMBEIRA DE CARVALHO, J. B.; PINTO DE CARVALHO, P.; FERNANDEZ, P. *Análise Combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro: Graftex, 1991.

NAVARRO-PELAYO, V.; BATANERO, M. C.; GODINO, J. Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. In: *Educación Matemática*, v.8, n.1, p. 26-39, 1996.

PERNAMBUCO. *Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco: Parâmetros Curriculares de Matemática - Educação de Jovens e Adultos.* Secretaria de Educação: 2012.

PESSOA, C. *Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio.* Tese. Pós-graduação em Educação. Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2009.

PESSOA, C.; BORBA, R. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. In: Zetetiké: *Revista de Educação Matemática*, Campinas, SP, v. 17, n. 31, *p. 105-150*, 2009.

SANTOS, J. *A produção de significações sobre Combinatória e Probabilidade numa sala de aula do 6º ano do Ensino Fundamental a partir de uma prática problematizadora.* Tese. Pós-graduação em Educação. Universidade São Francisco. Itatiba, 2015.

VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. In: *Análise Psicológica*, v. 1, p.75-90, 1986.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceptuais. In: BRUM, Jean, (org.) *Didáctica das Matemáticas.* Lisboa: Horizontes Pedagógicos, p. 155-191, 1996.

Texto recebido: 26/04/2018
Texto aprovado: 31/10/2018