EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2

http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i1p525-541

Descripción de una experiencia didáctica sobre la integral definida en el marco de un congreso de Educación Matemática

Description of a didactic experience about the integral defined in the framework of the Mathematics Education congress

---

PATRICIA VILA TORRES[1]
CLAUDIA MARIELA ZANG[2]
GRETEL ALEJANDRINA FERNÁNDEZ von METZEN[3]
MARÍA NATALIA LEÓN[4]

Resumen

Se presenta la descripción y análisis de una propuesta de reconstrucción del sentido de la integral definida en los docentes de nivel medio y nivel superior no universitario, llevada adelante bajo la modalidad de taller. El mismo se desarrolló en el marco del Primer Congreso de Educación Matemática realizado en la provincia de Misiones de la República Argentina en agosto de 2017. Las acciones diseñadas e implementadas fueron analizadas siguiendo los lineamientos metodológicos de la Ingeniería Didáctica. Para el análisis posterior se consideró además el estudio de caso. A partir de la reflexión acerca de lo acontecido en dicho taller, se desprende que los participantes tenían ciertas concepciones de la integral definida, que fueron revisadas y/o ampliadas a partir del mismo.

Palabras-clave: *Integral definida-Condiciones de integrabilidad - Ingeniería didáctica – Práctica Reflexiva- Reconstrucción del sentido.*

Abstract

The scope of this work is to present the description and analysis of a proposal based on the reconstruction of the sense of definite integrals, carried out in a workshop. The workshop was held as parts of the First Congress on Mathematics Education which took place in the province of Misiones, Argentina in August 2017. The exercises involved were designed and put into practice following the methodological guidelines of Didactic Engineering. Case study was also considered for subsequent analysis. The outcome of the workshop allowed for the conclusion that the participants had a basic understanding of definite integrals which were subject to revision and further development according to the tasks presented in the workshop.

[1]Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales. UNaM. patryama@yahoo.com.ar
[2]Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales. UNaM. claudiamzang@gmail.com
[3]Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturalrd. UNaM. gretelalefernandez@gmail.com
[4]Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales. UNaM. nleon@fce.unam.edu.ar

Keywords: *Definite integral-Integrability conditions - Didactic engineering - Reflective practice- Reconstruction of meaning*

Introducción

El presente trabajo nace a partir de los resultados obtenidos en la realización de un taller denominado, "La Integral Definida: Varias Miradas" en el marco del Primer Congreso de Educación Matemática para docentes de los diferentes niveles de enseñanza en la provincia de Misiones en el mes de agosto del año 2017.

El taller es el producto de diversas observaciones realizadas por un grupo de profesoras, que se desempeñan en carreras de grado de la Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales (FCEQyN) de la Universidad Nacional de Misiones (UNaM). Las docentes conforman un grupo de investigación, cuya motivación y finalidad es el estudio de los diversos aspectos involucrados en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, más precisamente, el análisis matemático y su didáctica.

En investigaciones anteriores del equipo, se ha logrado identificar los conceptos elementales del análisis matemático que los estudiantes ponen en juego cuando se los enfrenta a situaciones que involucran ecuaciones diferenciales (ED), la intención fue describir en qué medida estos saberes matemáticos básicos son un recurso para los primeros aprendizajes de dicho tema (ZANG, FERNÁNDEZ VON METZEN, LEÓN, 2013).

Actualmente, este grupo lleva a cabo un estudio sobre los obstáculos presentes en el aprendizaje de las integrales múltiples. Nuevamente, tomando como fuente de información las observaciones áulicas y la reflexión de las propias prácticas docentes, tanto en los profesorados en Matemática y en Física, como en las carreras de Ingeniería Química e Ingeniería en Alimentos de la FCEQyN, se ha detectado que los estudiantes suelen emprender la resolución de integrales múltiples recurriendo al uso de la integral definida, y que en general tienden a asociar éste concepto, al cálculo de áreas, a la integración de funciones continuas exclusivamente, y a la aplicación de la regla de Barrow como método de resolución analítica, generándose de este modo una concepción parcial, reducida a lo técnico, de la misma. Esta visión sesgada de la integral definida se puede convertir en fuente productora de dificultades en la adquisición de nuevos saberes asociados en el aprendizaje de integrales en subconjuntos de R^n.

En virtud de esto, se decidió comenzar el armado de alguna propuesta de resignificación que permitiera generar interrogantes sobre el objeto matemático involucrado, más precisamente en la definición de integral definida y las condiciones de integrabilidad que debe cumplir una función para ser integrable en un intervalo $[a, b]$; pues se concibe que un estudio profundo de tales aspectos permitiría una comprensión más cabal del objeto matemático y de su correspondiente generalización a dimensiones superiores.

Teniendo en cuenta que parte de las observaciones realizadas se llevaron a cabo en los profesorados, se consideró apropiado proponer una instancia de trabajo a profesores de nivel medio y superior no universitario, a fin de reflexionar acerca de éste objeto matemático presente en los *curriculum* de ambos niveles. El taller fue concebido para ser desarrollado en un encuentro cuya duración estaba prevista para 4 horas reloj.

Se esperaba que el taller contribuya a movilizar en los docentes una reflexión significativa sobre el objeto matemático problematizado y a su vez, sobre la enseñanza y aprendizaje del mismo, pensando en sus propias prácticas.

En lo que respecta a este trabajo, la discusión se centrará en analizar las respuestas dadas por los participantes del taller, con objeto de identificar y describir procedimientos, concepciones y producciones que emergen de la propuesta didáctica.

Lineamientos teóricos

Se utilizó la Didáctica de la Matemática, más específicamente los lineamientos conceptuales y metodológicos que provee la escuela francesa, como marco teórico para generar las propuestas que se implementaron en el taller antes mencionado. Según este encuadre, el objeto de estudio de la Didáctica de la Matemática es la situación didáctica, entendida como aquella que permite la construcción del conocimiento a través de un problema concerniente a éste y a una cierta disposición del trabajo, de acuerdo a los objetivos pretendidos (BROUSSEAU, 2007).

La postura de Brousseau, principal exponente de la escuela francesa, se vincula con la concepción de Piaget del aprendizaje, puesto que el sujeto que aprende lo hace por adaptación a un medio que es factor de contradicciones, dificultades y desequilibrios (PIAGET, INHELDER, 1960). Otro aporte de la Psicología Cognitiva que se ha considerado relevante para la planificación e implementación de la propuesta, es la teoría de Aprendizaje Significativo de David Ausubel y colaboradores (1983). Desde este enfoque, se asume que los procesos de enseñanza y aprendizaje fomentarían situaciones que involucran a los alumnos en forma activa, favoreciendo la adquisición de nuevos saberes a partir de establecer relaciones con aquellos conocimientos ya incorporados, para su posterior transferencia a situaciones nuevas. En el contexto de esta teoría, es primordial que subsumidores adecuados estén disponibles en la estructura cognitiva de los sujetos. El subsumidor es entendido como un concepto, una idea, o una proposición que ya se ha consolidado en el bagaje de conocimiento del sujeto, y que puede servir a éste como andamiaje para la nueva información, de modo que al relacionarse con la ya existente adquiere un nuevo sentido (AUSUBEL et al., 1983).

Como este taller fue concebido en el marco de una jornada de formación de docentes, se adhiere a la postura de Donald Schön (1983; 1987), quien plantea que un aspecto fundamental de la formación de profesores es la promoción de la reflexión de éstos en y sobre su práctica, es decir, en la acción y sobre la acción. Este proceso reflexivo es lo que caracteriza una buena práctica. La reflexión en la acción es un proceso en el cual se explicita los conocimientos puestos en juego en las acciones realizadas y las consecuencias que se derivan de las mismas. La reflexión sobre la acción es póstuma a la clase, la realiza el profesor en momentos en los que no interactúa con sus estudiantes y con el propósito de efectuar eventuales modificaciones en sus prácticas áulicas. Para Schön (1983), estos procesos reflexivos son esenciales de la formación permanente del docente. El profesor reflexivo confronta sus supuestos y sus creencias, lo cual le permite analizar sus acciones y modificarlas, en caso de ser necesario, de manera consciente.

Lineamientos metodológicos

En líneas generales, la metodología utilizada fue cualitativa: se utilizó el estudio de caso conjuntamente con la Ingeniería Didáctica. Se considera pertinente utilizar el estudio de caso como método de indagación dado que se lo asume como un mecanismo para estudiar un individuo o una institución en un contexto o situación única y de una manera lo más intensa y detallada posible (SALKIND, 1998). Siguiendo a Stake (1994), correspondería a un estudio intrínseco de casos, dado que su propósito es alcanzar la mayor compresión del caso en sí, sin generar ninguna teoría ni generalizar los datos. Se considera que estudios de esta naturaleza, dada su génesis en experiencias y prácticas reales, pueden vincularse con la acción y en consecuencia contribuir a la transformación de las prácticas. En cuanto a la Ingeniería Didáctica, ésta plantea un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase bosquejadas a partir de un trabajo de “concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza”. El proceso de la Ingeniería que se adoptó en la elaboración del taller, permitió ordenar la propuesta considerando las cuatro fases planteadas: análisis preliminar, concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería, experimentación y finalmente análisis a posteriori y evaluación. La validación es interna, y se da a través de la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori (ARTIGUE, 1995).

Contexto educativo y objetivos pretendidos

El taller fue pensado para ser desarrollado en un encuentro de 4 horas reloj de duración, bajo la modalidad grupal y cuyo propósito fue problematizar la definición de integral definida y generar interrogantes en los participantes sobre los diferentes aspectos que involucra el objeto matemático.

Inicialmente se implementó una encuesta con el fin de caracterizar la población participante del taller. En la misma se solicitó datos en forma anónima e individual, en relación a la edad, sexo, título de formación, institución que otorgó el título, antigüedad docente, nivel educativo en el que se desempeña, etc.

Seguidamente se implementó el trabajo grupal con las consignas pensadas para el taller, desarrolladas en diferentes momentos didácticos. Luego de cada consigna y de un tiempo prudencial de 30 minutos aproximadamente, se llevaron a cabo puestas en común parciales donde se propició la participación activa de los participantes, mediadas por los talleristas.

Análisis y discusión de los resultados.

Resultados de la Encuesta.

En el taller participaron 60 personas, la edad promedio de los mismos fue de 32 años con un predominio del sexo femenino (58,3%). El 8% eran alumnos de nivel superior o carreras universitarias, el resto docentes egresados de la universidad y/o de carreras terciarias. Un 43,3 % posee título universitario, en su mayoría profesores de Matemática recibidos en la FCEQyN-UNaM. De los títulos terciarios predominó el Profesor de Educación Secundaria en Matemática, otorgado por el Instituto Superior Antonio Ruiz de Montoya, de gestión privada de la ciudad de Posadas.

Los docentes, en su mayoría, ejercen la docencia en el nivel secundario y enseñan Matemática, solo 4 personas ejercen la docencia universitaria. La antigüedad docente de los mismos, en promedio es de 7,5 años, con un valor mínimo de 1 año y un máximo de 25.

Propuesta, análisis preliminar y observación de la implementación.

Como parte de la fase de análisis preliminares de la Ingeniería, se estudió el objeto matemático integrales definidas desde bibliografía específica diversa y se consultaron investigaciones de índole educativa referidas al tema.

En este apartado se presentan las consignas trabajadas y paralelamente, para cada una de ellas, un análisis a priori y posteriori y su correspondiente triangulación.
Finalizada la encuesta, se les proporcionó a los participantes la primera consigna, tal como se muestra en la figura 1.

Figura 1: consigna introductoria presentada a los participantes del taller

Consigna 1: ¿Qué nociones tiene de "la integral definida"? Tómese unos minutos para escribir sus ideas y luego compartirlas con los demás integrantes del curso.

Fuente: Los autores

En la confección de esta consigna, se pensó que la misma podría propiciar que los participantes recuperen desde sus experiencias previas, información vinculada al objeto de integral definida, como herramienta de análisis y discusión para las consignas posteriores. Posibilitando de esta manera establecer relaciones entre la información nueva que se pretendía construir a lo largo del taller, con la ya existente en su estructura cognitiva, de acuerdo a las premisas de aprendizaje significativo.

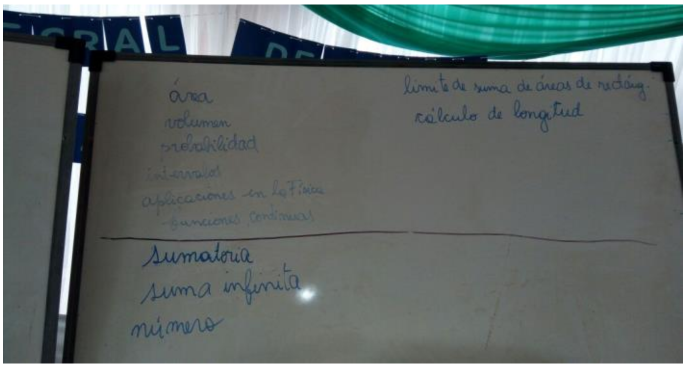
Análisis a priori.

En el análisis a priori realizado por el equipo a cargo del taller se esperaba que entre las respuestas dadas por los participantes se mencionen las ideas relacionadas a las siguientes: área, suma de áreas de regiones, suma inferior y superior, función continua, la integración como operación inversa a la derivada, suma de Riemann, aproximación por suma de áreas de rectángulos, límite de una suma, regla de Barrow, primitiva, el valor absoluto de la integral para la obtención de área, función acotada, función monótona, partición del intervalo de integración, entre otras.

Procedimientos emergidos en la puesta en práctica.

Cabe aclarar que el insumo de tiempo utilizado por los participantes para pensar esta consigna fue de aproximadamente cinco minutos, ya que escribieron rápidamente sus ideas en papel, y luego las compartieron oralmente con el resto de los integrantes del taller. Las mismas se registraron en un pizarrón tal como se puede apreciar en la fotografía mostrada en la figura 2.

Figura 2: Nociones expresadas oralmente por los participantes para la consigna 1.



Fuente: Los autores.

Dentro de las respuestas dadas se observa que predominan las siguientes ideas: las aplicaciones de la integral definida (área, volumen, probabilidad, longitud y aplicaciones físicas), el término de suma, suma infinita, el límite de una suma de áreas de rectángulos, función continua y también la integral definida como un número.

Contraste con análisis previo

De la contrastación de los análisis a priori y posteriori, es posible detectar en principio una determinada tendencia a asociar a la integral definida con el concepto de área y otras aplicaciones, en segundo lugar, a relacionarla con los términos de sumatoria asociados con el proceso propio de construcción de la integral definida y de las motivaciones geométricas que tiene la misma.

Si bien en esta primera instancia de trabajo emerge el término de sumatoria, en ningún momento, se la explicita como suma de Riemann, tampoco se menciona la regla de Barrow, y menos aún surge como respuesta las condiciones que debe cumplir una función para ser integrable, como por ejemplo el concepto de función acotada.

Desde el equipo de investigación se tenía presente que, a pesar de que la primera consigna era propicia para poner de manifiesto las ideas presentes en los participantes sobre el objeto matemático en estudio, la misma no era suficiente para determinar aquellos aspectos vinculados a la definición de integral definida, según Riemann, es por ello que se pensó en la consigna 2, tal como se la presenta en la figura 3

La riqueza de esta consigna reside en presentar diferentes casos de funciones definidas en determinados intervalos o tramos, de manera que cada uno de los mismos permita problematizar cuándo una función es integrable según Riemann, y de las condiciones que se deberán cumplir para que exista la integral definida.

Algunas de las preguntas que orientaron el análisis son: ¿La función tiene que estar definida en el intervalo? ¿Siempre? ¿Qué pasa si no es así? ¿Qué ocurre si la función no es continua? ¿Es suficiente analizar la continuidad para establecer si la función es integrable? ¿Es necesario que la función esté acotada? ¿Siempre?

Figura 3: Consigna propuesta para la discusión sobre condiciones de integrabilidad

Consigna 2: Para cada uno de los siguientes casos, ¿Cree usted que la función $f(x)$ es integrable, según Riemann, en el intervalo dado? Explique su respuesta.

Caso 1 $\quad f(x) = \frac{1}{x} en [1,7]$

Caso 2
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ 0 \leq x < 1 \\ 2 & si x = 1 \\ x+2 & si\ 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Caso 3
$$fx) = \begin{cases} x^2 & si\ 0 \leq x < 1 \\ x+2 & si\ 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Caso 4
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & si x \neq 0 \\ 0 & si x = 0 \end{cases} \quad \text{en } [0,1]$$

Fuente: Los autores

En el caso 1 se planteó una función continua, en el caso 2 se propuso una función definida por partes, discontinua en un punto en el cual existe la imagen. En el caso 3 se presentó también una función definida por partes, discontinua en un punto pero en el cual no existe la imagen y, en el último caso, se trata de una función definida por partes, discontinua en un punto que posee imagen, pero que para un entorno del mismo la función no está acotada.

Análisis a priori.

Caso 1

Se esperaba que los participantes, al analizar que la función es continua en [1,7], probablemente dirían que es integrable; otra posibilidad es que recurrirían a la aplicación de la regla de Barrow y al obtener un resultado, concluyan que es integrable; también podrían valerse del grafico de la función f(x) en el intervalo dado y al observar que la región comprendida entre la función $f(x)$, el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 7$, es positiva, calcular el área por integrales definidas y por lo tanto decir que es integrable. Como último procedimiento se pensó también en el uso de la suma de áreas de rectángulos como aproximación al cálculo del área de la región y esto conduciría a afirmar que es integrable.

Caso 2

A diferencia del caso anterior la función dada está definida por partes, podrían de una simple inspección de la misma ver que es discontinua en $x = 1$ y decir que no es integrable. También podríanhacer uso del grafico de la función, y al ver que hay una discontinuidad en $x = 1$, decir que no es integrable. Otro posible procedimiento podría consistir en particionar el intervalo dado en dos subintervalos y plantear dos integrales, una de 0 a 1 y otra de 1 a 2, aplicar la regla de Barrow y al obtener un resultado, concluir que es integrable. Otra alternativa de resolución consiste en determinar que la función es integrable, al identificar que la misma es acotada y discontinua con salto finito.

Caso 3

La función dada en este caso es muy parecida a la precedente, salvo que no está definida en $x = 1$, por tanto podrían pensar que no es integrable por ser discontinua como el caso anterior o porque la función no está definida en el punto. Otro posible procedimiento podría ser particionar el intervalo dado en dos subintervalos y plantear dos integrales, una de $x = 0$ a $x = 1$ y otra de $x = 1$ a $x = 2$, aplicar la regla de Barrow y al obtener un resultado numérico, concluir que es integrable. Al igual que en el caso anterior, los participantes podrían determinar que es integrable, al tratarse de una función acotada y discontinua con salto finito.

Caso 4

Este caso presenta una función definida por partes, con la particularidad de que para $x = 0$, está definida y sin embargo para valores cercanos a cero crece indefinidamente. Los participantes podrían pensar que no es integrable por la simple observación de la discontinuidad en $x = 0$, otros podrían graficar y observar que la función no está acotada, por tanto no es integrable. También podrían querer aplicar la regla de Barrow de $x = 0$ a

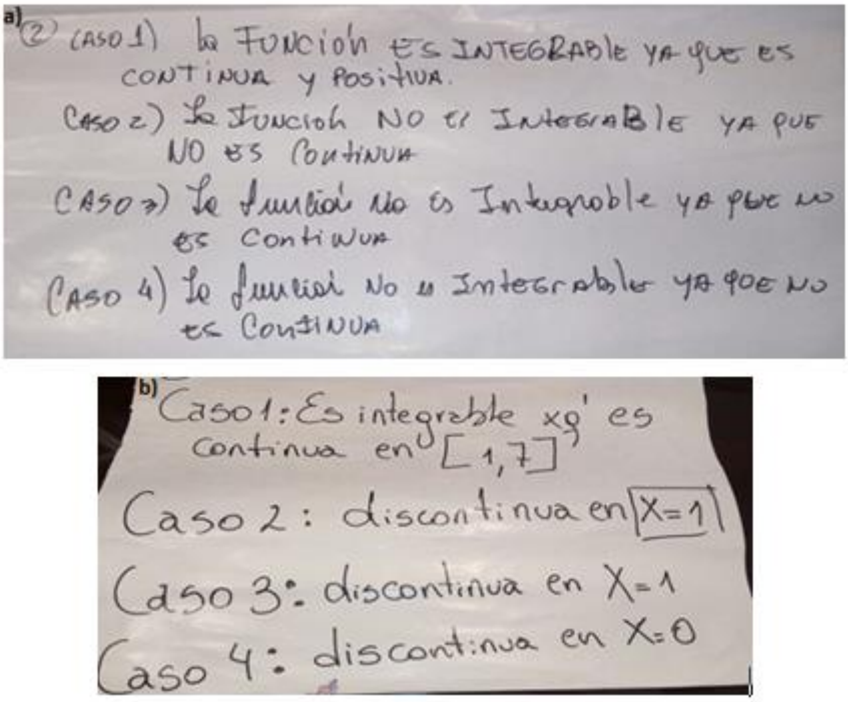
$x = 1$, pero al no poder determinar el logaritmo natural de 0 (dado que la primitiva de la función presente en el integrando es el logaritmo natural), concluir que la función no es integrable.

Procedimientos emergidos en la puesta en práctica.

A partir de las respuestas dadas por los diferentes grupos, se observó que la mayoría arribó a la conclusión de que el único caso donde la función es integrable es el correspondiente al dado en el caso I, ya que la condición de continuidad fue considerada como una condición necesaria para la integración de la función en el intervalo dado.

Para ilustrar esta concepción se tomaron las producciones de dos grupos que se muestran en las figuras 4 a) y b).

Figuras 4 a) y b). Condición de continuidad considerada por los participantes como una condición necesaria para la integración de la función en el intervalo dado.



Fuente: datos de la investigación

Contraste con análisis previo.

Contrastando las respuestas de los diferentes grupos con el análisis previo, podemos decir que casi ninguno de los posibles procedimientos previstos salió como esperábamos, pues la regla de Barrow no emergió en ningún caso, excepto en un solo grupo que lo utilizó para el caso 4 y frente a la imposibilidad del cálculo, lo descartaron como procedimiento de resolución. Algunos participantes graficaron la función pero no hubo intentos de aproximar el cálculo de la integral por suma de áreas de rectángulos. Tampoco surgió en ninguno de los grupos el concepto de función acotada, ni el de monotonía, como condiciones valiosas para el estudio de la integrabilidad de funciones.

Si bien en el análisis previo de la actividad se esperaba con certeza que dieran como integrable la función dada en el caso I, no fue predecible que la justificación a sus respuestas estuviera fundada solamente en la condición de continuidad de la función en el intervalo dado. Durante la puesta en común, los docentes a cargo del taller trataron de poner en duda la asociación tan fuerte que se apreciaba en los participantes entre continuidad e integrabilidad. Por ello, se presentó la consigna 3, que se expone en la figura 5.

Figura 5. Definición de integral analizada en el taller

Consigna N°3: Teniendo en cuenta la definición de integral definida, presentada en el texto de **Claudio Pita Ruiz "Cálculo de una variable" (pág.552)**, analizar las conclusiones extraídas en la consigna N°2 y reverlas.

1) No consideraremos exclusivamente funciones continuas y no negativas en el intervalo $[a, b]$,

2) No consideraremos particiones del intervalo $[a, b]$ en subintervalos del mismo tamaño.

Tomando una partición P arbitraria del intervalo $[a, b]$, digamos $P = \{a, x_1, \dots, x_{n-1}, b\}$, llamaremos **Norma de la partición** P, que denotaremos $\|P\| = max\{\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1,2, \dots, n\}$.

En cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de la partición P de $[a, b]$, tome un punto arbitrario $\varepsilon_i \in [x_{i-1}, x_i]$ y forme el producto $f(\varepsilon_i)\Delta x_i$. Consideremos la suma de todos estos productos y observe que la misma depende de la partición P y de la elección que hayamos hecho en cada subintervalo del punto ε_i. Escribimos la suma mencionada como $S(P) = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\, \Delta x_i$.

Esta suma es llamada **Suma de Riemann** de la función f asociada con la partición P del intervalo $[a, b]$. Si consideramos particiones P cuya norma sea cada vez más pequeña, y nos fijamos en el comportamiento de las sumas de Riemann $S(P)$, es posible que éstas tengan algún límite determinado.

Definición: Sea $y = f(x)$una función dada definida en I⊆R. Se define la integral definida de $f$en el intervalo$[a, b] \subseteq$ I, denotada por $\int_a^b f(x)dx$ (se lee integral definida de la función f(x) de a a b) como el límite de las sumas de Riemann de f asociadas con particiones$P$ de$[a, b]$cuando la norma de éstas tiende a cero, es decir:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$$

En el caso del que el límite exista, se dice que la función f es integrable según Riemann (o bien, que es Riemann - integrable, o bien, simplemente que es integrable) en el intervalo $[a, b]$.

Fuente: datos de la investigación

Análisis a priori:

Caso 1:

Se esperaba que a partir del estudio de la definición, los participantes logren determinar que la función dada cumple con lo estipulado por la misma, es decir que la función está definida en el intervalo $[1,7]$y el límite de la suma de Riemann siempre va a existir para cualquier partición y punto arbitrario $\varepsilon_i \in [x_{i-1}, x_i]$ que se considere.

Caso 2:

En este caso la función dada presenta un punto de discontinuidad de salto finito, se pretendía que al confrontar con la definición, los participantes se dieran cuenta que a pesar de esta singularidad, la función está definida en todo el intervalo y el límite de la suma de Riemann siempre va a existir para cualquier partición y punto arbitrario $\varepsilon_i \in [x_{i-1}, x_i]$ que se considere.

A partir de este segundo momento de análisis y de trabajo grupal, se esperaba avanzar en la revisión de los esquemas conceptuales presentes en la estructura cognitiva de los participantes (de acuerdo a las premisas del aprendizaje significativo). Específicamente en lo que respecta al hecho de que la integrabilidad de una función admite condiciones más amplias y no solo restringidas a la continuidad de las funciones.

Caso 3:

Al igual que el caso anterior, la función dada presenta una discontinuidad de salto finito, con la particularidad de no estar definida en el punto en cuestión, se esperaba que al confrontar con la definición, los participantes afirmaran que la función no es integrable, ya que si ese punto es considerado como punto arbitrario $\varepsilon_i \in [x_{i-1}, x_i]$, no sería posible construir la suma de Riemann.

Por otra parte, se pretendía que cuestionaran la validez o no de la integrabilidad, más allá de que la función no esté definida en ese punto, único aspecto que la diferencia del caso anterior, es decir, pensar si alguna de las características que presenta la función permite su integrabilidad, como ser el hecho de estar acotada, de ser una función monótona a trozos, etc.

A su vez, se pretendía que el caso analizado funcione como un disparador para problematizar las definiciones sobre integral definida que aparecen en la bibliografía del tema abordado.

Caso 4:

La función dada para este caso presenta una discontinuidad de salto infinito en el punto $x = 0$, sin embargo, está definida en el mismo. La complejidad de este caso respecto a los dos anteriores radica en el hecho de que para valores cercanos a cero la imagen de la función crece indefinidamente. Se esperaba que los participantes, al confrontar con la definición, pudieran determinar la no existencia del límite de la suma de Riemann y por consiguiente decir que no es integrable.

El hecho de que la función no esté acotada, podría ser una justificación de la no integrabilidad y al mismo tiempo pueda ser un insumo para repensar las respuestas anteriores.

Procedimientos emergidos en la puesta en práctica.

A partir del trabajo con esta consigna, se modificaron muchas de las respuestas dadas por ellos en la consigna anterior. Esto se ejemplifica con las producciones de cuatro grupos, las que se muestran en las figuras 6 a), b), c) y d).

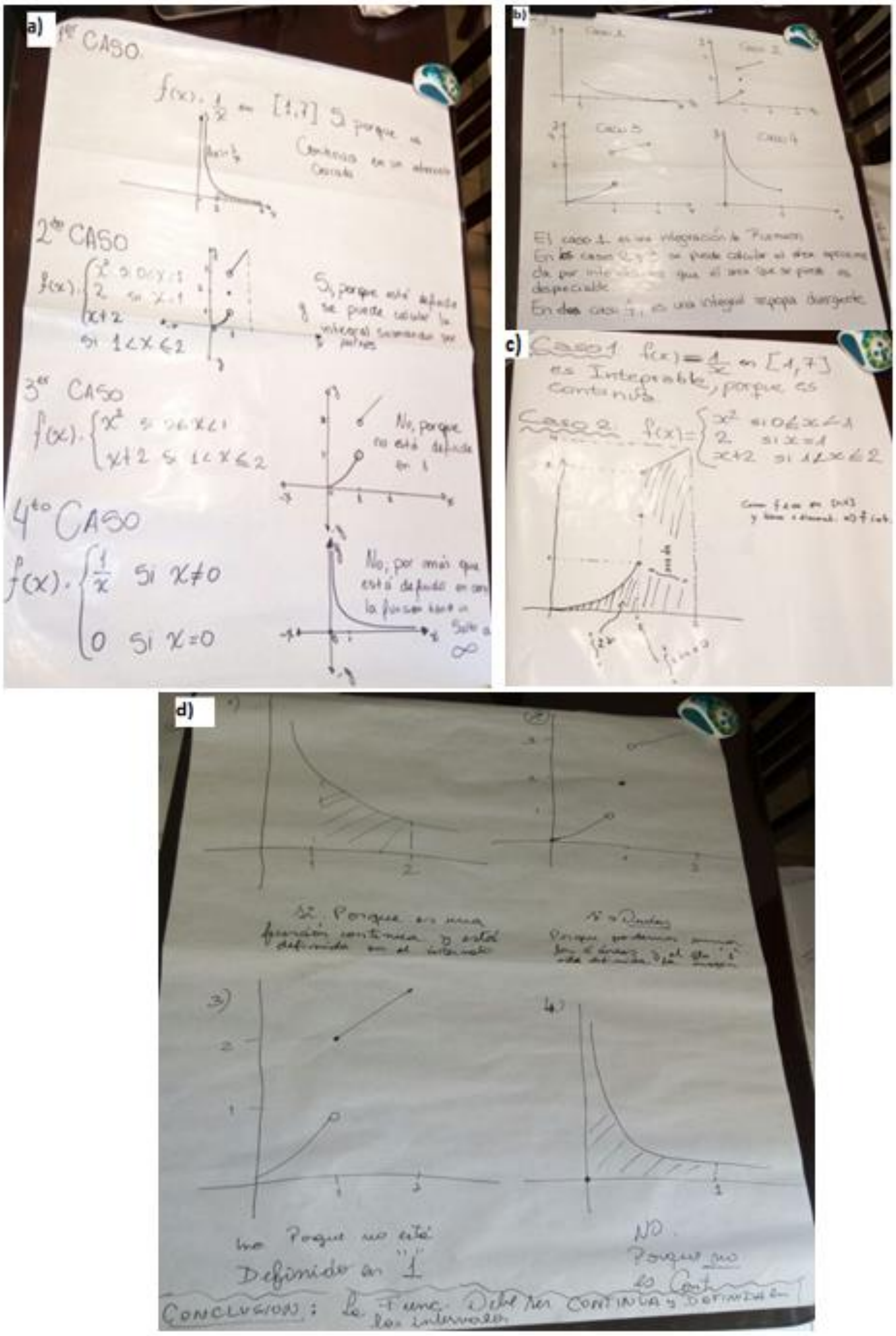
En relación al Caso 1, su respuesta no se modificó en cuanto a que la función era integrable, pero si los argumentos utilizados para justificar la integrabilidad, los cuales se basaban en el cumplimiento de lo planteado por la definición.

Para el Caso 2, revisaron la respuesta dada anteriormente y determinaron que la función es integrable, si bien la justificación no fue basada en el cumplimiento de los términos que plantea la definición, se dieron argumentos tales como: poder particionar el intervalo en dos y armar la suma de áreas de rectángulos, aclarando que esto es posible por el hecho de que la función está definida en $x = 1$, otro grupo implícitamente afirma que por ser una función acotada y tener una sola discontinuidad, es integrable. Cabe aclarar que esto último se infiere de la notación que se observa en la figura 6, aun cuando la simbología utilizada no es adecuada.

Si bien en el Caso 3 muchos grupos mantienen la no integrabilidad de la función, sus argumentos cambian aludiendo a cuestiones como que la función no está definida en $x = 1$, otros la consideran integrable por el hecho de particionar el intervalo en dos y poder determinar el área de las regiones por aproximación de sumas de áreas de rectángulos, aclarando que el área que se pierde, es despreciable, por la no existencia de la imagen en el punto.

Finalmente, para el Caso 4, se presentaron modificaciones en los argumentos para justificar la no integrabilidad, tales como: la función crece indefinidamente o presencia de discontinuidad de salto infinito.

Figuras 6 a), b), c) y d) Producciones presentadas por cuatro grupos de participantes en respuesta a la consigna Nº 3



Fuente: datos de la investigación

Contraste con análisis previo

El hecho de tener una definición de la integral de Riemann les permitió poner en dudas las respuestas dadas en la consigna 2 y que las mismas a su vez no estuvieran basadas solamente en el supuesto de continuidad.

Se observa que las justificaciones a sus respuestas no buscan verificar rigurosamente o no el cumplimiento de lo que plantea la definición, el uso del lenguaje matemático simbólico es muy pobre e incorrecto en ocasiones.

No surgió a partir del caso 3 lo que esperábamos en cuanto a la problematización de la definición dada, planteado en el análisis previo. Creemos que algunas cuestiones que pueden haber influido en esto, es el hecho de contar con una sola definición para el análisis de los casos, el tiempo dado para el desarrollo de la consigna, para la puesta en común y para el cierre de la jornada.

Figura 7. Última consigna presentada como cierre del taller

Consigna 4:

Para seguir pensando:

Demuestre que la siguiente función no es integrable:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x\ es\ racional \\ 0 & si\ x\ es\ irracional \end{cases}$$

Fuente: datos de la investigación

Al culminar las actividades dadas y antes de cerrar el taller se les dejó la consigna presentada precedentemente en la figura 7, para que siguieran pensando en las condiciones de integrabilidad:

Se pretendían varias cuestiones con esta consigna, por un lado, que al querer aplicar la definición dada, se dieran cuenta que no es posible la existencia del límite de la suma de Riemann para cualquier partición y para cualquier punto arbitrario $\varepsilon_i \in [x_{i-1}, x_i]$, ya que esta suma puede adquirir los valores 0 o 1, sin importar que tan pequeño sea la norma de la partición.

Por otro lado, que a pesar de ser una función discontinua de salto finito y estar acotada, no es integrable y lo distintivo de esta función (infinitos saltos de discontinuidad) pudiera hacerlos reflexionar sobre las diferencias existentes entre esta y las situaciones planteadas en los casos 2 y 3.

Reflexiones finales

- Lo observado en el desarrollo del taller respecto a la internalización de la condición de continuidad para la integrabilidad de una función, en los participantes, nos lleva a cuestionarnos como docentes las prácticas de enseñanza y aprendizaje de esta temática en los cursos de análisis matemático impartido en los profesorados. Se asume, de acuerdo a lo expresado por Schön (1983), que estas prácticas pueden enriquecerse en la medida en que se reflexione en y sobre ellas.
- Por otro lado, la postura del libro puede condicionar el aprendizaje de nuevos saberes, a partir de las definiciones dadas. Ello implicaría cuestionar si lo que está dicho en la definición, contempla todos los casos o no, pudiendo haber otros que quedan fuera de la definición tomada y sin embargo ser funciones integrables.
- De lo analizado, surge que la gestión de las actividades y consignas por parte de los docentes no es una cuestión menor, dado que no siempre las mismas permiten lograr la reflexión sobre lo que se está haciendo (reflexión en acción) y generar la inquietud de seguir indagando en las posibles causas de lo acontecido (reflexión sobre la acción). Si bien en este taller, se observó una actitud muy positiva por parte de los participantes en cuanto a las actividades propuestas y a los objetivos pretendidos por las mismas, se notó escasa tendencia al cuestionamiento de los saberes ya incorporados y a los generados en el mismo taller, por lo que pensamos que este tipo de propuesta fomenta el desarrollo del pensamiento crítico que debemos incorporar los docentes, de cualquier nivel, de manera que nuestras propuestas permitan a los alumnos desarrollar ideas menos cerradas y más condicionadas, en su validez, de acuerdo a diferentes casos que sean posible de plantearse.

Bibliografía

ARTIGUE, M (1995). Ingeniería Didáctica. En ARTIGUE M., DOUADY R., MORENO L., GÓMEZ P., *Ingeniería Didáctica para la Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas*. México. Grupo Editorial Iberoamérica.

AUSUBEL D., NOVAK J., HANESIAN H. (1983) "*Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo".* Segunda edición. México. Editorial Trillas.

BROUSSEAU G. (2007) *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires. Editorial Libros del Zorzal.

PIAGET J., INHELDER B. (1960). *Psicología del niño*. Octava edición. Madrid. Ediciones Morata.

SALKIND N. (1998). “*Métodos de Investigación*”..México. Editorial Prentice Hall

SCHÖN, D.A. (1983) *The Reflective Practitioner: how professionals think in action*. New York. Basic Books.

STAKE R. E. (1994). *Case studies*. En N. K. DENZIN, Y. S. LINCOLN (Dirs.) Handbook of cualitative research, pp. 236-247.

ZANG C., FERNÁNDEZ VON METZEN G., LEÓN N. (2013). *Un estudio de los errores de alumnos de ingeniería sobre ecuaciones diferenciales*. Revista Educação Matemática Pesquisa. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.15, n.1, pp.83-100

Texto recebido: 04/05/2018
Texto aprovado: 16/04/2019