Triângulos Diferentes: Dos Planos Aos Geodésicos

Different triangles: from plans to Geodesics

JOSÉ CARLOS PINTO LEIVAS[1]
MARIA TEREZA CARNEIRO SOARES[2]

Resumo
O trabalho apresenta um recorte da tese de doutorado do primeiro autor, ilustrando um exemplo de possibilidade de geometrizar o currículo da Licenciatura em Matemática. Entendemos que a imaginação, intuição e visualização oferecem muitas possibilidades de abordar geometricamente diversos conceitos matemáticos que, muitas vezes, priorizam aspectos algébricos a geométricos. Recursos da Geometria Diferencial e da Geometria Analítica, desenvolvidos de forma imaginativa, intuitiva e visual, podem ser empregados como método para obtenção da soma dos ângulos internos de um triângulo numa superfície esférica, cuja soma é igual a 270º. São caracterizadas as geodésicas da superfície esférica e, por meio de analogias intuitivas estabelecidas com as retas no plano, são constituídos os lados do triângulo. O presente trabalho não tem por objetivo apresentar resultado de uma pesquisa em específico e sim dar uma possibilidade de uso das habilidades mencionadas em disciplinas da formação de professores de Matemática.
Palavras-chave: Triângulo geodésico. Retas e Geodésicas. Geometria Elíptica.

Abstract
This paper presents a cut of the doctoral thesis of first author, illustrating an example of the possibility of geometrizes the curriculum of the degree in Mathematics. We understand that imagination, intuition and visualization offer diversity of possibilities to approach mathematical concepts geometrically, that many times, prioritize algebraic aspects the geometric. Features of Differential Geometry and Analytical Geometry, developed of imaginative, intuitive and visual form, they can be used as method for attainment of the addition of the internal angles of a triangle in a spherical surface, whose addition is equal 270º. The geodesic of spherical surface are characterized and by means of established intuitive analogies with the straight lines in the plan and they constitute the sides of the triangle. This paper does not aim to present results of a survey in particular, but give a chance to use the skills mentioned in the disciplines of mathematics teacher education.
Keywords: Geodesic triangle. Geodesics and straight lines. Elliptic Geometry.

[1] Centro Universitário Franciscano – leivasjc@yahoo.com.br
[2] Universidade Federal do Paraná – marite@brturbo.com.br

Introdução

Educação Matemática é uma área que busca uma identidade própria e tem se consolidado, a cada dia, a partir de pesquisas que fornecem subsídios, especialmente no que diz respeito aos processos de aprendizagem, para os professores que atuam em diversos níveis de escolaridade (FREUDENTHAL, 1973; KILPATRICCK, 1996; BISHOP, 2002).

Acreditamos que muitos estudos e pesquisas foram e são realizados para a Escola Básica, mas que ainda não há um número suficiente de pesquisas em termos de Educação Matemática voltadas ao Ensino Superior, mais diretamente, pesquisas que envolvam a Matemática e seus processos de ensino voltados à formação do professor dessa área do conhecimento. Indo mais além, pouco ou quase nada existe, em termos nacionais, voltado ao ensino de Geometria para formação do professor que atuará nesse nível de escolaridade, uma vez que, na formação do professor, em geral, é desenvolvida uma matemática de alto nível, muitas vezes, sem conexões com os conteúdos que os futuros professores irão ensinar futuramente.

Nesse sentido, este trabalho, que resulta de um recorte da tese de doutorado do primeiro autor, sob a orientação da segunda autora, apresenta uma contribuição sobre a possibilidade de, sem alterar o currículo da formação de professores de Matemática com criação de novas disciplinas, serem introduzidas abordagens e conceitos geométricos mais recentes de conhecimentos matemáticos, além daqueles que usualmente são desenvolvidos nos diversos currículos, a saber , um curso de Geometria Plana, um curso de Geometria Espacial, usualmente na forma dedutiva, um curso de Geometria Analítica, o qual, na maioria das vezes, é desenvolvido de forma prática ou algorítmica, priorizando a Álgebra em detrimento da Geometria. Em geral, ainda não estão incorporados conceitos de Geometria Fractal e de Geometrias Não Euclidianas, por exemplo, como pode ser detectado em levantamento realizado em oito universidades gaúchas e que constam da referida tese, além de outros.

Cabe aqui destacar ao leitor que o presente trabalho não tem por objetivo apresentar resultados da pesquisa que deu origem à tese de doutorado e, por esse motivo, não é apresentada a metodologia de pesquisa correspondente. Este é um ensaio teórico de uma possibilidade de inserção no currículo de um conteúdo que ainda não está, na maioria das vezes, inserido na formação profissional de professores de Matemática, muitos dos quais ainda desconhecem a existência de triângulos não euclidianos, por exemplo. Além disso, por ser um ensaio teórico, o mesmo não foi aplicado a nenhum grupo em particular, o que corresponderia a um novo trabalho investigativo, não pretendido nesse momento.

Entendemos que um caminho para inovar em reformulações curriculares seria um auxílio visual geométrico, o qual pode percorrer a Geometria numa interligação entre os diversos saberes, ou seja, uma interdisciplinaridade. O conceito de interdisciplinaridade referido é aquele indicado por Gusdorg (citado por Pombo, 1993), de que "inter" não significa uma pluralidade ou uma justaposição, muito pelo contrário, faz uma chamada a um espaço comum, um elemento de coesão entre diferentes saberes. A interdisciplinaridade supõe a predisposição de especialistas se abrirem para o novo, de irem além do seu domínio de conhecimento específico, permitindo uma abertura de pensamento e de curiosidade, o que é relativamente difícil no ensino superior, com suas especialidades e especialistas. Assim, a interligação entre subáreas distintas do conhecimento matemático pode ser um meio de comunicação de ideias ou integração de conceitos e de procedimentos de ensino.

Leivas (2009) afirma que uma forma de inovar em reformulações curriculares é utilizar abordagens geométricas como método para compreender e representar visualmente conceitos de diversas áreas do conhecimento matemático e de outras ciências, por meio de imaginação, intuição e visualização.

O autor utiliza o termo imaginação da seguinte forma:

> Imaginação é usada para expressar uma forma de concepção mental de um conceito matemático, o qual pode vir a ser representado por um símbolo ou esquema visual, algébrico, verbal ou uma combinação dos mesmos, com a finalidade de comunicar para o próprio indivíduo ou para outros tal conceito. (LEIVAS, 2009, p. 20)

O sentido empregado para o termo imaginação é diferente daquele utilizado no senso comum, mas, em consonância com o utilizado por Skemp (1993), ao tratar de pensamento verbal e pensamento visual como classes de imaginação. Para esse autor, o fato de a Geometria Euclidiana centrar-se no estudo das figuras geométricas e no desenvolvimento sistemático dessas figuras, a partir de axiomas, fez com que a importância maior, por muitos séculos, tenha sido dada à sistematização de propriedades, em detrimento dos aspectos geométricos em si. O mesmo autor adverte:

> Atualmente, é interessante observar que esta atitude tem se invertido entre os matemáticos e, enquanto as figuras geométricas são utilizadas como ajuda para a imaginação, a decisão final nas questões de dedução lógica e, inclusive, em termos geométricos, tem sido a álgebra. (SKEMP, 1993, p. 285)

No que diz respeito à intuição, buscamos apoio em Skemp (1993), Tall (1991) e Fischbein (1987, p. 21) quando esse afirma que o *principal atributo do conhecimento intuitivo é o sentimento de uma certeza direta e este é produzido, em primeiro lugar, pela impressão de autoevidência*, a fim de definir o termo intuição.

> É um processo de construção de estruturas mentais para a formação de um determinado conceito matemático, a partir de experiências concretas do indivíduo com um determinado objeto. O conceito deve ser formado de forma reflexiva, consciente, produzindo sentimento de certeza a partir da autoevidência. (LEIVAS, 2009, p. 21).

Klein (1927), nas suas propostas de reforma, particularmente em seu Programa de *Erlangen*[3], sugerindo mudanças extensivas a todo o ensino superior, afirma que a Matemática deveria estar entrelaçada a todas as áreas de interesse da humanidade, destacando seu apreço à Matemática Aplicada. Afirma, como um dos reformadores, que devem ser utilizados, sempre que possível, métodos gráficos para a representação de leis que definam certas funções nas variáveis (x, y) as quais estão no centro das aplicações matemáticas, pelo caráter de evidência que prestam. Diz, ainda: *Antes de tudo, dá-se uma grande importância a uma forte educação da intuição espacial para, posteriormente, ascender até os umbrais do Cálculo Infinitesimal* (p. 6). Os indicativos do autor continuam atuais e consideramos que a Geometria Analítica atualmente desenvolvida na formação inicial do professor de Matemática não pode prescindir disso, e, por isso, retiramos da tese um recorte que apresentamos no presente artigo mais à frente, de uma possibilidade de renovação e formação de conceitos não comumente utilizados, a saber, ângulo entre curvas de uma superfície gerando triângulos não euclidianos.

No que diz respeito aos processos visuais os quais, juntamente com a imaginação e a intuição, constituem um tripé essencial para a formação de um pensamento geométrico avançado, um dos primeiros trabalhos apontando a importância do tema origina-se do *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM). Costa (2000, p. 162) identificou, nas orientações emanadas desse conselho, a importância de destacar o *uso da visualização e raciocínio espacial para resolver problemas, tanto dentro como fora*

[3] Félix Klein elabora em 1872 o programa Erlangen que propõe reformulação no ensino alemão, possivelmente, um dos primeiros movimentos de Educação Matemática.

das matemáticas, enquanto Hilbert e Cohn-Vossen (1932), ao tratarem conceitos geométricos por representações visuais, tais como em configurações projetivas, afirmam que nelas *os fatos geométricos podem ser formulados e deduzidos sem nenhuma medida ou comparação de distâncias ou de ângulos* (p. 94). Nesse caso, ocorre apelo às projeções no denominado plano projetivo, sendo que as figuras geométricas são analisadas pelo seu aspecto global, em contrapartida ao que ocorre com a *Geometria Diferencial, que representa fundamentalmente um método diferente de abordagem* (p. 171), segundo a qual a análise de curvas e superfícies ocorre na vizinhança de pontos desses lugares geométricos.

A visualização matemática tem, para Zimmermann e Cunningham (1991, p. 3), a seguinte significação: *processo de formação de imagens (mentalmente, ou com papel e lápis, ou com o auxílio de tecnologia) e utilização dessas imagens para descobrir e compreender matemática*. Por outro lado, para Guzmán (1997, p. 16), visualização em matemática é *essa forma de atuar com atenção explícita às possíveis representações*, ao se referir ao conhecimento que todo especialista deve ter da utilidade de manejar com objetos abstratos de origem concreta. Já para Presmeg (1986, p. 298): *Um método visual é aquele que envolve imagem visual, com ou sem um diagrama, como uma parte essencial do método de solução, mesmo se os métodos de raciocínio ou algébrico são ambos empregados.*

Arcavi (1999, p. 217) esclarece que:

> Visualização é a habilidade, o processo e o produto de criação, interpretação, uso e comentário sobre figuras, imagens, diagramas, em nossas mentes, em papel ou com ferramentas tecnológicas, com a finalidade de desenhar e comunicar informações, pensar sobre e desenvolver ideias não conhecidas e avançar na compreensão.

No estudo desenvolvido para a tese de doutorado, destacamos a conceituação de Fischbein (1987, p. 103), ao identificar a visualização como conhecimento intuitivo, uma vez que intuições são imediatas e aparentemente autoevidentes e explicitar: *É uma afirmação trivial que se tenda, naturalmente, a pensar em termos de imagens visuais e que o que não se pode imaginar visualmente é difícil de conceber mentalmente*. Para esse autor, imagens como modelos podem propiciar relações e propriedades não pertinentes a determinada estrutura conceitual. *Entretanto, visualização, envolvida em uma atividade cognitiva adequada, continua a ser um fator fundamental, contribuindo para uma compreensão intuitiva.* (Ibid., p. 103).

Fazemos nossas as palavras de Fischbein (1987, p. 104), ao afirmar que:

> Representações visuais não somente auxiliam na organização da informação em representações como constituem um importante fator de globalização. Por outro lado, a concretude de imagens visuais é um fator essencial para a criação de um sentimento de auto evidência e imediatez. Uma imagem visual não somente organiza os dados em estruturas significativas, mas é também um fator importante para orientar o desenvolvimento de uma solução analítica; representações visuais são essenciais dispositivos antecipatórios.

Dessa forma, definimos na tese nossa compreensão de visualização como um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e *comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos*. (LEIVAS, 2009, p. 22).

No que segue apresentamos uma possibilidade de enriquecer o conhecimento geométrico do professor de Matemática em sua formação inicial com uma abordagem sobre geodésicas de uma superfície, estabelecendo analogias com a reta no sentido euclidiano.

1 Retas e Geodésicas

Geometria Diferencial é um dos ramos da Geometria que reúne diversas áreas do conhecimento matemático tais como Cálculo, Geometria Euclidiana, Geometria Analítica, Álgebra Linear, para citar algumas. Segundo Hilbert e Cohn-Vossen (1932, p. 171), *Geometria Diferencial representa um método fundamentalmente diferente de pesquisa*, especialmente ao investigarmos a geometria de curvas e de superfícies em diversos espaços ambientes. Entendemos aqui por espaço ambiente o espaço geométrico no qual entes geométricos e axiomas são bem definidos e relações estabelecidas e demonstradas, como por exemplo, o plano euclidiano $\mathbf{R}^2$ usual ou uma esfera no $\mathbf{R}^3$. Dessa forma, definir o espaço ambiente deve vir em primeiro lugar, não fazendo sentido falar em dado axioma sem especificar a qual espaço ambiente estamos nos referindo.

A Geometria Diferencial pode ser tratada de forma local, na medida em que são estudados comportamentos de objetos geométricos numa vizinhança de um ponto dado do ambiente geométrico em apreço ou pode ser tratada de forma global, a qual permitirá comparativos mais amplos, por meio de Superfícies de Curvatura Constante, o que implicaria a necessidade de aprofundamento nos conteúdos matemáticos avançados. Destacaremos, portanto, os aspectos locais, para o propósito deste artigo.

Buscaremos, no ambiente geométrico esférico, uma aplicação, por meio de Geometria Analítica, do teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo, ilustrando um aspecto em um dos modelos de Geometrias Não Euclidianas, a saber, a Geometria desenvolvida na superfície esférica, denominada Geometria Elíptica, acreditando que, dessa forma, que estaremos contribuindo para o enriquecimento cultural geométrico do futuro professor.

Entendemos geometrização do currículo da Licenciatura em Matemática como um processo de utilizar abordagens geométricas como método para compreender e representar visualmente conceitos de diversas áreas do conhecimento matemático e de outras ciências, por meio de imaginação, intuição e visualização, portanto, Geometria é um ponto de vista que conduz à geometrização. Assim, acreditamos estar exemplificando como a imaginação pode ser empregada, a partir da intuição, num procedimento de visualização de importante conceituação matemática, a saber, proporcionar ao futuro professor na escola básica uma argumentação para a necessidade do por que da demonstração do teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo.

Uma curva num plano, intuitivamente, pode ser compreendida como um objeto geométrico que apresenta certa curvatura k. Assim, na figura 1, a seguir, exemplificamos cinco curvas conhecidas.

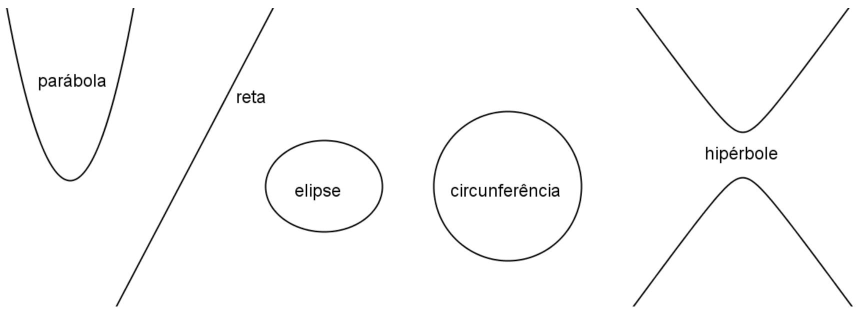

Figura 1 – curvas no plano euclidiano.

Dentre as curvas consideradas, destacamos a segunda - uma reta - por apresentar curvatura nula em todos os seus pontos e a quarta curva - uma circunferência - por apresentar curvatura constante [correspondendo ao inverso do valor da medida de seu raio]. Uma característica no plano é que, dados dois de seus pontos, a menor distância entre eles é a medida do segmento de reta que os une, utilizando a métrica usual no plano.

Consideramos um plano $\boldsymbol{\alpha}$ e as retas **r**, passando pelos pontos M e N; **s** passando pelos pontos A e B e **t**, passando pelos pontos D e E, como na figura 2, a seguir.

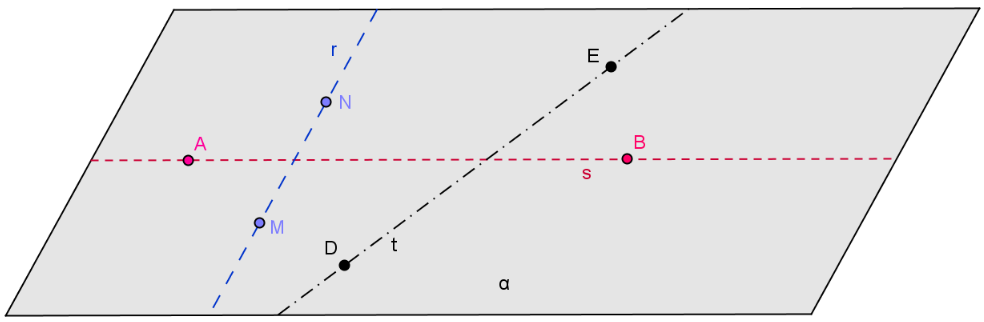

Figura 2 – retas no plano euclidiano.

Intuitivamente, podemos perceber e visualizar a parte do plano representado pela figura 2, como uma folha de papel e nele desenhadas partes das retas, uma vez que tanto o plano quanto as retas são ilimitados. Essa forma de visualizar, utilizando recursos concretos, contribui para o que denominamos antes como visualização, pois permite a construção de um conceito mental e proporcionará o desenvolvimento imaginativo do estudante com vista a uma formalização adequada.

Assim, o plano é uma superfície de curvatura nula, da mesma forma que a superfície cilíndrica. Localmente, o plano é homeomorfo à superfície cilíndrica e podemos visualizar tal homeomorfismo, transformando a folha, com as retas representadas, em uma superfície cilíndrica, como na figura 3, abaixo, verificando que a reta **s**, do plano, transformou-se numa circunferência na superfície cilíndrica; a reta **r** continuou sendo uma reta e sendo uma geratriz na superfície cilíndrica, enquanto que a reta **t** transformou-se numa curva, a qual é denominada de hélice cilíndrica.

Um homeomorfismo entre dois espaços munidos de uma métrica é uma função bijetora contínua e com inversa também contínua. Um exemplo de homeomorfismo é o definido, na superfície cilíndrica $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | \; x^2 + y^2 = 1\}$, no plano perfurado $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | \; x \neq 0 \text{ e } y \neq 0\}$, pela função $f(x,y,z) = (xe^z, ye^z)$.

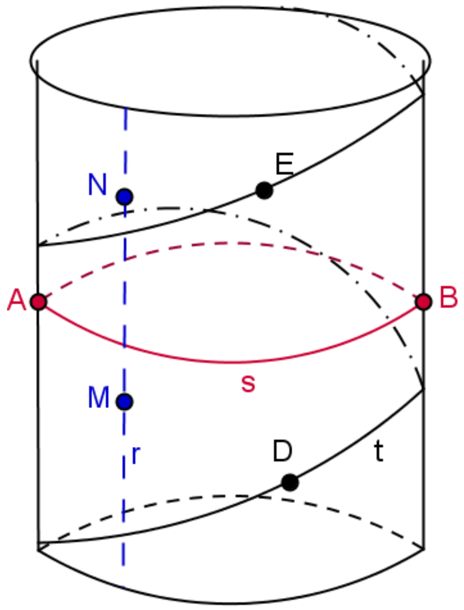

Figura 3 – retas na superfície cilíndrica.

Assim como no plano retas determinam o menor caminho entre dois pontos desse plano, na superfície cilíndrica as três curvas r, s e t também determinam o menor caminho entre dois pontos considerados, respectivamente, N e M, A e B, D e E. Naturalmente, omitimos aqui algumas considerações sobre o homeomorfismo local considerado. Essas curvas da superfície, que desempenham papel análogo ao desempenhado pelas retas no plano euclidiano, são denominadas geodésicas da superfície e sua curvatura é denominada curvatura geodésica. A curvatura geodésica tem, simplesmente, a função de manter a curva presa à superfície, ou seja, em relação à superfície, pois elas não se curvam em relação à superfície. Por esse motivo, muitas vezes, as geodésicas são denominadas como "as retas" da superfície e, assim, *as linhas geodésicas, ou geodésicas, de uma superfície são uma generalização das linhas retas do plano euclidiano*. (HILBERT e COHN-VOSSEN, 1932, p. 220). Para esses autores, as geodésicas podem ser interpretadas como as curvas que definem a menor distância entre dois pontos, quando consideramos porções relativamente pequenas de uma dada superfície à qual pertencem as geodésicas [comportamento local].

Com essa noção imaginativa, intuitiva e visual para obtenção de geodésicas utilizando uma folha de papel ou de acetato do tipo material de radiografias, {imagens como modelos no sentido dado por Fischbein para estabelecer relações e propriedades de objetos matemáticos), consideramos, a seguir, uma superfície esférica, como na figura

4, a qual poderia representar a superfície do globo terrestre, para o que se pode utilizar uma bola de isopor e atilhos de borracha coloridos. As linhas tracejadas representam a parte não visível da linha do equador e a de um meridiano, que são circunferências máximas da mesma, ou seja, representam a curva de intersecção da superfície esférica com um plano que passa pelo centro C da esfera. Para Hilbert e Cohn-Vossen (1932, p. 220), *todas as geodésicas de uma superfície esférica são curvas fechadas.*

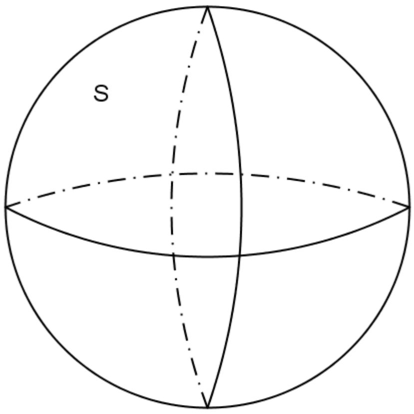

Figura 4 – superfície esférica.

No que segue vamos utilizar as geodésicas para estabelecer comparativos entre triângulos planos e triângulos geodésicos.

2 Geometria Elíptica e triângulos geodésicos

Assim como a Geometria Euclidiana, no plano, está centrada numa axiomática bem definida, como a de Hilbert[4], por exemplo, em que as retas desempenham um importante e relevante papel, também as geodésicas, como “retas” o cumprem na geometria de uma superfície, como no caso em que estamos interessados na superfície esférica. Vamos, neste momento, estabelecer algumas analogias nos dois espaços geométricos: o plano e a superfície esférica, considerando-os localmente, isto é, em pequenas porções, a fim de podermos dar o tratamento da Geometria Diferencial no próximo item deste artigo.

Dessa forma, dois pontos relativamente próximos de uma superfície esférica podem ser unidos por uma e somente uma linha geodésica, de forma análoga, como podem ser unidos dois pontos no plano por uma e somente uma reta. Nessa condição, dados três

[4] Ver HILBERT, David. **Fundamentos da geometria**. Lisboa: Gradiva, 2003.

pontos não colineares, no plano, os mesmos podem ser unidos por três segmentos de reta, determinando um triângulo no plano, enquanto que, dados três pontos distintos na superfície esférica, os mesmos podem ser unidos por três arcos geodésicos [partes limitadas por dois pontos de uma linha geodésica], formando um triângulo nessa, o qual denominaremos triângulo geodésico. Na figura 5, a seguir, estão representados o triângulo plano ABC e o triângulo geodésico A´B´C´.

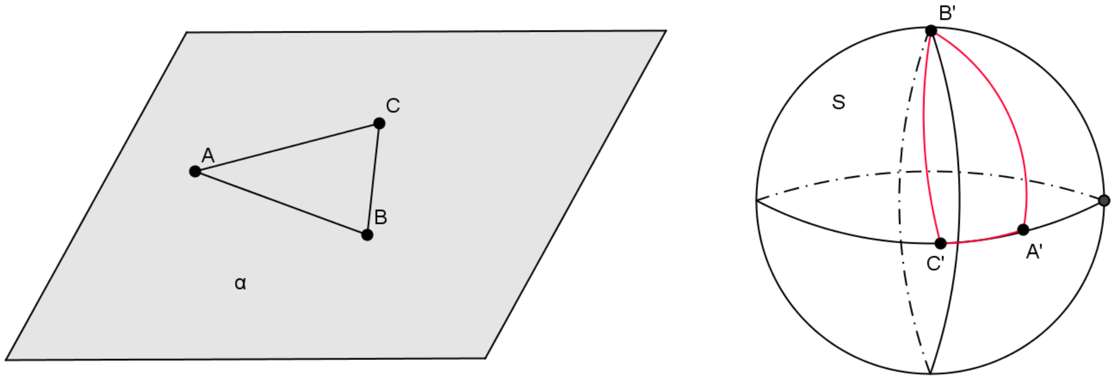

Figura 5 – triângulo no plano e triângulo na superfície esférica.

De forma análoga, dados três pontos distintos no plano [A, O e B], os mesmos podem ser unidos por duas semirretas [$\overrightarrow{OA}\, e\, \overrightarrow{OB}$], tendo o ponto O em comum. A união das duas semirretas define o ângulo plano AOB, segundo nossa compreensão desse elemento geométrico, como na figura 6, a seguir.

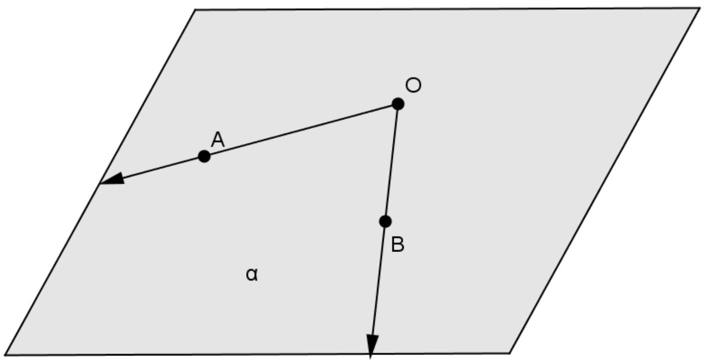

Figura 6 – ângulo no plano.

De forma similar, dados três pontos distintos na superfície esférica [A´, O´ e B´], os mesmos caracterizam arcos geodésicos limitados, em uma extremidade, pelo ponto comum O´ [semi-retas geodésicas]. A união das duas semirretas geodésicas define o ângulo geodésico A´O´B´, como na figura 7.

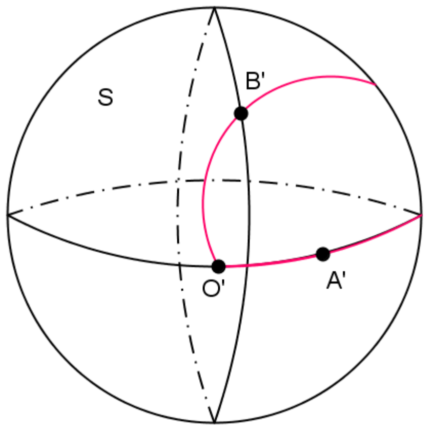

Figura 7 – ângulo na superfície esférica.

Uma forma de medir ângulos no plano é por meio do uso de um transferidor, o que não dá para fazer em uma superfície curva qualquer. A Geometria Analítica resolve esse problema definindo como ângulo entre duas curvas que apresentam um ponto em comum como sendo o ângulo formado entre as retas tangentes às duas curvas naquele ponto. Assim, a figura 8 ilustra o ângulo formado entre as duas curvas C_1 e C_2 de uma superfície esférica. Notemos aqui o forte apelo à imaginação do estudante na compreensão do conceito de ângulo entre curvas.

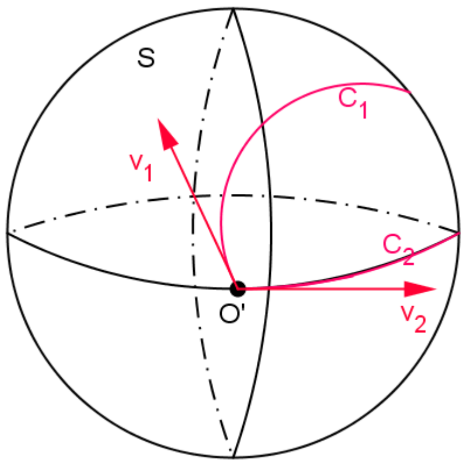

Figura 8 – ângulo entre duas curvas na superfície esférica.

No que segue, não pretendemos explicitar as condições necessárias para caracterizar maiores analogias entre o plano e a superfície esférica, a partir de pequenas porções determinadas sobre essa, o que caracterizaria um modelo de plano elíptico e, consequentemente, a Geometria Elíptica, uma vez que é objetivo exemplificar como obter um triângulo sobre a superfície esférica cuja soma dos ângulos internos é igual a

270º. Além desse, temos também por objetivo motivar o estudo de alguns aspectos de Geometria Analítica, especialmente para a formação do professor de Matemática. Na maioria das vezes o ângulo entre vetores é fornecido para vetores que surgem por meio de coordenadas que o estudante nem sequer tem ideia de onde vieram. Acreditamos que essa forma é um bom elemento que poderá despertar a motivação do aluno para os aspectos geométricos: imaginativo, intuitivo e visual envolvidos nessa disciplina que, geralmente, explora quase que exclusivamente os algébricos.

Segundo Hilbert e Cohn-Vossen (1932, p. 242),

> Geometria Elíptica pode ser definida não somente no plano, mas também no espaço tridimensional. Com um modelo de pontos, linhas retas e planos no espaço elíptico, podemos usar pontos, linhas retas e planos no espaço projetivo. Comparação de comprimentos e ângulos devem, novamente, serem feitos, mas de uma maneira diferente do que na Geometria Euclidiana, e pode, somente, ser descrito em termos analíticos, por exemplo, pela projeção central de uma hiperesfera no espaço quadridimensional.

3 Visualizando triângulos geodésicos trirretângulos pela via da Geometria Analítica

Seguindo o que afirmou Krutetskii (1976, apud Presmeg, 1986), é impossível acreditar que um tipo analítico ocorra somente em Álgebra e um geométrico apenas em Geometria, possibilitando uma melhor formação de um conceito geométrico atual, o de um triângulo com três ângulos retos, no modelo de Geometria Elíptica, o qual pode ser introduzido numa disciplina regular de Geometria Analítica, aproveitando convenientemente os conteúdos que, nessa disciplina, são usualmente desenvolvidos, ou seja, ângulos entre vetores.

Invocamos Klein (1927), o qual, desde o início do século XX, chama atenção para a necessidade de não deixarmos de utilizar, na Matemática superior, tanto Geometria Analítica, quanto Geometria Sintética, de modo que não cheguemos ao extremo de utilizar apenas representações geométricas, sem utilizar fórmulas e vice-versa, sendo um caminho misto entre as duas classificações uma forma mais conveniente e produtiva. Klein (1927, p. 74) define *Geometria Sintética é aquela na qual as figuras são estudadas por si mesmas sem a intervenção de quaisquer fórmulas*.

O Cálculo Diferencial e Integral, por outro lado, utiliza o operador diferencial para obter derivadas de funções arbitrariamente apresentadas aos estudantes, sem nem mesmo, em muitos casos, ser a derivada interpretada como um vetor tangente a uma curva, o que possibilitaria intuitivamente verificar se uma função dada por seu gráfico pode ou não admitir derivadas em todos os seus pontos.

Consideramos que tais questões podem ser resolvidas pela Geometria Diferencial, no momento em que se associam as derivadas ao estudo de superfícies, ou seja, as superfícies estudadas admitem plano tangente bem definido em todos os seus pontos, o que significa dizer que as derivadas parciais existem e correspondem a dois vetores linearmente independentes, os quais são vetores tangentes a curvas coordenadas ou curvas de parâmetros da superfície, que é denominada superfície regular.

Dessa forma, um curso de Geometria Analítica com tratamento vetorial em paralelo ao curso de Cálculo pode trazer grande contribuição para a formação do professor, inclusive desenvolve uma cultura matemática e geométrica ampliada daquela usualmente constante nos currículos da Licenciatura em Matemática como pode ser detectado em levantamento realizado para a justificativa do problema de tese de Leivas (2009). Entendemos também que o próprio professor de Geometria Analítica pode utilizar a noção intuitiva de derivada para o estudo proposto, e que, posteriormente, deve ser formalizada, da forma como Fishbein (1987) concebe intuição.

A seguir, apresentamos detalhadamente como a abordagem algébrica e a geométrica podem ser integradas, o que pode contribuir para formar conceitos não euclidianos, sendo um dos indicativos dos autores para inovar no currículo da Licenciatura em Matemática, especialmente utilizando imaginação, intuição e visualização. Nas representações a parte visível no primeiro octante é feita com uma linha contínua enquanto que nos demais octantes são por linhas tracejadas.

Seja f(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), com (u,v) $\in$ A= $[0,2\pi]$ x $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \subset \mathbf{R}^2$, uma função definida de A $\subset$ R em $\mathbf{R}^3$ por

$$f(u,v) = (a \cos u \cos v, a \operatorname{sen} u \cos v, a \operatorname{sen} v),$$

em que a é uma constante real positiva. O lugar geométrico é uma superfície esférica de centro na origem (0,0,0) e raio a.

Por outro lado, se $t \in I \subset \mathbf{R}$, e u = u(t) e v = v(t), em que I é um intervalo, então

$$C(t) = f(u(t),v(t)) = (x(u(t),v(t)),y(u(t),v(t)),z(u(t),v(t)))$$

é uma curva da superfície esférica.

- Para u = 0, fixo, temos uma curva na superfície dada por:

$$C_1(v) = f(0,v) = (a \cos 0 \cos v,\ a \operatorname{sen} 0 \cos v,\ a \operatorname{sen} v) = (a \cos v,\ 0,\ a \operatorname{sen} v),$$

a qual está contida no plano y = 0 e pode ser visualizada como uma circunferência de centro na origem e raio a.

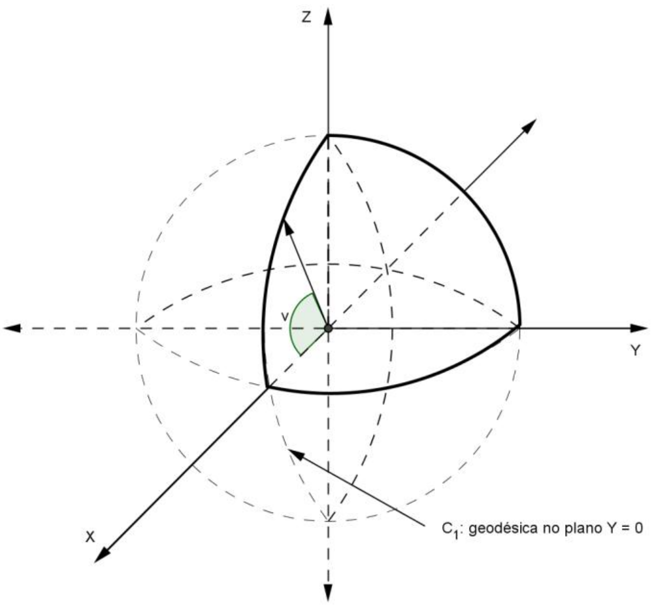

Figura 9 – Geodésica da superfície esférica no plano Y=0.

- Para v = 0, fixo, temos uma curva na superfície dada por:

$$C_2(u) = f(u,0) = (a \cos u \cos 0,\ a \operatorname{sen} u \cos 0,\ a \operatorname{sen} 0) = (a \cos u,\ a \operatorname{sen} u,\ 0),$$

a qual está contida no plano z = 0 e pode ser visualizada como uma circunferência de centro na origem e raio a.

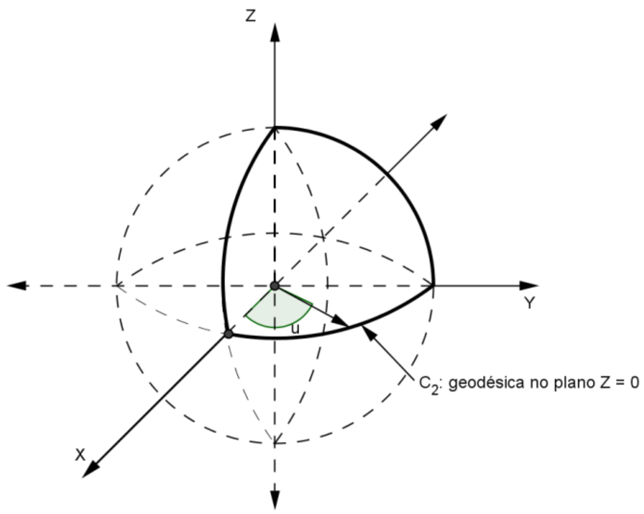

Figura 10 – Geodésica da superfície esférica no plano Z=0.

- Para u = $\frac{\pi}{2}$, fixo, tem-se uma curva na superfície dada por:

$$C_3(v) = f(\frac{\pi}{2},v) = (a \cos\frac{\pi}{2}\cos v,\ a \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos v,\ a \operatorname{sen} v) = (0,\ a\cos v,\ a \operatorname{sen} v),$$

a qual está contida no plano x = 0 e pode ser visualizada como uma circunferência de centro na origem e raio a.

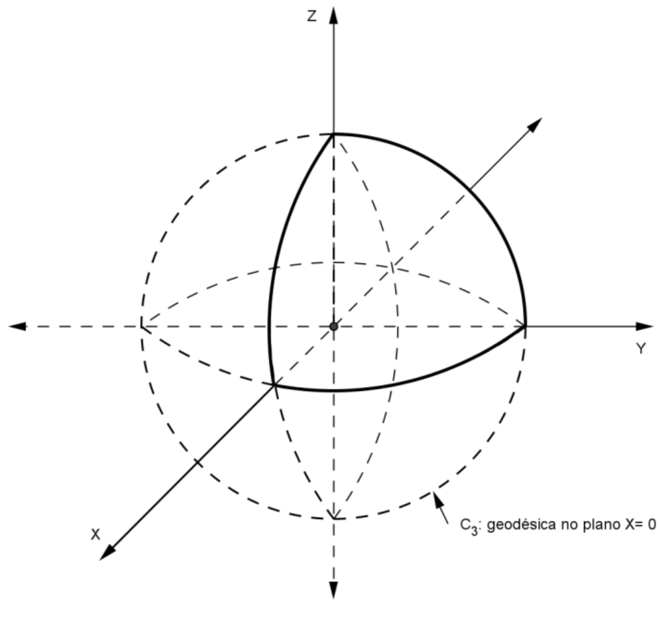

Figura 11 – Geodésica da superfície esférica no plano X=0.

- Reunindo as três geodésicas num mesmo sistema coordenado, deixando de representar os eixos para facilitar a representação, temos:

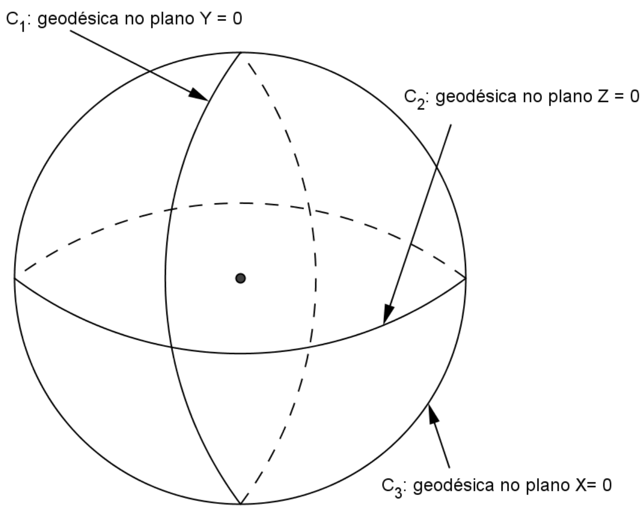

Figura 12 – Geodésicas da superfície esférica nos três planos coordenados.

- Podemos observar, visualmente, que, duas a duas, essas geodésicas se interseccionam, ou seja, $C_1 \cap C_2 = \{A\}$; $C_1 \cap C_3 = \{B\}$ e $C_2 \cap C_3 = \{C\}$. Os três pontos determinam na superfície esférica o triângulo esférico ABC, conforme representado na figura 13.

A Geometria Analítica define o ângulo entre duas curvas em um ponto comum a ambas, como sendo o ângulo formado entre os vetores tangentes a essas curvas nesse ponto. Assim, o ângulo entre dois vetores $w_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $w_2 = (a_2,b_2,c_2)$ é dado por

$$<v_1,v_2> = |v_1||v_2| \cos\theta,$$

em que θ é o ângulo entre os vetores v_1 e v_2 e "< , >" denota o produto interno entre eles.

Em geral, nos cursos de Geometria Analítica e de Cálculo, aspectos de visualização e representação geométrica ou são abandonados ou são pouco explorados, até mesmo porque as coordenadas dos vetores, fornecidos pelo professor aos estudantes, surgem de forma arbitrária para efetuar os algoritmos correspondentes aos produtos escalar, vetorial ou misto. Isso faz com que o aluno não desenvolva sua imaginação uma vez que emprega apenas cálculos e aplicações de fórmulas sem significado geométrico e, assim, não desenvolve a visualização para poder efetuar representações.

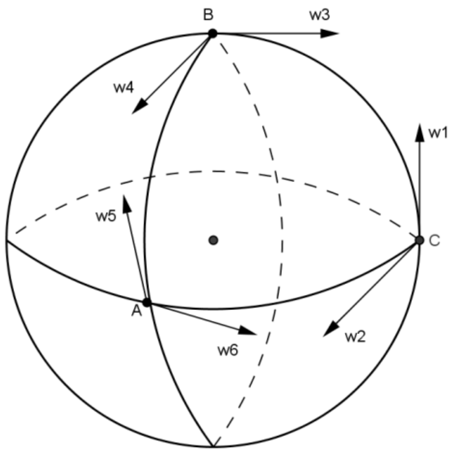

Figura 13 – Triângulo geodésico na esfera.

Retomando os vetores tangentes a cada par de geodésicas da esfera acima, obtemos o ângulo entre seus vetores tangentes nos pontos de intersecção.

- $C_1(v) = f(0, v) = (a\cos 0\cos v, a\mathrm{sen}0\cos v, a\mathrm{sen}\, v) = (a\cos v, 0, a\ \mathrm{sen}\ v)$

  $C_2(u) = f(u,0) = (a\cos u\cos 0, a\mathrm{sen}u\cos 0, a\mathrm{sen}0) = (a\cos u, a\mathrm{sen}u, 0)$

Fazendo-se v = 0 na equação de $C_1(0) = C_2(u)$, temos

$$(a\cos v, o, a\mathrm{sen}v) = (a\cos u, a\mathrm{sen}u, 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos v = \cos u \text{ e } 0 = a\mathrm{sen}u \text{ e } a\mathrm{sen}v = 0 \Rightarrow u = v = 0\ .$$

Dessa forma temos o ponto A = $f(0,0) = (a\cos 0\cos 0, a\mathrm{sen}0\cos 0, a\mathrm{sen}0)$, A = (a,0,0).

Derivando $C_1(v)$ em relação a v, e $C_2(u)$ em relação a u, temos:

$C'_1(v) = f'(0, v) = (-a\cos 0\mathrm{sen}v, -a\mathrm{sen}0\mathrm{sen}v, a\cos v) = (-a\ \mathrm{sen}v, 0, a\cos v)$.

$C'_2(u) = f'(u,0) = (-a\mathrm{sen}u\cos 0, a\cos u\cos 0, a\mathrm{sen}0) = (-a\mathrm{sen}u, a\cos u, 0)$.

Segue que $< C'_1(v), C'_2(u)> = a^2\mathrm{sen}v\mathrm{sen}u = |C'_1(v)|.|C'_2(u)|\cos\theta$.

Logo, como $u = v = 0$, temos

$$0 = |C'_1(v)|.|C'_2(u)|.\cos\theta\ , \text{ como } |C'_1(v)| \neq 0 \neq |C'_2(u)|.$$

Segue que $\cos\theta = 0$ donde, finalmente, vem $\theta = 90º$, isto é, C_1 é ortogonal a C_2.

De maneira análoga, mostramos que C_1 é ortogonal a C_3 e que C_2 é ortogonal a C_3, e, portanto, os três ângulos do triângulo ABC são retos, ou seja, ele é um triângulo trirretângulo, logo, a soma de seus ângulos internos é igual a 270º.

Concluindo

A disciplina de Geometria Analítica é usualmente oferecida nos primeiros semestres dos cursos de graduação. Embora possa parecer utopia acreditarmos que seja possível empregar os métodos de Álgebra Linear, aqui exemplificados, nos parece que essa forma imaginativa e intuitiva, como um processo de formação de conceitos matemáticos pode propiciar um novo fazer na formação do professor de Matemática, inclusive permitindo-lhes mergulhar numa cultura matemática. Isso ocorrerá na medida em que os estudantes passarão a ter noções de Geometrias Não-Euclidianas o que, no nosso entendimento, justificaria estudos em paralelo tanto nos aspectos matemáticos puros quanto nos educacionais uma vez que terão argumentações para a necessidade de certas demonstrações de teoremas, como o exemplificado da soma dos ângulos internos de triângulos.

Isso também corrobora com a teoria de van Hiele para o desenvolvimento do raciocínio em Geometria quanto ao esperado de um aluno ao final da Licenciatura atingir o último nível, ou seja, aquele em que o objeto do pensamento é de que sejam capazes de estabelecer comparações e confrontos entre os diferentes sistemas axiomáticos da Geometria. Assim, o aluno é capaz de atingir tal nível partindo do nível 0 dessa teoria, o da visualização.

Evidentemente, aspectos mais aprofundados desses conhecimentos poderão ser desenvolvidos ao longo do currículo, possibilitando aos alunos, durante sua formação, investigar outras questões tais como: existem triângulos cuja soma dos ângulos internos seja menor do que 180º? Ou, até mesmo, quais são as Geometrias em que essa soma é maior do que 180º? Qual a relação entre esse tipo de comportamento de triângulos e a curvatura da superfície? Cabe salientar, ainda, que o ângulo entre curvas da superfície pode ser feito não apenas com essas curvas aqui tratadas, ou seja, as geodésicas da superfície.

Acreditamos que questões como essas desenvolvam processos mentais nos estudantes que os levem a uma busca pelo aprimoramento de uma cultura geométrica durante sua formação, ao contrário do que percebemos atualmente, em que, na maioria das vezes, o que ocorre é uma simples reprodução de algoritmos.

Dessa forma, ao proporcionarmos aos estudantes intuírem sobre a existência de triângulos sobre uma superfície esférica e, posteriormente, comprovarem que de fato podem ser obtidos seus ângulos internos bem como sua soma, entendemos, como Fishbein (1987), que a intuição pode ser um caminho para construir um conhecimento matemático de forma ampla e atualizada, o que propiciará um melhor desempenho dos futuros professores na formação de uma geração que se aproprie de uma cultura matemática dinâmica em qualquer nível de ensino, para que a Matemática ensinada seja reconhecida como um bem cultural que tem sido útil no desenvolvimento da ciência e da tecnologia, mas que só faz sentido se for acessível.

Assim, o exemplo dado neste artigo, de utilização dos três elementos, foi o da existência de um tipo de Geometria Não Euclidiana, pela possibilidade de utilizar a Álgebra Vetorial na disciplina Geometria Analítica, como ângulos entre vetores, entre curvas, existência de triângulos trirretângulos e até mesmo linhas retas em espaços não euclidianos, a saber, as geodésicas de superfícies.

As preocupações de Klein (1927), quanto à importância que deva ser dada a uma forte educação pela intuição espacial e as de Freudenthal (1973), com relação ao futuro da Geometria, acreditamos que poderiam ser minimizadas pela exemplificação fornecida de utilizar curvas específicas na construção de conceitos que, usualmente, são apresentados de forma abstrata nas disciplinas de Geometria Analítica e de Cálculo, sem significados geométricos, sem explorar aspectos intuitivos e nem imaginativos e visuais, o que poderia ser feito em lugar dos algoritmos comumente utilizados em diversas disciplinas do ensino superior.

Procuramos exemplificar, neste artigo, uma possibilidade de geometrizar o currículo da Licenciatura em Matemática, dando um exemplo minuciosamente detalhado, de como a abordagem por meio da imaginação, intuição e visualização poderá mobilizar saberes geométricos em direção ao desenvolvimento de um pensamento geométrico sempre mais aprimorado, na perspectiva da compreensão conceitual da Geometria Analítica no currículo da Licenciatura em Matemática.

Referências

ARCAVI, A. The role of visual representation in the learning of mathematics. In: NORTH AMERICAN CHAPTER OF THE PME, 1999. *Proceedings*… Disponível em: <http://www.clab.edc.uoc.gr/aestit/4th/PDF/26.pdf>. Acesso em: 30 set. 2008.

BISHOP, A. J. (editor.). *Didatics of Mathematics as a Scientific Discipline.* N.Y.: Kluwer Academic Publishers, v. 13, 2002.

COSTA, Conceição. *Visualização, veículo para a educação em geometria*. 2000. Disponível em: < **http://www.spce.org.pt/sem/CC.pdf**> . Acesso em: 29 jul. 2007

FISCHBEIN, Efraim. *Intuition in science and mathematics*: an educational approach. Dordrecht: Reidel, 1987.

FREUDENTHAL, Hans. *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht-Holland: D. Reidel Publishing Company, 1973.

GUZMÁN, Miguel de. *El rincón de la pizarra, ensayos de visualização en análisis matemática:* elementos básicos del análise. Madrid: Pirámide, 1997.

HILBERT, D.; COHN-VOSSEN, S. *Geometry and the imagination*. New York: Chelsea Publishing Company, 1932

KILPATRIC, Jeremy. Fincando estacas: Uma tentative de demarcar a educação matemática como campo Professional e científico. In: *Zetetiké*. Campinas: São Paulo, v. 4, n. 5, p. 99-120, jan/jun. 1996.

KLEIN, Félix. *Matemática elemental desde un punto de vista superior*. Trad. Roberto Araújo. Madrid: Biblioteca Matemática, 1927.

LEIVAS, J. C. P. *Imaginação, Intuição e Visualização:* a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática. 2009. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2009, 294 p.

POMBO, Olga (Org.). *Contribuição para um vocabulário sobre interdisciplinaridade.* 1993. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/mathesis/vocabulario-interd.pdf>. Acesso em: 29 nov. 2007.

PRESMEG, Norma C. Visualization and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics,* v. 17, n. 3, p. 297-311, 1986.

SKEMP, R. *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. 2. ed. Madrid. Ediçiones Morata, 1993.

TALL, David. *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer, 1991.

ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. *Visualization in teaching and learning mathematics*: a project sponsored by the Committee on Computers in Mathematics Education of The Mathematical Association of America. Washington, USA: Mathematical Association of America. 1991.