EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i2p334-348

O estudo de Grafos: uma proposta investigativa

The study of Graphs: an investigative proposal

RENE BALTAZAR[1]

LETÍCIA PEREIRA[2]

Resumo

O presente estudo é uma experimentação acerca da abordagem estudo por investigação, com ênfase em Grafos. A proposta apresentada nesse trabalho tem como enfoque a elaboração de um ensaio sobre a inserção do Algoritmo de Dijkstra no Ensino de Matemática. Para isso, propõe-se o desenvolvimento de uma atividade pautada no ensino por investigação, onde os alunos foram instigados a resolver determinados problemas totalmente construídos com dados reais e com informações do âmbito da escola. Durante o desenvolvimento dessa experimentação, surgiram peculiaridades que nos fizeram validar a inserção de uma abordagem baseada no ensino por investigação destacando a importância do estudo da Teoria de Grafos na Educação Básica.

Palavras-chave: *Educação Matemática, Investigação, Grafos, Algoritmo de Dijkstra.*

Abstract

This paper presents an experimentation based on the study by investigation with emphasis in the Theory of the Graphs. The proposal presented in this paper focuses on the elaboration of an essay on the insertion of the Dijkstra Algorithm in Mathematics Education. In order to elaborate this, it is proposed the development of an activity based on study by investigation, where the students were instigated to solve certain problems totally constructed with real data and with information of the scope of the school. During the development of this experiment, peculiarities appeared that allowed us to validate the insertion of an approach based on study by investigation and finally observing the importance of the study of Graph Theory in Basic Education.

Keywords: *Mathematics Education, Investigation, Graphs Theory, Dijkstra Algorithm.*

[1] Doutor em Matemática: Universidade Federal do Rio Grande – FURG/SAP. renebaltazar@furg.br

[2] Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas (PPGECE) do Campus FURG/SAP. Professora da rede pública municipal de Ensino. leticia.cpereira@hotmail.com

Introdução

Entendemos que o conhecimento matemático contextualizado está, atualmente, cada vez mais inserido as práticas vinculadas ao Ensino de Matemática; ou seja, há uma valorização de estruturas de elaboração de teses e uma motivação à criação de conjecturas pelo aluno. É uma disciplina dinâmica, que permite aproximações com a realidade e nossas vivências. Para que a Matemática tenha aplicação e se torne significativa para os alunos, é interessante que os mesmos possam estar inclusos nos processos de elaboração de conjecturas e argumentações.

Dessa forma, podemos dizer que o aluno participa ativamente do processo de aprendizagem. Nessa perspectiva, Vieira e Allevato (2012, p. 7) destacam: "Ao se envolverem com tarefas investigativas os alunos se colocam em um genuíno momento de atividade matemática, momento este em que investigam relações, conjecturam, experimentam e estabelecem conclusões (...)".

Para a realização dessa proposta, foi exercida uma atividade pautada na abordagem da investigação e suas particularidades, focando em um problema embasado em Grafos, com ênfase no Algoritmo de Dijkstra. A criação de problemas para o ensino e aprendizagem da Matemática é válida, pois coloca o aluno em um processo de autonomia e de novas experiências. Segundo Spinillo et. al, (2017, p. 932):

> Formular problemas é um desafio para o aluno, pois além da pouca familiaridade com esta atividade, tem que lidar com outras competências que vão além do conhecimento matemático, como, os aspectos linguísticos; especificamente, a produção de um texto que possui uma estrutura definida por meio da qual são apresentadas as informações matemáticas, suas relações e aquilo que é buscado.

A criação do problema aconteceu utilizando o contexto da escola em que foi aplicado. Por se tratar de uma escola com sede no interior, os alunos utilizam o transporte de ônibus frequentemente para ir ao centro da cidade, posto de saúde, dentista, mercado, lojas, etc. e esses deslocamentos, claramente, tem um custo associado. Através da representação de um Grafo criado associado, junto com os alunos, uma das propostas do trabalho é propor uma discussão em sala de aula sobre existência de caminhos com menor custo (por exemplo, entre centro e a escola), utilizando o Algoritmo de Dijkstra. Observamos que durante todo o processo não estaremos preocupados com a formalização da eficaz desse Algoritmo, fato que pode ser encontrado em Bondy e Murty (1976).

Tal problema é recente e recorrente, porém sempre de maneira simplificada, em atividades realizadas com o conceito de Grafos através de questões da Olimpíada

Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), materiais para formação de professores fornecidos pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e dissertações de mestrado (ver, por exemplo, Negri (2017), Assis (2017) e Nogueira Júnior (2017)).

Ensino de Matemática

O conhecimento matemático é indispensável para as crianças e adolescentes em fase de formação na Educação Básica, assim como para os demais sujeitos atuantes na sociedade, pelo fato de trazer noções de raciocínio lógico e crítico.

A Educação Matemática no Brasil tem se reinventado com intuito de propor novas aprendizagens e habilidades para os alunos. Esta afirmação é perceptível por meio da evolução do quadro de pesquisas na área e, como documento oficial, a criação da nova Base Nacional Comum Curricular, que estabelece um conjunto de aprendizagens indispensáveis a todos aqueles que têm o direito à educação.

Um dos objetos de conhecimento na área da Matemática da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) traz em suas habilidades para o Ensino Fundamental que o aluno seja capaz de "Planejar e coletar dados de pesquisa referente a práticas sociais escolhidas pelos alunos e fazer uso de planilhas eletrônicas para registro, representação e interpretação das informações, em tabelas, vários tipos de gráficos e texto". (BRASIL, 2017 p. 303).

Dessa forma é visível que os alunos devem explorar habilidades dentro do contexto em que vivem, além de interagir entre áreas. A Matemática deixa de ser ensinada como algo pronto e aparece presente em outros aspectos e não individualizada. Diante disso, os PCNEM (2000) orientam que:

> O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência. (BRASIL, 2000, p.43).

É interessante que os alunos façam parte do processo de ensino e saibam resolver problemas relacionados aos mais diversos assuntos, utilizando-se de habilidades e conhecimentos adquiridos ao longo de sua formação.

Dentro dessa proposta de resolver atividades apresentadas em forma de problemas, os alunos devem explorar os conhecimentos e criar meios para chegar a um produto, onde muitas vezes, não há apenas uma maneira de resolvê-lo. Dessa forma, a Base Nacional Comum Curricular traz:

> Devem-se considerar, também, os problemas cujas tarefas não estão explícitas e para as quais os estudantes deverão mobilizar seus conhecimentos e habilidades, a fim de identificar conceitos e conceber um processo de resolução. Em alguns desses problemas, os estudantes precisam identificar ou construir um modelo para que possam gerar respostas adequadas. Esse processo envolve analisar os fundamentos e propriedades de modelos existentes, avaliando seu alcance e validade para o problema em foco. (BRASIL, 2017, p. 527)

Baseados nisso, acreditamos que uma possibilidade é propor atividades que estejam contextualizadas, onde os alunos participem dos processos e investiguem sobre determinado assunto.

Ensino por investigação

O ensino por investigação apresenta uma nova forma de direcionar a aprendizagem. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), investigar é procurar saber o que não se sabe. A fim de propor novas metodologias para a aprendizagem, surge a necessidade de reinventar as práticas e basear-se em possibilidades e diretrizes.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para os Anos Finais do Ensino Fundamental, há necessidade da capacidade de investigação dos alunos, através de:

> Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas. (BRASIL, 1998, p. 47).

A abordagem do ensino por investigação parte, em sua grande maioria, de um problema inicial. É a partir desse problema, que os alunos iniciam a busca pela investigação, o que pode desencadear a aproximação de outros conceitos matemáticos, ora não esperados.

Nessa abordagem, o aluno estará ativo no processo aprendizagem, pois é por meio das atividades desenvolvidas que o mesmo produzirá o conhecimento. Será ele que irá direcionar suas constatações, com o auxílio do professor. O professor é um orientador e desempenha um papel de agir por meio dos estímulos recebidos. O aluno poderá utilizar de recursos diferentes para sua investigação, além trabalhar em grupos, para complementar o processo. Segundo Corradi (2011, p. 165):

> A relevância dessa atividade se deve ao desenvolvimento do trabalho que é realizado em equipe, onde a utilização da argumentação, da comunicação matemática e da elaboração de relatórios, oportuniza aos alunos a produção de significados para a Matemática. Através de situações problema desafiadoras possibilita ao aluno o desenvolvimento de autonomia na busca de meios para investigação.

Na perspectiva dessa abordagem de ensino, o aluno poderá explorar a Matemática. Vieira e Alevatto (2012, p. 10). trazem outra definição para essa metodologia:

> As tarefas de investigação são classificadas como um tipo específico de problema que parte de enunciados menos estruturados, que permite a formulação de diversos tipos de questões e possibilita a realização de explorações em diferentes direções. Nesse tipo de atividade, o interesse principal reside nas ideias matemáticas e nas suas relações e o aluno assume o papel de protagonista de sua aprendizagem, pois cabe a ele definir quais questões investigar e quais caminhos percorrer.

Com o intuito de realizar essa aproximação entre o "fazer" matemática e elaboração de uma atividade de ensino baseada no processo investigativo, será construído e experimentado uma sequência de problemas naturais, porém nada triviais.

Grafos

Os autores Santos, Mello e Murari (2007) trazem que os Grafos têm uma origem relativamente recente na história da Matemática. Os mesmos autores destacam (2007, p. 297) "a teoria de Grafos tem extensiva utilização em matemática aplicada, pois demonstra ser uma poderosa ferramenta para a modelagem de diversas situações reais (...)".

Grafo é um conjunto finito de elementos, chamados de vértices, e relações entre seus elementos, chamadas de arestas, de modo não ordenado, que nada mais são do que as ligações ou conexões entres seus vértices (nós).

Grafos são geralmente representados por diagramas, onde os vértices de V correspondem aos pontos no plano e as arestas de E correspondem aos arcos que ligam os vértices correspondentes. Por exemplo, uma pessoa que deseja passar de uma cidade (Cidade A) para outra (cidade B) com três possibilidades de pontes, poderá representar determinado problema através de um Grafo (Figura 1), em que, somente as informações de qual ponte vai ser escolhida é representada.

Figura 1: Representação do exemplo de Grafo

Fonte: Autores

O estudo de Grafos não está listado como um conteúdo obrigatório do currículo escolar da Educação Básica, nem consta na nova Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Porém, acreditamos que o ensino de Grafos na Educação Básica, pode desencadear novos conhecimentos de natureza combinatória e processos algorítmicos além de possuir o potencial de desencadear no aluno o reconhecimento de abstrações.

As atividades que envolvem Grafos e o Algoritmo de Dijkstra podem ser apresentadas através da realidade dos educandos para resolver questões de minimização de distâncias, custos, entre outros. Porém, muitas vezes as versões simplificadas desse problema impedem maiores discussões sobre as competências ao tema. Dessa forma, será apresentada nesse trabalho a criação de um problema sobre Grafos, com ênfase no Algoritmo de Dijkstra, que envolve a realidade dos alunos, contextualizado com o cotidiano em que vivem.

Algoritmo de Dijkstra

O Algoritmo de Dijkstra é um dos algoritmos utilizados para solucionar problemas de caminho, podendo somente ser aplicado para Grafos em que as arestas cujos valores atribuídos a elas sejam não negativos. Este algoritmo foi publicado em 1959 e criado pelo Edsger Dijkstra, que trouxe uma solução para o problema do menor caminho entre dois vértices de um Grafo ponderado.

Um Grafo é dito ponderado ou valorado se cada aresta tem um valor associado. Este valor pode ser a distância entre os vértices, uma tarifa ou uma dificuldade para ir de um vértice ao outro.

O objetivo principal do Algoritmo de Dijkstra é ligar um ponto inicial s (chamado vértice inicial) a outro ponto qualquer v (vértice) de um Grafo, da forma mais eficiente e econômica possível; sendo claro no contexto o entendimento de uma maneira mais econômica.

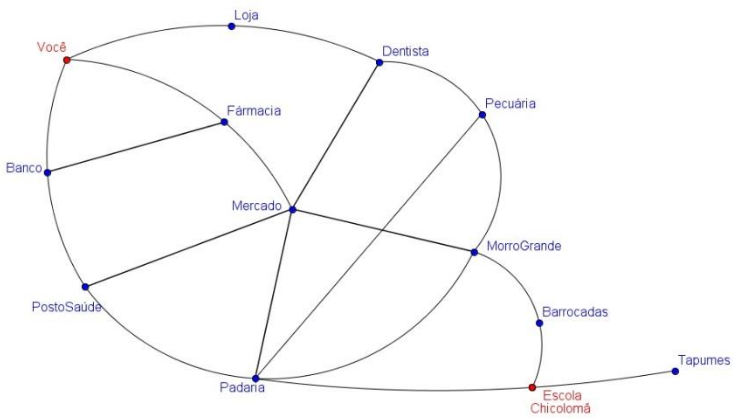
Contextualização da pesquisa

Para o desenvolvimento do tema proposto, foi construído um problema sobre Grafos, baseado em questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e materiais de formação de professores oferecidos pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Essa proposta está parcialmente fundamentada em aspectos da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017, p. 529) onde em uma de suas habilidades para a Matemática, o aluno deve ser apto a "reconhecer um problema algorítmico, enunciá-lo, procurar uma solução e expressá-la por meio de um algoritmo, com o respectivo fluxograma".

As atividades foram realizadas com alunos de uma turma de 9º ano de uma escola Municipal de Santo Antônio da Patrulha, com sede na localidade de Chicolomã. Nesta proposta, foi realizado um levantamento com os alunos a respeito dos lugares que eles visitam quando vão ao centro da cidade de ônibus. A partir dessas informações, foi possível construir, através de uma representação em Grafo (Figura 2), uma associação entre os lugares visitados pelos alunos, além de mostrar as localidades que moram e a escola. Sendo assim, com bases nas informações relevantes, a representação de objetos ligando com objetos e não importando vários fatores como o formato da estrada (asfalto ou estrada de terra), os alunos foram induzidos a construir essa representação.

Para dar valor a cada caminho, foram utilizados os valores reais das passagens destes trajetos. Os preços são de duas empresas que fornecem serviço de transporte em Santo Antônio da Patrulha (sede e interior).

Figura 2: Representação do Grafo sobre os locais



Fonte: Autores

De acordo com a BNCC, uma das habilidades a serem desenvolvidas no Ensino Fundamental na área da Matemática é:

> Interpretar e resolver situações que envolvam dados de pesquisas sobre contextos ambientais, sustentabilidade, trânsito, consumo responsável, entre outros, apresentadas pela mídia em tabelas e em diferentes tipos de gráficos e redigir textos escritos com o objetivo de sintetizar conclusões. (BRASIL, 2017, p. 303).

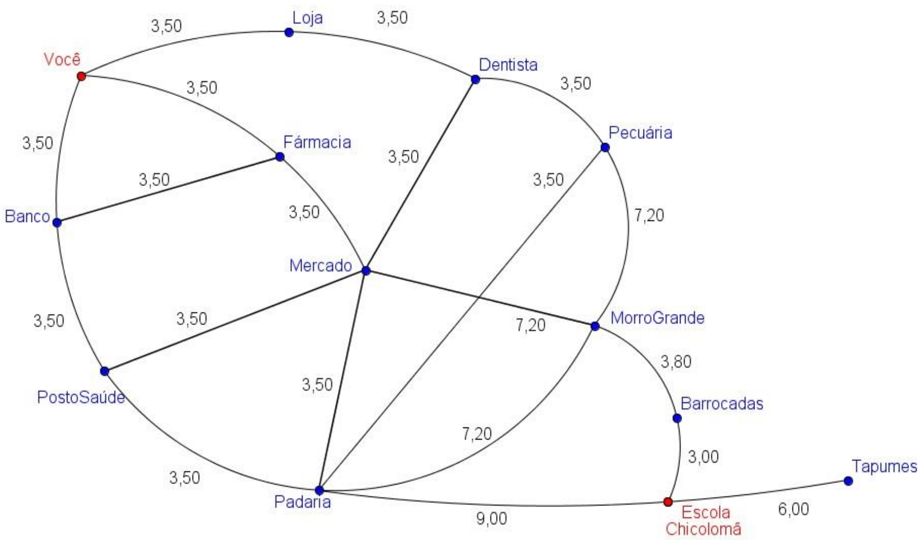
Pensando nisso e inspirando-se nas habilidades citadas anteriormente, foi elaborada uma proposta de investigação com ênfase em Grafos.

Proposta de ensino por investigação

A proposta da atividade é organizada da seguinte forma:

- Apresentar o problema para os alunos, pelo intermédio da representação do Grafo (Figura 3) e pedir que encontrem caminhos até a Escola, partindo do Centro, sem passar duas vezes no mesmo local.

Figura 3: Representação do problema de Grafos



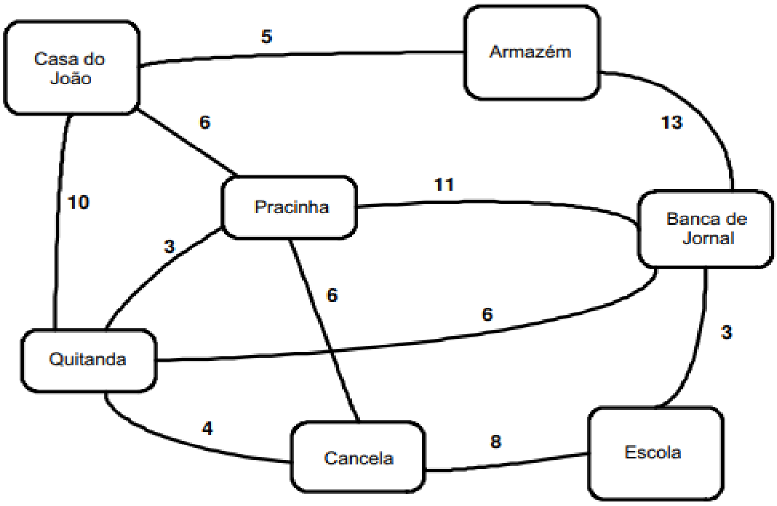
Fonte: Autores

- Propor que os alunos determinem o custo para os caminhos que encontraram.
- Depois, pedir que determinem o caminho com o menor custo.
- Pedir que os alunos respondam: será possível ir do Centro (você) até a Escola, passando em todos os lugares? (na teoria de Grafos, passando em todos os nós).
- Pedir que os alunos respondam: Será possível passar em todos os trajetos (na teoria de Grafos, em todos os arcos) sem passar duas vezes no mesmo caminho?
- Pedir que os alunos preencham uma tabela que mostre as distâncias entre os trajetos. (Tabela 1)

Com auxílio da Tabela 2, encontrar o menor caminho através do Algoritmo de Dijkstra.

- Para concluir a proposta, os alunos receberão outro problema de Grafos (Figura 4), onde não será citado aos alunos o termo Grafos e deverão ser capazes de utilizar os conhecimentos adquiridos para resolvê-lo.
- Determinar o caminho com o menor custo, partindo da Casa do João até a escola.

Figura 4: Problema de Grafos, casa do João



Fonte: Jurkiewicz, 2009.

Para registrar as investigações dos alunos e realizar a análise da proposta, foi realizado um diário de campo, com as observações realizadas, além disso, houve registro por meio de fotografias, previamente autorizadas pelos responsáveis.

A representação da Figura 3 foi criada através do programa GeoGebra pelos autores e desenvolvido a partir de outros problemas sobre Grafos para ilustrar o que estava sendo proposto na sala de aula. A representação esboça os lugares que os alunos de uma determinada escola visitam quando vão ao centro da cidade de ônibus. Os valores atribuídos aos trajetos são inspirados nos valores reais das passagens dos transportes fornecidos nesses lugares.

As tabelas apresentadas a seguir e desenvolvidas pelos autores para uma ilustração e organização de dados obtidos: inicialmente por tentativas, como no primeiro passo da proposta, e finalmente estruturados como nos últimos passos. A Tabela 1 apresenta em suas colunas e linhas os lugares descritos na representação de Grafos sobre o problema. Foram utilizadas siglas para abreviar o nome dos lugares: V (Você), B (Banco), F (Farmácia), L (Loja), PS (Posto de Saúde), M (Mercado), D (Dentista), PA (Padaria), PE (Pecuária), MG (Morro Grande), B (Barrocadas), E (Escola) e T (Tapumes).

O preenchimento dessa tabela é feito pelo custo da passagem do trajeto de um lugar ao outro. Os preenchimentos que aparecem com custo zero são aqueles que têm saídas e destinos no mesmo lugar, ou seja, não pagamos por permanecer onde estamos. E os campos que aparecem sem valor, representados por um traço, são trajetos inexistentes dentro da representação.

Tabela 1: Tabela das distâncias entre os trajetos

Lugares	V	B	F	L	PS	M	D	PA	PE	MG	B	E	T
V	0	3,50	3,50	3,50	-	-	-	-	-	-	-	-	-
B	3,50	0	3,50	-	3,50	-	-	-	-	-	-	-	-
F	3,50	3,50	0	-	-	3,50	-	-	-	-	-	-	-
L	3,50	-	-	0	-	-	3,50	-	-	-	-	-	-
PS	-	3,50	-	-	0	3,50	-	3,50	-	-	-	-	
M	-	-	3,50	-	3,50	0	3,50	3,50	-	7,20	-	-	-
D	-	-	-	3,50	-	3,50	0	-	3,50	-	-	-	-
PA	-	-	-	-	3,50	3,50	-	0	3,50	7,20	-	9,00	-
PE	-	-	-		-	-	3,50	3,50	0	7,20	-	-	-
MG	-	-	-		-	7,20		7,20	7,20	0	3,80	-	-
B	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3,80	0	3,00	-
E	-	-	-	-	-	-	-	9,00	-	-	3,00	0	6,00
T	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	6,00	0

Fonte: Autores

A Tabela 2 apresenta a resolução do problema, ou seja, o trajeto com o custo mínimo, por meio do Algoritmo de Dijkstra. São apresentados nas linhas os lugares e nas colunas as iterações possíveis e com menor custo entre os caminhos. Por exemplo, a representação (B;7) na linha PS e coluna 3, indica que o trajeto de V até PS, passando por B, custa R$ 7,00.

Tabela 2: Tabela do problema, resolvido pelo Algoritmo de Dijkstra

Vértice	1	2	3	4	5	6
V	(V; 0)	-	-	-	-	-
B	-	(V; 3,5)	-	-	-	-
F	-	(V; 3,5)	-	-	-	-
L	-	(V; 3,5)	-	-	-	-
PS	-	-	(B; 7)	-	-	-
M	-	-	(F; 7)	-	-	-
D	-	-	(L; 7)	-	-	-
PA	-	-	-	(M; 10,5) (PS; 10,5)	-	-
PE	-	-	-	(D; 10,5)	-	-
MG	-	-	-	(M; 14,2)	-	-
B	-	-	-	-	(MG; 18)	-
E	-	-	-	-	(PA; 19,5)	(MG/B; 24,50) (PA; 19,50)
T	-	-	-	-	-	-

Fonte: Autores

Na primeira coluna, temos como custo zero, permanecer onde se está. Na segunda coluna, podemos partir de Você até Banco, Farmácia e Loja, com o mesmo custo de R$ 3,50. Não podendo ser feito nenhum outro caminho direto, partimos para terceira coluna. Nesta podemos ver que vindo de Banco podemos ir até Posto de Saúde, sendo o valor desse trajeto R$ 3,50, que somado ao trajeto Você até Banco que era também de R$ 3,50, totaliza

R$ 7,00. Assim também para os demais: de Você até Mercado passando por Farmácia, R$ 7,00 e de Você até Dentista, passando por Loja, R$ 7,00.

Pelo fato de todos os caminhos terem o mesmo custo até o momento, ainda não podemos definir qual é o caminho que tem o custo mínimo. Então, seguimos na quarta coluna, onde de Posto de Saúde podemos seguir para Padaria, somando os custos de cada trajeto, chegamos a um total de R$ 10,50. De Mercado podemos ir para Dentista, que totalizaria um custo de R$ 10,50, porém já temos um custo menor para chegar até o Dentista, que é de R$ 7,00. De Mercado podemos ir até a Padaria que o custo também é de R$ 10,50 e ainda de Mercado poderíamos ir até Morro Grande, porém o custo é de R$ 14,20, e como procuramos o menor custo, este caminho não é o caminho desejado.

Na quinta coluna, chegamos até o destino que é a Escola, partindo de Padaria e chegando lá com custo total de R$ 19,50, ou seja, o caminho com menor custo. Para verificar que este é o caminho com menor custo, podemos seguir por Morro Grande, porém o custo até chegar à Escola será de R$ 24,50.

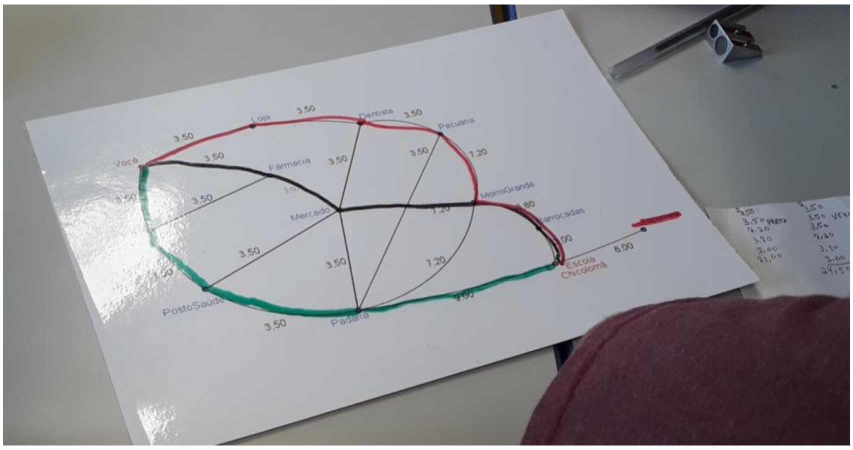
Análise da Proposta

A aplicação da metodologia foi realizada em cinco períodos, distribuídos em três dias. No primeiro momento, os alunos se organizaram em duplas e receberam a representação do Grafo, que apresenta as possibilidades de caminhos dispostos anteriormente, impressa em folha de papel A4 e forrada com *Papel Contact*. Foi escolhida essa maneira, para que os alunos pudessem rabiscar caminhos com pinceis atômicos e apagar com toalhinhas de feltro.

Os alunos exploraram o material e logo foi solicitado que encontrassem caminhos de Você até a Escola. Neste momento, os alunos já demonstraram interesse em somar os valores dos caminhos para chegar ao valor total de seu trajeto.

Como havia cores de pinceis atômicos diferentes, algumas duplas começaram a traçar caminhos diferentes, com cores diferentes, o que facilitou na diferenciação de cada caminho (ver figura 5). Antes mesmo de serem solicitados que atribuíssem valores para os caminhos, os alunos fizeram e puderam dar nomes aos caminhos, de acordo com a cor do pincel, como por exemplo, o caminho verde ou caminho preto.

Figura 5: Imagem de uma representação sendo desenvolvida pelos alunos



Fonte: Acervo dos autores

Depois, os alunos deveriam descrever três caminhos diferentes e atribuir valores para os trajetos. Quando fazíamos esse passo da proposta, os alunos já definiram qual era o caminho com menor custo, por tentativa, no qual será encontrada pelo Algoritmo.

Primeira observação importante dos alunos foi o momento que chegaram à conclusão de que seria inviável ir até Tapumes, pois ir até este lugar apenas aumentaria o custo do caminho e não faria sentido, pois teríamos que voltar até a Escola, aumentando o valor novamente (observe que na Figura 5 a localidade de Tapumes está riscada do Grafo).

Ao descobrirem o caminho com menor custo os alunos calcularam o caminho com maior custo. Essa parte da proposta não havia sito pensada como possibilidade de questão e foi um fato que partiu do interesse dos próprios alunos. Ao determinarem o caminho com maior custo, souberam afirmar que seria possível passar em todos os lugares, porém não seria possível passar por todos os trajetos (arestas).

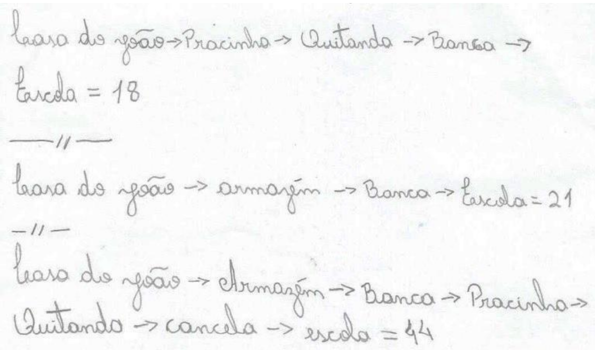
Ao propor a possibilidade de caminhos máximos, uma das questões respondidas foi sobre o porquê de não ser possível passar em todos os trajetos (arestas), sem repetir o lugar. Um aluno afirmou que seria impossível, pois partindo de você (local onde inicia o trajeto dentro da proposta de ir até a Escola) eram apresentadas três possibilidades diferentes e não teria como passar por esses três caminhos sem repetir o lugar. Esse acontecimento foi um reflexo de tentar inserir o contexto de Grafos Eulerianos, que não foi trabalhado dentro desta proposta.

Depois, foi solicitado que preenchessem a primeira tabela (Tabela 1), esta que representa as distâncias entre os lugares. Os alunos não tiveram dificuldade em realizar essa proposta e preencheram com tranquilidade. Para a correção da tabela, projetamos a tabela com a Lousa Digital no quadro e fomos preenchendo com auxílio de giz de quadro-negro.

Depois que finalizamos a primeira tabela, os alunos receberam a segunda, que deveria ser preenchida utilizando o Algoritmo de Dijkstra para encontrar o caminho com menor custo. Nesta tabela, foi preciso uma explicação mais detalhada, porém algumas duplas apresentaram muita facilidade em resolver a tarefa solicitada. Alguns preencheram de forma mais completa e outros de forma mais simplificada, contudo chegaram ao resultado esperado. Note que, aqui, há indícios de uma presença de raciocínio algorítmico, com todas suas potencialidades e justificativas.

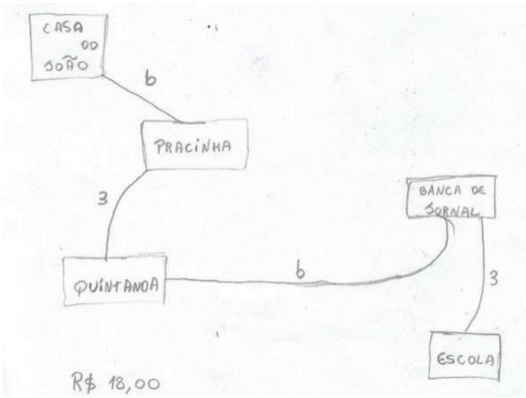
No último passo da proposta, os alunos resolveram outro problema sobre Grafos. Para este último passo, não foi determinado o modo que deveriam utilizar para resolver. Assim, houve duplas que utilizaram escritas (ver Figura 6), outras fizeram cálculos e outras fizeram o desenho do caminho mínimo (ver Figura 7) analisando cada um dos caminhos possíveis.

Figura 6: Resolução (1) do problema Casa do João



Fonte: Acervo dos autores

Figura 7: Resolução (2) do problema Casa do João



Fonte: Acervo dos autores

Finalmente, foi possível perceber que os alunos fizeram uso das constatações dos primeiros passos da proposta investigativa e assim puderam estabelecer uma forma de encontrar uma solução para o problema em questão. Com isso, tangenciando conhecimentos/saberes matemáticos de natureza combinatorial, algorítmica e de maximização.

Considerações Finais

Essa experimentação mostra uma alternativa para se trabalhar a teoria de Grafos a partir de uma proposta baseada no ensino por investigação. No decorrer da construção dessa experimentação, surgiram peculiaridades que nos fizeram validar a inserção do ensino por investigação dentro do ambiente de sala de aula. Por exemplo, ao propor essa atividade, buscamos trabalhar com problemas de minimização de dados e coleta de informações. Porém, ao aplicar a proposta, visualizamos a viabilidade de incluir a maximização, baseada em percursos menos econômicos, e o estudo de Grafos Eulerianos. Essa experimentação, agora pensada como atividade e aplicação, esteve centrada no processo a ser realizado pelo aluno e na busca de uma construção de soluções. O principal objetivo não foi buscar a unicidade de resposta ao problema, mas sim o envolvimento do aluno em todos os procedimentos; em particular, realizar a inserção do Algoritmo de Dijkstra.

A atividade investigativa coloca o aluno no centro do processo e traz autonomia para que o mesmo experimente e investigue sobre determinado assunto. Além disso, a criação do problema esteve relacionada com a realidade dos alunos, o que promoveu um envolvimento cercado de indagações e tentativas.

Mesmo Grafos não aparecendo como um conteúdo obrigatório para a Educação Básica é notório que um contato com essa abstração Matemática pode desencadear no aluno a capacidade de explorar e experimentar novos conhecimentos: por isso, acreditamos ser relevante a discussão e proposição de estruturas ao tema.

A importância crescente das noções de conhecimentos matemáticos, inclusive abstrações matemáticas, leva-nos a refletir que o tema Grafos poderia fazer parte da realidade da Educação Básica. A exploração e experimentação deste assunto levam os alunos a pensarem a Matemática consonante ao raciocínio lógico e crítico.

Finamente, espera-se que momentos vivenciados em uma proposta de ensino por investigação seja a entrada para a perspectiva de uma Matemática integralizada, onde os alunos tenham oportunidade de explorar atividades matemáticas que fomentem o diálogo entre diferentes aspectos da Matemática. Imitando, com isso, o trabalho de um matemático profissional, que ao iniciar em um problema não vê de forma compactada suas ferramentas.

Agradecimentos

Agradecemos as contribuições de Charles Guidotti (FURG/SAP), Catia Maria dos Santos Machado (FURG) e referee.

Referências

ASSIS, D.F.C. **Resolução de problemas via Teoria de Grafos**: uma possibilidade de tornar a Matemática mais atraente na Educação Básica. São João Del-Rei, 2017. Dissertação (Mestrado em Matemática). Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150400203>. Acesso em 20 de fevereiro de 2018.

BONDY, J.A. and MURTY, U.S. Rama. **Graph theory with applications**. MacMillan, 1976.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática. 3. ed. Brasília: MEC, 1998.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Ensino Médio e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacional para o Ensino Médio** (PCNEM): Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília. MEC, 2000

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/02/bncc-20dez-site.pdf > Acesso em 30 de março de 2018.

CORRADI, D.K.S. **Investigações Matemáticas**. Revista da Educação Matemática da UFOP, Vol I, 2011 - XI Semana da Matemática e III Semana da Estatística, 2011. Disponível em: <http://www.cead.ufop.br/jornal/index.php/redumat/article/view/346 > Acesso em 12 fevereiro de 2018.

JURKIEWICZ, S. **Grafos – Uma Introdução**. (2009). Disponível em: <www.obmep.org.br/docs/apostila5.pdf> Acesso em 3 de março de 2018.

NEGRI, M.A.S. **Caminhos em um Grafo e o Algoritmo de Dijkstra**. Florianópolis, 2017. Dissertação (Mestrado em Matemática). Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150661376> Acesso em 20 de fevereiro de 2018.

NOGUEIRA JÚNIOR, D.C. **Grafos e problemas de Caminhos**. Florestal, MG, 2017. Dissertação (Mestrado em Matemática) Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150942197> Acesso em 20 de fevereiro de 2018.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

SANTOS, J.P.O.; MELLO, M.P. e MURARI, I.T.C. **Introdução à Análise Combinatória**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.

SPINILLO, A.G. et al. **Formulação de Problemas Matemáticos de Estrutura Multiplicativa por Professores do Ensino Fundamental**. Bolema, Rio Claro (SP), v. 31, n. 59, p. 928-946, dez. 2017. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/bolema/v31n59/0103-636X-bolema-31-59-0928.pdf> Acesso em 25 de julho de 2018.

VIEIRA, G.; ALEVATTO, N.S.G. **Tecendo relações entre resolução de problemas e investigações matemáticas nos anos finais do ensino fundamental**. Anais do Encontro de Produção Discente PUCSP/Cruzeiro do Sul. São Paulo. p. 1-13. 2012. Disponível em: <http://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/epd/article/view/515> Acesso em 10 de fevereiro de 2018.

Texto recebido: 23/02/2018
Texto aprovado: 24/08/2018