ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i1p277-299

O estudo de Combinatória no ensino médio: uma análise das organizações matemáticas no livro didático

The study of Combinatory in high school: an analysis of mathematical organizations in the textbook

ALAN GUSTAVO FERREIRA[1]
FERNANDO EMÍLIO LEITE DE ALMEIDA[2]

Resumo

Este estudo tem por objetivo caracterizar os saberes relativos ao conteúdo de Combinatória no livro didático de matemática do Ensino Médio sob a ótica das praxeologias matemáticas. O marco teórico adotado é a Teoria Antropológica do Didático, desenvolvida por Chevallard e colaboradores. Trata-se de uma pesquisa de cunho qualitativo do tipo documental. A implementação da metodologia possibilitou identificar, de forma explícita, os tipos de tarefas e as técnicas que permitem cumpri-las e tecnologias que justificam essas técnicas. De forma geral, o livro didático apresenta subsídios suficientes para que o aluno possa compreender a distinção dos problemas de contagem da Combinatória, embora se reconheça que outras técnicas podem ser utilizadas na realização dos tipos de tarefas propostos.

Palavras-chave: *Combinatória, Teoria Antropológica do Didático, Livro Didático.*

Abstract

This study aims to characterize the knowledge about the content of Combinatorics in the didactic textbook of mathematics in High School from the point of view of mathematical praxeologies. The theoretical framework adopted is the Anthropological Theory of Didactics, developed by Chevallard et al. It is a qualitative research of the documentary type. The implementation of the methodology made it possible to identify, explicitly, the types of tasks and the techniques that allow them to be fulfilled and the technologies that justify these techniques. In general, the textbook presents sufficient subsidies so that the student can understand the distinction of the counting problems of the Combinatorial, although it is recognized that other techniques can be used in the accomplishment of the types of tasks proposed.

Keywords: *Combinatorics, Anthropological Theory of Didactics, Textbook.*

[1] Mestrando em Educação em Ciências e Matemática – Universidade Federal de Pernambuco – Centro Acadêmico do Agreste. Professor da Secretaria de Educação de Pernambuco – alan.gustavo@hotmail.com
[2] Doutor em Ensino de Ciências e Matemática. Professor do Instituto Federal de Pernambuco e do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática – UFPE/CAA – fernandoemilioleite@yahoo.com.br

Introdução

Os problemas em Educação Matemática são diversos e de diferentes naturezas. No campo da Combinatória, por exemplo, esses problemas parecem ser ainda mais emblemáticos. Estudos como os de Ferreira, Rufino e Silva (2016) e Esteves (2001) têm reforçado a ideia da dificuldade de alunos, de diferentes níveis, na compreensão dos problemas e na aquisição dos conceitos concernentes a esse campo matemático.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1997) indicam a importância do aprendizado de Combinatória desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Essa ideia também tem sido reforçada pela Base Nacional Comum Curricular do Ensino Fundamental (BRASIL, 2017). Apesar dessas orientações, é possível observar que este conhecimento vem sendo sistematizado na sala de aula no último ano do Ensino Fundamental e de maneira mais aprofundada no Ensino Médio.

Nessa perspectiva, Borba (2010), em suas pesquisas, argumenta que desde o início do processo de escolarização deve-se trabalhar com variadas situações combinatórias e que a resolução de problemas de Combinatória possibilita ricos desenvolvimentos conceituais, não apenas específicos à Matemática, mas, também, de outras áreas do conhecimento.

As investigações que se tem desenvolvido no âmbito do ensino e da aprendizagem das noções de Combinatória têm experimentado durante os últimos anos no Brasil uma evolução significativa. Um levantamento bibliográfico realizado por Silva e Pessoa (2015b) em artigos científicos publicados em anais de eventos científicos nacionais e internacionais realizados em território nacional, na área da educação matemática, no período de 2009 a 2013, comprova a evolução não apenas quantitativa, mas também qualitativa desses trabalhos que abordam o campo da Combinatória, se comparado a um estudo de mesmo impacto realizado por Borba, Rocha, Martins e Lima (2009) no qual o recorte temporal se deu do ano 2000 a 2008.

No contexto das investigações sobre livros didáticos, tem-se observado que esse tipo de estudo tem figurado como uma importante temática em pesquisas na área da educação matemática, especialmente ligadas à Combinatória como, por exemplo, os trabalhos de Silva e Pessoa (2015a), Fonseca *et al*. (2014), Oliveira e Coutinho (2013), Gomes e Gitirana (2011) e Barreto e Borba (2010), que estudaram esse objeto matemático, presente nos livros didáticos, sob diferentes enfoques.

O fato das pesquisas que se respaldam na análise de livros didáticos ocuparem posição de destaque, no contexto da educação matemática, não se dá forma desconexa. Esse recurso didático é parte integrante da cultura escolar e um dos recursos mais utilizados não apenas no processo de ensino e aprendizagem, em todos os níveis de ensino, mas também para determinar conteúdos e até mesmo estabelecer estratégias de ensino (SILVA e PESSOA, 2015a; FONSECA *et al.*, 2014).

Considerando a importância do livro didático como recurso integrante do processo de ensino e aprendizagem no âmbito das escolas brasileiras e, não raro, sendo o único recurso disponível e/ou utilizado nessas escolas, faz-se necessário investigar como a Combinatória está estruturada e organizada nesses livros destinados às classes de matemática. Apesar dos esforços concentrados em abordar essa temática, como já apontado anteriormente em diversos estudos, entendemos ainda ser necessário haver um maior investimento a fim de que outros enfoques sejam trazidos à luz e, assim, agregar importantes contribuições e reflexões nessa área.

Assim, esta investigação procura responder, de forma mais geral, a seguinte pergunta: Como os saberes relativos ao conteúdo de Combinatória estão apresentados no livro didático de Matemática do Ensino Médio?

Para estudar as condições e as características do conteúdo de Combinatória, presentes no livro didático de Matemática, sentimos a necessidade de recorrer a um modelo teórico. Entre as manifestações que emergem das tendências em Didática da Matemática, surge a Teoria Antropológica do Didático (TAD), originalmente desenvolvida por Chevallard (1999), cujo objetivo primeiro de investigação é a análise da atividade matemática escolar com suas relações humanas e enquadradas em certas instituições sociais. Este referencial teórico tem provado ser uma poderosa ferramenta para análise, por exemplo, de práticas docentes e de livros didáticos (ALMOULOUD, 2015).

A escolha da TAD como aporte teórico da investigação em tela foi motivada pelo fato de que essa teoria permite descrever e analisar os saberes matemáticos propostos para realização deste estudo. Servimo-nos também dessa teoria como referencial metodológico, pois ela aponta um percurso metodológico, possibilitando modelizar os saberes e as atividades matemáticas que estão dispostos no livro didático, favorecendo a organização dos dados analisados.

O princípio fundamental da TAD consiste no fato de que toda atividade humana regularmente feita pode descrever-se como um modelo único, denominado praxeologia (CHEVALLARD, 1999). As noções de tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria, mobilizadas para certo tipo de tarefa, constituem uma organização praxeológica ou organização matemática, tornando-se ferramenta fundamental para modelizar qualquer atividade matemática. Essas noções serão aprofundadas, posteriormente, no marco teórico deste estudo.

Dessa maneira, o presente estudo propõe como objetivo principal caracterizar os saberes relativos ao conteúdo de Combinatória no livro didático de matemática do Ensino Médio; de maneira especial, centra-se na análise sobre as atividades matemáticas em torno do estudo de Combinatória sob a ótica das praxeologias.

De modo mais específico, esse estudo pretende descrever e analisar as organizações matemáticas – os tipos de tarefas, as técnicas, as tecnologias e as teorias, bem como procura classificar essas organizações matemáticas a partir do grau de complexidade de seus elementos.

Para alcançar os objetivos apontados acima, o referido trabalho, na sua fundamentação teórica, investirá inicialmente em apresentar e discutir a Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1999) em seus aspectos gerais, dando enfoque à noção de praxeologia, objeto de análise do presente estudo. Detalhamos na segunda parte do referencial teórico as ideias que dão sustentação aos problemas de contagem dos tipos Arranjo, Permutação e Combinação, tipos de problemas mais tratados no âmbito do Ensino Médio, etapa de escolarização a qual pretendemos atingir. Na sequência, será demarcado o percurso metodológico: inicialmente investiremos em caracterizar e justificar a opção metodológica deste estudo para, em seguida, contemplarmos as etapas da pesquisa e os critérios de análise. Por fim, nos dedicaremos à apreciação, análise e discussão dos resultados.

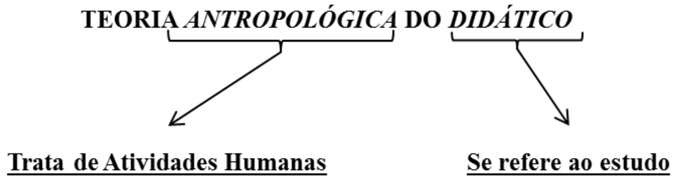
Teoria Antropológica do Didático

A Teoria Antropológica do Didático (TAD) foi inicialmente idealizada pelo investigador francês Yves Chevallard no final da década de 1980 com as primeiras teorizações sobre Transposição Didática (TD). A priori, o conceito de TD era entendido como corpo teórico, passando, mais tarde, a ser incorporada no marco teórico da TAD.

A TAD está inscrita dentro do programa de investigação denominado "programa epistemológico" que tem sua origem nos trabalhos de Guy Brousseau (BOSCH, 2000). A característica principal do programa epistemológico consiste em considerar que o objeto primeiro de investigação da didática é a atividade matemática tal como se realiza em distintas instituições da sociedade.

Sobre a TAD, Chevallard (1992) coloca que ela deve ser encarada como um desenvolvimento e uma articulação das noções cuja elaboração visa permitir de maneira unificada um grande número de fenômenos didáticos, que surgem no final de múltiplas análises. Dessa forma, a TAD situa a atividade matemática e, por conseguinte, o estudo da matemática, dentro do conjunto das atividades humanas e de instituições sociais. Essa afirmação pode muito bem justificar a razão pela qual o autor se utilizou do termo "antropológico". O esquema a seguir sintetiza o enfoque da TAD e os motivos pelos quais recebe esse nome.

Figura 1: Esquema sintetizador do enfoque da TAD



Fonte: Elaboração própria dos autores

O postulado básico dessa teoria consiste em considerar que toda atividade humana regularmente realizada pode descrever-se como um modelo único, que se resume com a palavra *praxeologia*, negando a visão particularista do mundo social e incluindo a atividade matemática dentro de um modelo mais amplo de atividade humana (CHEVALLARD, 1999). Assim, uma praxeologia que descreve uma atividade matemática ou o saber que dela emerge se chama *praxeologia matemática* ou *organização matemática* (OM). A esse respeito, Bosch assinala que:

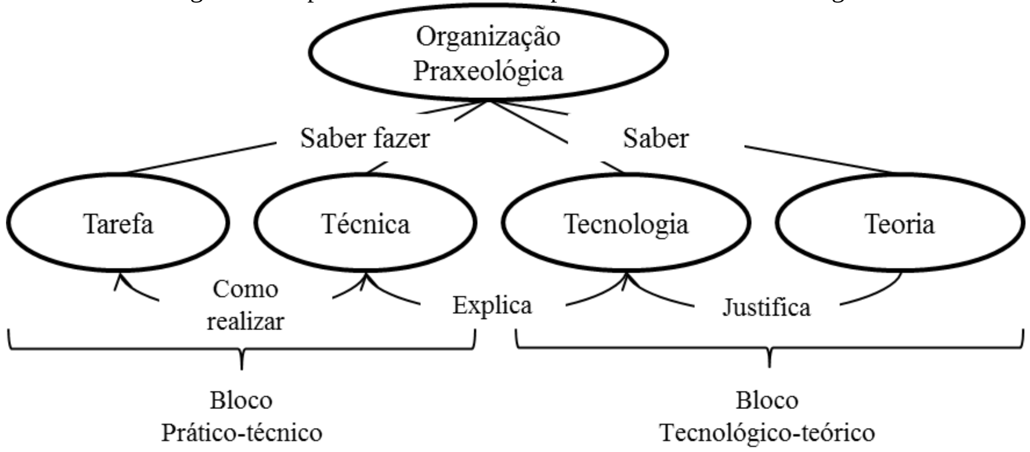
> Uma organização matemática é uma entidade composta por: *tipos de problemas* ou *tarefas problemáticas*; *tipos de técnicas* que permitem resolver os tipos de problemas; *tecnologias* ou discurso ("logos") que descrevem ou explicam as técnicas; uma *teoria* que fundamenta e organiza os discursos tecnológicos. (BOSCH, 2001, p. 16, grifo da autora).

Mais precisamente, numa organização matemática é possível distinguir dois aspectos inseparáveis que podem ser definidos a partir dos radicais etimológicos da própria palavra *praxeologia*:

- O nível da *prática* ou *<u>práxis</u>* ou do *saber fazer*, que engloba um certo tipo de tarefas e questões que se estudam, assim como as técnicas para resolvê-los. Este primeiro bloco se denomina *<u>bloco prático-técnico</u>*;

- O nível do *logos* ou do *saber*, em que estão situados os discursos racionais sobre a prática que descrevem, explicam e justificam as técnicas que se utilizam, e que recebe o nome de tecnologia. Também dentro do *saber*, aparece um segundo nível de descrição, explicação e justificativa que se denomina de *teoria*. Este segundo bloco se denomina *bloco tecnológico-teórico*. O mapa conceitual a seguir organiza de forma sintética a estrutura e os componentes de uma praxeologia.

Figura 2: Mapa Conceitual dos componentes de uma Praxeologia



Fonte: Elaboração própria dos autores

A partir da noção de praxeologia, Bosch (2001) entende que fazer matemática consiste em ativar uma organização matemática, isto é, resolver determinados tipos de tarefas com determinados tipos de técnicas (o “saber fazer”) de maneira inteligível, justificada e fundamentada (mediante o “saber”). Esse trabalho pode conduzir a construção de novas organizações matemáticas ou, simplesmente, a reprodução de organizações previamente construídas. Nessa perspectiva, a autora ainda advoga que “Ensinar e aprender matemática corresponde à atividade de reconstrução de organizações matemáticas para poder utilizá-las em novas situações e sob diferentes condições” (BOSCH, 2000, p. 16).

A raiz da noção de praxeologia se encontra nas noções solidárias de *tarefa* t, e de *tipos de tarefas* T. Quando uma tarefa t faz parte de um tipo de tarefas T, se escreverá $t \in$ T. Segundo Chevallard (1999), na maioria dos casos uma tarefa se expressa geralmente por um verbo como, por exemplo, *limpar* a casa, *desenvolver* uma expressão literal dada, *dividir* um inteiro por outro, *contar* a quantidade de objetos de uma coleção finita, etc.

Diante dessas considerações, podemos afirmar que a noção de tarefa, ou melhor, do tipo de tarefa, supõe um objeto relativamente preciso. Isso implica dizer que, o verbo em si pode caracterizar um tipo gênero de tarefa, mas ele apenas não é capaz de caracterizar um tipo de tarefa. Por exemplo, *contar* representa um gênero de tarefa. Mas *contar*, simplesmente, não haveria tarefa. Mas, se dizemos *contar quantos anagramas podem ser formados com as letras da palavra ESCOLA* teremos um tipo de tarefa.

Podemos dizer que se um tipo de tarefa T é considerado em certas instituições é porque existe uma *técnica* τ ou um número limitado de técnicas que permitem não apenas resolver essa tarefa, mas também resolver muito mais tarefas do mesmo tipo.

É muito comum que numa instituição, a respeito de certo tipo de tarefas, se reconheça apenas uma técnica, conhecida como técnica canônica e exclua técnicas alternativas que podem existir em outras instituições. Esta exclusão tem relação com a ilusão de "naturalidade" das técnicas institucionais. Pensando em situações de ensino e aprendizagem no âmbito da matemática, professores que desconheçam ou não reconheçam a validade de técnicas alternativas na resolução das tarefas propostas além daquelas postas por ele, pode acabar restringindo o arsenal cognitivo dos estudantes.

Nenhuma técnica pode sobreviver com normalidade em uma instituição se não aparece como uma maneira de fazer ou proceder corretamente, compreensível e justificada. Por tanto, a existência de uma técnica pressupõe que existe em seu entorno um discurso interpretativo e justificativo da técnica, que é o que chamamos de *tecnologia* θ. A esse respeito, Chevallard (1999, p. 4) considera que

> O estilo de racionalidade posta em jogo varia, é claro, no espaço institucional e, em uma determinada instituição, à beira da história desta instituição, de modo que uma racionalidade institucionalmente dada poderá aparecer... como pouco racional em outra instituição.

Ainda sobre tecnologia θ, Chevallard (1999) afirma que em uma instituição I, qualquer que seja o tipo de tarefas T, a técnica τ relativa a T está sempre acompanhada de ao menos um embrião ou mais frequentemente ainda, de um vestígio de tecnologia θ e que, em muitos casos, alguns elementos tecnológicos estão integrados na técnica. Câmara dos Santos e Bessa de Menezes (2015) afirmam que quando em uma instituição I existe, em princípio, somente uma técnica (t) que é reverenciada, reconhecida e empregada, essa técnica adquire um papel de "autotecnológica", ou seja, não irá necessitar de justificativas, pois essa é a melhor maneira de se fazer nesta instituição I. Já Santos e Freitas (2017) defendem que, em dado momento ou instituição, uma determinada técnica pode ser uma tecnologia e, uma tecnologia que justifica a técnica utilizada pode, em outra etapa da aula ou em outro ano escolar, passar a ser uma técnica.

Além de justificar a técnica e torná-la inteligível, a tecnologia tem a função de contribuir para modificar a técnica com a finalidade de ampliar seu alcance e, o que é mais importante, tornar possível a produção de novas técnicas. Também fazem parte da tecnologia associada a uma técnica as proposições que descrevem seu alcance, sua relação com outras técnicas, as possíveis generalizações e as causas de suas limitações.

Toda tecnologia precisa também de uma justificação já que suas afirmações, mais ou menos explícitas, pode se pedir uma razão, uma explicação. Passa-se, então, a um nível superior de justificação-explicação-produção, que chama *teoria* Θ, que tem para a tecnologia o mesmo papel que esta tem para a técnica, ou seja, uma tecnologia da tecnologia. A esse respeito, Almeida (2016, p. 99) enfatiza que

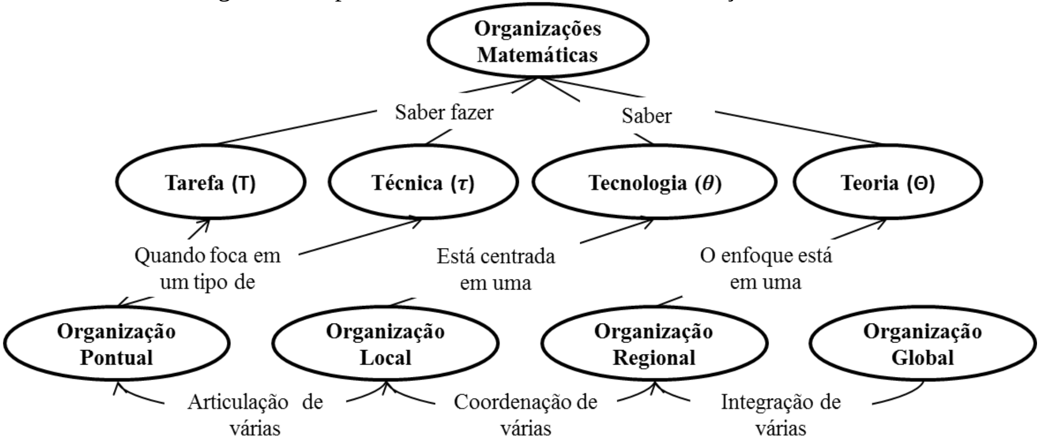
> a teoria assume para a instituição ou para a pessoa uma função, no caso, teórica para justificar e esclarecer. No entanto, os caminhos trilhados para tornar efetiva essa função não têm sido tão “transparentes”, pois a prática educacional tem mostrado uma grande quantidade de abstração na apresentação da teoria por parte dos professores e na disposição dela (da teoria) nos livros didáticos.

Por sua vez, Chevallard (1999) introduziu a distinção de diferentes tipos de Organizações Matemáticas (OM), de acordo com o grau de complexidade de seus componentes:

- ✓ *Organizações Pontuais* (OMP): Elas são geradas pelo que é considerado na instituição como um único tipo de tarefa e é definido a partir do bloco técnico-prático. Neste primeiro tipo de organização, os tipos de tarefas e as técnicas têm um papel claro e predominante. Além disso, raramente se encontram OMP já que, geralmente, uma teoria responde a várias tecnologias, cada uma das quais, a sua vez, justifica e torna inteligível várias técnicas correspondentes a vários tipos de tarefas. Ruiz Olarría (2015) advoga que é difícil encontrar para as OMP um discurso tecnológico-teórico que as descrevam, estruturem e justifiquem de forma mais ou menos sistemática;
- ✓ *Organizações Locais* (OML): É o resultado da integração de várias organizações pontuais. Em cada OML, o discurso tecnológico assume o protagonismo, já que ele serve para justificar, explicar, relacionar entre elas e produzem as técnicas de todas as OMP que a compõem. Neste caso, a técnica perde o *status* de autotecnológica;
- ✓ *Organizações Regionais* (OMR): Obtida mediante a coordenação, articulação e posterior integração de várias organizações locais a uma teoria matemática em comum. Esta integração implica que o discurso teórico assuma o papel central;
- ✓ *Organizações Globais* (OMG): Emergem adicionando várias organizações regionais da integração de diferentes teorias.

O mapa conceitual a seguir procura sintetizar os elementos de uma OM bem como busca fazer a distinção entre as OM a partir do nível de complexidade desses elementos.

Figura 3: Mapa Conceitual dos elementos e distinção de OM



Fonte: Elaboração própria dos autores

Combinatória e suas técnicas de contagem

Os princípios elementares de contagem constituem a base da Combinatória. Os aspectos mais rudimentares dessa ideia estão intrinsecamente ligados à vida cotidiana das pessoas e são utilizados nas mais diversas atividades humanas, desde as mais simples até as mais complexas. Em épocas primitivas, tinha-se algum senso numérico de acréscimo ou de retirada marcados com objetos concretos até chegar os números naturais. A partir daí, a ideia de contar evolui de um processo meramente empírico para um processo mental, no qual os mascadores são abstratos. Contar, então, passou a ser enumerar.

Na imperiosa necessidade de se fazer evoluir cada vez mais essa ideia, já que o número de elementos de um conjunto pode ser muito grande e que o procedimento vai para além de uma simples enumeração, surgem os Princípios Aditivo e Multiplicativo (também chamado de Princípio Fundamental da Contagem). O primeiro remete a situações que se pode realizar uma decisão de maneiras m e a outra, de n e não há como realizar as duas simultaneamente, o total é $m+n$. O segundo aplica-se a situações que se pode decompor em duas ou mais decisões sucessivas e independentes. Se em duas, com m maneiras para a primeira e n para a segunda, tem-se o produto $m \cdot n$.

Embora a Combinatória tenha emergido das bases da aritmética, não é qualquer contagem que envolva a enumeração ou mesmo a simples aplicação das regras da soma ou do produto que caracteriza um problema desse campo (BENÍTEZ e BRAÑAS, 2001). Partindo desse pressuposto, Borba *et al* (2015b, p. 1350) defendem que "A Combinatória estuda técnicas de contagem – direta e indireta – de agrupamentos possíveis, a partir de elementos dados, que satisfaçam a determinadas condições.". As autoras ainda reforçam a ideia de que a contagem de problemas combinatórios vai além de uma mera enumeração de objetos expostos, pois as contagens realizadas nesse campo devem atender a certos critérios.

Santos, Mello e Murari (2008) e Morgado *et al* (2016) colocam que há, basicamente, dois tipos de problemas nesse campo: os problemas de contagem e os de existência. Os primeiros, que contam ou classificam os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas, e os segundos, que buscam demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições.

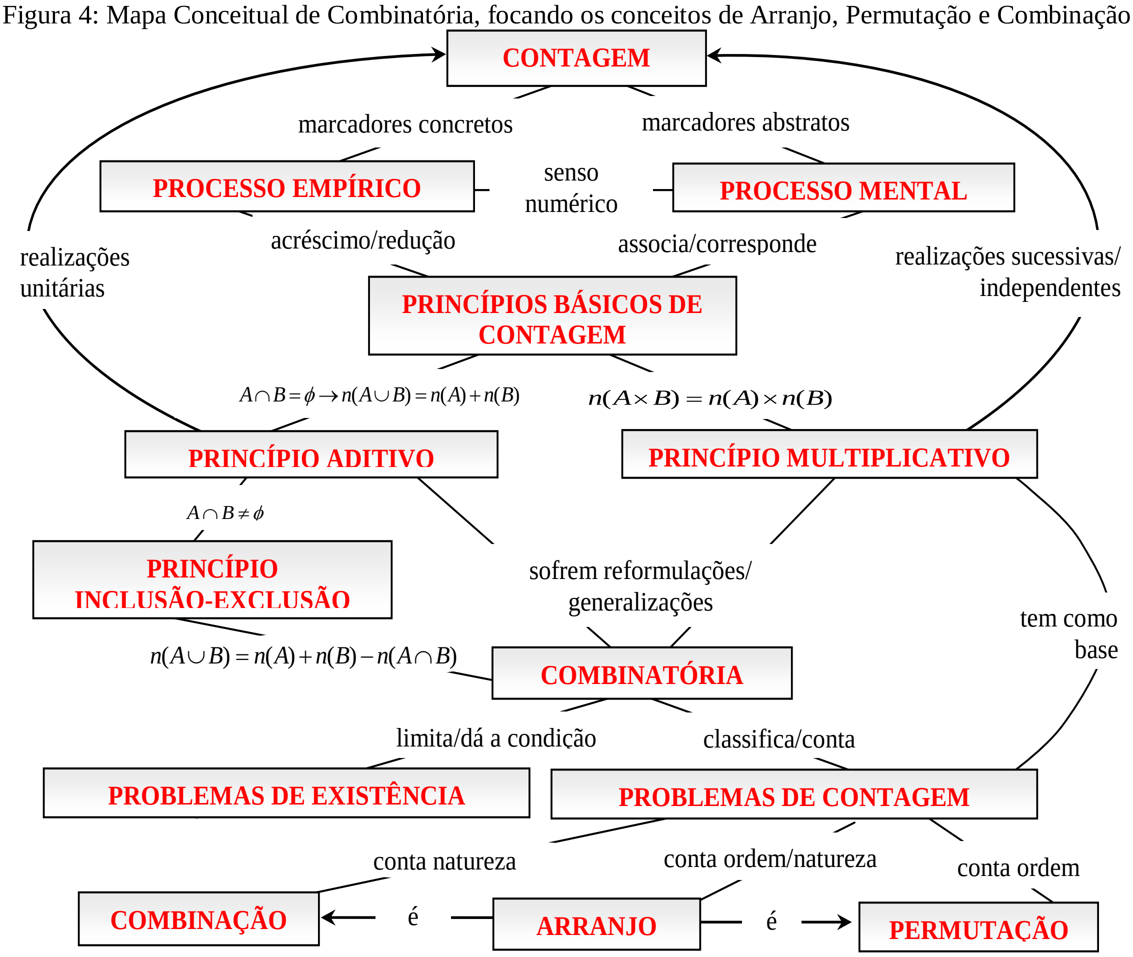
Com foco nos problemas de contagem, que buscam analisar as diferentes maneiras de dispor os elementos de um conjunto: a natureza e a ordem dos elementos, chegam-se aos conceitos de Arranjo, Permutação e Combinação, cujas aplicações estão embasadas no Princípio Multiplicativo. Rufino (2015) adverte que aquilo que está sendo contado, interfere na forma de contar.

Buscando caracterizar esses problemas de contagem a partir das ideias de ordem e natureza apresentadas por Merayo (2001), Silva e Pessoa (2015b) reforçam que tais significados foram considerados como característicos do pensamento combinatório e contribuem para a reflexão teórica da necessidade de se considerar esse conjunto de significados no ensino e aprendizagem da Combinatória no Ensino Básico. A seguir, apresentaremos as definições desses tipos de problemas baseadas em Merayo (2011).

Denominamos Arranjo Simples a todo agrupamento ordenado formado por *n* elementos tomados de um conjunto de *m* elementos distintos, de maneira que dois agrupamentos são considerados distintos se diferem em algum de seus elementos ou, se tendo os mesmos elementos, diferem pela ordem em que estão colocados.

Recebe o nome de Permutação Simples de *m* elementos, cada um dos distintos agrupamentos que pode formar-se, de maneira que cada um contenha os mesmos *m* elementos, divergindo apenas pela ordem de colocação desses *m* elementos. Já as Combinações Simples são agrupamentos formados de *n* elementos tomados de um conjunto de *m* elementos distintos, tal que dois deles se consideram distintos se diferem em algum de seus elementos. Neste caso, dois grupos são iguais se contêm os mesmos elementos, ainda que em distinta ordem. Apresentamos, a seguir, uma síntese do sistema de informação da Combinatória.

Figura 4: Mapa Conceitual de Combinatória, focando os conceitos de Arranjo, Permutação e Combinação



Fonte: Rufino (2015) *apud* Ferreira, Rufino e Silva (2016, p. 314)

Metodologia

Trata-se de uma pesquisa qualitativa com corte descritivo e interpretativo (MOREIRA, 2011; BOGDAN E BIKLEN, 2010) do tipo documental (SEVERINO, 2007; PÁDUA, 2004) sobre a Organização Matemática em torno do conteúdo de Combinatória, mais especificamente dos problemas de contagem do tipo Permutação, Combinação e Arranjo, proposta por um livro didático de Matemática do Ensino Médio adotado por uma escola da rede pública do estado de Pernambuco para o triênio 2018 a 2020.

Os critérios adotados para a análise do livro didático levam em conta dois enfoques norteadores concernentes às OM propostas pelo livro didático:

1. A primeira etapa de categoria diz respeito à caracterização das organizações matemáticas em si, ou seja, a descrição dos tipos e subtipos de tarefas, técnicas, tecnologias e as teorias;

2. No segundo momento, buscamos classificar as organizações matemáticas de acordo com o grau de complexidade de seus elementos que podem ser distinguidas como OMP, OML, OMR ou OMG.

Vale ressaltar que este estudo não tem por objetivo atribuir juízo de valor ou mesmo de avaliar no sentido de enaltecer ou depreciar a obra em análise, tampouco há interesse em estabelecer comparação entre livros didáticos, o que pode muito bem justificar a escolha de apenas uma obra para análise. O objetivo é analisá-la e discuti-la sob a ótica do postulado básico da TAD que é a praxeologia, e mais especificamente, da praxeologia matemática.

Análise e discussão dos resultados

O livro didático objeto de análise é o “Matemática: ciências e aplicações – ensino médio, volume 2, Iezzi *et al*., 2016”. Reforçando mais uma vez que, a coleção, a qual pertence esse livro, foi a escolhida por uma unidade de ensino da rede pública estadual de PE para o triênio 2018 – 2020. Ressaltamos ainda que a escolha de análise apenas do livro volume 2, que corresponde ao livro utilizado no 2º ano dessa etapa de escolarização, se dá pelo fato de que os conceitos de contagem que se pretende investigar estão presentes apenas nesse volume.

De forma geral, o livro está organizado em capítulos identificados por títulos que expressam as temáticas trabalhadas, os quais, por sua vez, são subdivididos em varias seções que estão ligadas à temática maior. Os capítulos do livro e/ou suas respectivas seções geralmente estão estruturados da seguinte maneira:

1. Inicialmente é apresentado um problema do qual parte a discussão do conteúdo;
2. Em seguida são apresentadas algumas técnicas que podem resolver essa situação-problema;
3. Sistematização do conteúdo;
4. São apresentados exercícios resolvidos nos quais os autores buscam abordar a(s) forma(s) de resolver esses exercícios;
5. São propostos exercícios de graus diferentes de dificuldades para se resolver (geralmente essa seção parte de problemas mais simples para os mais complexos);
6. Por fim, há no final de cada capítulo uma seção intitulada de “Desafio” na qual é proposto um problema de natureza diferente das demais apresentadas anteriormente.

Em alguns capítulos ainda consta uma seção chamada de "Aplicações" na qual se encontra uma situação contextualizada de uma possível aplicação do conteúdo.

Dos 11 capítulos que compõe o volume analisado, apenas o capítulo nº 10 é destinado ao conteúdo de Combinatória, que está disposto num total de 26 páginas. Como o objeto de interesse deste estudo está centrado na caracterização das organizações matemáticas em torno do conteúdo de Combinatória, mais precisamente das técnicas de contagem permutação, arranjo e combinação, presentes no livro didático do Ensino Médio, classificaremos os tipos e subtipos de tarefas, totalizadas em 51, em três categorias, de acordo com o tipo de problema de contagem a qual pertencem:

Quadro 1: Distribuição dos subtipos de tarefas das presentes no LD referentes a Permutação Simples

Tipo de problema de contagem	Tipo de tarefa (T)	Subtipo de tarefa (fx)
Permutação Simples	(T_1) Calcular o número de agrupamentos formados a partir de m elementos, nos quais todos os m elementos serão usados, ou seja, esses agrupamentos serão distintos entre si apenas pela ordem dos seus elementos.	(f_{11}) Determinar o número de permutações P_m formadas a partir de m elementos (f_{12}) Determinar o número de permutações formadas a partir de m elementos das quais $m_1, m_2, \dots, m_{m-1} \in m$ devem estar fixados na sequência dos m elementos.; (f_{13}) Determinar o número de permutações formadas a partir de m elementos das quais $m_1, m_2, \dots, m_{m-1} \in m$, devem aparecer na sequência juntos, nessa ordem ou não. (f_{14}) Determinar a posição do elemento $m_x \in m$ na sequência de m elementos.

Fonte: Elaboração própria dos autores

Quadro 2: Distribuição dos subtipos de tarefas das presentes no LD referentes a Arranjo Simples

Tipo de problema de contagem	Tipo de tarefa (T)	Subtipo de tarefa (fx)
Arranjo Simples	(T_2) Calcular o número de agrupamentos formados a partir de m elementos, nos quais poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos, ... , n elementos, com $0 < n < m$. Esses agrupamentos podem ser distintos um dos outros pela ordem ou natureza dos seus elementos.	(f_{21}) Dado m elementos distintos, determinar $A_{m,n}$ (número de arranjos desses m elementos, tomados n a n). (f_{22}) Determinar $A_{m,n} \cdot B_{x,y}$, sendo A o número de arranjos de m elementos, tomados n a n, e B, o número de arranjos de x elementos tomados y a y. (f_{23}) Determinar o número de arranjos $A_{m,n}$ dos quais $m_1, m_2, \dots e/ou\ m_{m-1} \in m$ sempre aparecem ou não aparecem nesses agrupamentos;

Fonte: Elaboração própria dos autores

Quadro 3: Distribuição dos subtipos de tarefas das presentes no LD referentes a Combinação Simples

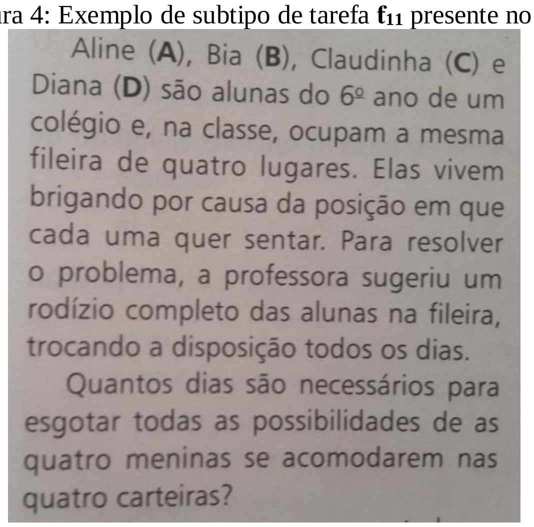
Tipo de problema de contagem	Tipo de tarefa (T)	Subtipo de tarefa (fx)
Combinação Simples	(T_3) Calcular o número de agrupamentos (subconjuntos) formados a partir de m elementos, nos quais poderão ser formados agrupamentos de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos, ... , n elementos, com $0 < n < m$. Esses agrupamentos são distintos uns dos outros apenas pela natureza dos seus elementos, pois a ordem dos elementos não gera novas possibilidades.	(f_{31}) Dado m elementos distintos, determinar $C_{m,n}$ (número de combinações desses m elementos, tomados n a n, com n elementos distintos, escolhidos entre os m). (f_{32}) Determinar $C_{m,n} \cdot D_{x,y}$, sendo C o número de combinações de m elementos, tomados n a n, e D, o número de combinações de x elementos tomados y a y. (f_{33}) Determinar o número de combinações $C_{m,n}$ dos quais $m_1, m_2, \dots e/ou\ m_{m-1} \in m$ sempre aparecem nesses agrupamentos.

Fonte: Elaboração própria dos autores

A partir de agora, concentraremos esforços em apresentar a praxeologia matemática em torno dos subtipos de tarefas encontrados. Chamamos a atenção para o fato de apenas utilizarmos, nessa abordagem, os subtipos dos quais aparecem exemplos ou exercícios resolvidos no LD com a finalidade de mantermos uma estreita relação das praxeologias aqui apresentadas com aquelas que figuram no livro didático.

Em relação ao subtipo de tarefa $\mathbf{f_{11}}$, foram empregadas duas técnicas, $\boldsymbol{\tau_1}$ e $\boldsymbol{\tau_2}$, para resolver a tarefa: $\boldsymbol{\tau_1}$, que compreende a listagem, uma a uma, de todas as possibilidades de agrupamentos, e $\boldsymbol{\tau_2}$, que corresponde à utilização do Princípio Fundamental da Contagem. A figura 4 traz um exemplo do subtipo de tarefa $\mathbf{f_{11}}$ apresentada no livro didático.

Figura 4: Exemplo de subtipo de tarefa $\mathbf{f_{11}}$ presente no LD


Aline (**A**), Bia (**B**), Claudinha (**C**) e Diana (**D**) são alunas do 6º ano de um colégio e, na classe, ocupam a mesma fileira de quatro lugares. Elas vivem brigando por causa da posição em que cada uma quer sentar. Para resolver o problema, a professora sugeriu um rodízio completo das alunas na fileira, trocando a disposição todos os dias.

Quantos dias são necessários para esgotar todas as possibilidades de as quatro meninas se acomodarem nas quatro carteiras?

Fonte: Iezzi *et al.* (2016, p. 235)

Nota-se que se trata de um problema de contagem do tipo permutação, nos quais os agrupamentos formados (nesse caso, a partir do conjunto $m = \{A, B, C, D\}$ são distintos uns dos outros apenas pela ordem de seus elementos e a escolha da técnica $\boldsymbol{\tau_1}$, por parte dos autores, se apoia justamente na intenção do leitor (aluno) perceber essa ideia, como se percebe no seguinte extrato: “Observe que uma disposição difere das demais apenas pela ordem em que as quatro alunas vão se sentar nas quatros carteiras.” (IEZZE *et al*., 2016, p. 235). É preciso explicitar que o nível de alcance dessa técnica torna-se limitado, uma vez que, quando se tem uma grande quantidade de elementos no conjunto *m*, o trabalho com essa técnica pode ser inviabilizado, pois se corre grande risco de esquecer ou contar mais de uma vez algum(ns) dos agrupamentos. Já em relação à técnica $\boldsymbol{\tau_2}$, os autores defendem no início do tópico sobre Agrupamentos simples que o PFC é a principal técnica para resolução de problemas de contagem, inclusive das permutações. A respeito do entorno tecnológico-teórico, os autores não abordam de forma explícita uma justificativa matemática para a técnica. Isso também se estende aos demais subtipos de tarefas. Dessa forma, realizamos algumas inferências no que se refere a apresentação desse entorno, como se pode perceber no quadro-síntese a seguir:

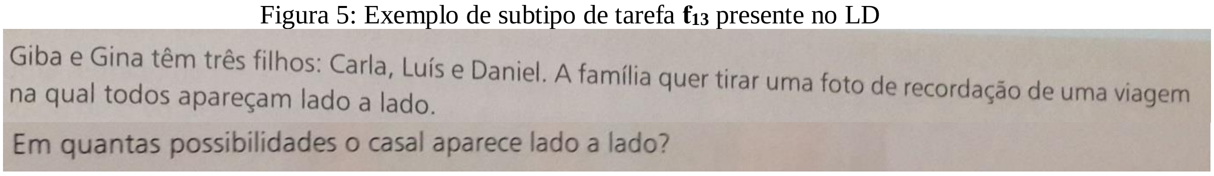
Quadro 4: Síntese da praxeologia matemática em torno do subtipo de tarefa $\mathfrak{f}_{11}$

Subtipo de Tarefa f_{11}	Técnicas	Entorno tecnológico-teórico
Determinar o número de permutações P_m formadas a partir de m elementos	(τ_1) Listagem, uma a uma, de todas as possibilidades de agrupamentos.	Contagem/Enumeração – Aritmética (θ_{CT}).
	(τ_2) Princípio Fundamental da Contagem	Utilização da definição e do conceito de Permutação simples para *m* objetos – Combinatória (θ_{PS}).

Fonte: Elaboração própria dos autores

Sobre o subtipo de tarefa $\mathfrak{f}_{13}$, a técnica utilizada para resolução dessa tarefa foi a do produto fatorial (que é uma consequência do PFC), que chamaremos de $\boldsymbol{\tau_3}$. Essa técnica tem um nível de alcance bastante abrangente, tratando-se de problemas de contagem do tipo permutação. A figura 5 apresenta um exemplo do subtipo de tarefa $\mathfrak{f}_{13}$.

Figura 5: Exemplo de subtipo de tarefa $\mathfrak{f}_{13}$ presente no LD


Giba e Gina têm três filhos: Carla, Luís e Daniel. A família quer tirar uma foto de recordação de uma viagem na qual todos apareçam lado a lado.
Em quantas possibilidades o casal aparece lado a lado?

Fonte: Iezzi *et al*. (2016, p. 237)

É possível perceber que nesse subtipo de tarefa $\mathfrak{f}_{13}$ se exige que a técnica seja trabalhada em mais etapas do que no subtipo de tarefa $\mathfrak{f}_{11}$, já que apesar dos agrupamentos serem formados por todos os 5 elementos de *m*, o número de permutações desses *m* elementos será P_4, pois dois desses elementos (Giba e Gina) deverão ficar sempre lado a lado e, por isso, serão considerados como um elemento único. Após permutar os 4 elementos a ordenar (nessa situação temos ($P_4 = 4! = 24$:), faz-se necessário permutar os elementos que deverão ficar sempre juntos ($P_2 = 2! = 2$), o que significa que para cada um dos agrupamentos, formados a partir de P_4, teremos duas possibilidades diferentes, ou seja, a permutação dos dois elementos que deverão ficar juntos. Assim, o resultado procurado é $P_4 \cdot P_2 = 24 \cdot 2 = 48$ possibilidades de se ordenar os elementos de *m* sob as condições dadas. Assim temos:

Quadro 5: Síntese da praxeologia matemática em torno do subtipo de tarefa $\mathbf{t}_{11}$

Subtipo de Tarefa t_{13}	Técnica τ_3	Entorno tecnológico-teórico
Determinar o número de permutações formadas a partir de m elementos das quais $m_1, m_2, \dots, m_{m-1} \in m$, devem aparecer na sequência juntos, nessa ordem ou não.	Produto fatorial	Utilização da definição e do conceito de Permutação simples para *m* objetos – Combinatória (θ_{PS}).

Fonte: Elaboração própria dos autores

A respeito do subtipo de tarefa $\mathbf{t}_{21}$, os autores propuseram a utilização de duas técnicas para resolução: a técnica $\boldsymbol{\tau}_2$, que se trata da utilização do Princípio Fundamental da Contagem, e a $\boldsymbol{\tau}_4$, que se refere à aplicação direta da fórmula de arranjo simples, ambas as técnicas com um nível de alcance bastante abrangente, já que podem ser aplicadas à resolução de todas as tarefas do subtipo $\mathbf{t}_{21}$ que pode ser conhecida no exemplo a seguir:

Figura 6: Exemplo de subtipo de tarefa $\mathbf{t}_{21}$ presente no LD

Dado o conjunto das vogais V = {a, e, i, o, u}, determine a quantidade de arranjos que podemos formar com três elementos de **V**.

Fonte: Iezzi *et al.* (2016, p. 240)

É possível perceber que características da tarefa acima demarcam um tipo de contagem que se classifica Arranjo Simples, já que os agrupamentos formados a partir de *V* podem ser distintos um dos outros pela ordem ou natureza dos seus elementos. Além disso, o próprio enunciado da tarefa já demarca o tipo de contagem e faz inferir também o tipo de técnica que se deve utilizar como se percebe em "... determine a quantidade de arranjos" Iezzi *et al*. (2016, p. 240). Como, nessa situação, todo arranjo formado é um agrupamento ordenado de três elementos, escolhidos entre os cinco de *V*, fazendo a contagem pela técnica $\boldsymbol{\tau}_2$, teremos 5 possibilidades para a 1ª letra da sequência, 4 para a 2ª letra da sequência e 3 para a 3ª letra da sequência. Multiplicando as possibilidades, obtemos o número de arranjos $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Já realizando a contagem pela técnica $\boldsymbol{\tau}_4$, teremos

$A_{5,3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 60$. O próximo quadro apresenta a síntese da praxeologia do subtipo de tarefa $\mathfrak{t}_{21}$:

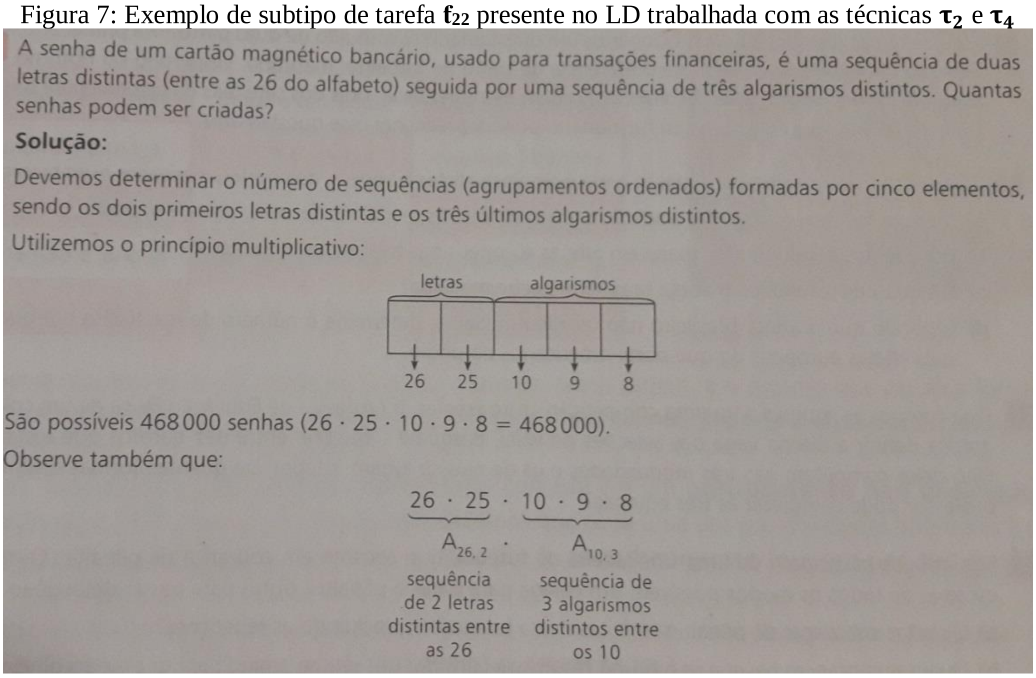
Quadro 6: Síntese da praxeologia matemática em torno do subtipo de tarefa $\mathfrak{t}_{21}$

Subtipo de Tarefa $\mathfrak{t}_{21}$	Técnicas	Entorno tecnológico-teórico
Dado m elementos distintos, determinar $A_{m,n}$ (número de arranjos desses m elementos, tomados n a n).	(τ_2) Princípio Fundamental da Contagem	Utilização da definição e do conceito de Arranjo Simples para m elementos, tomados n a n – Combinatória (θ_{AS}).
	(τ_4) Fórmula de Arranjo Simples	

Fonte: Elaboração própria dos autores

Sobre o subtipo de tarefa $\mathfrak{t}_{22}$, os autores também indicaram as técnicas $\boldsymbol{\tau_2}$ e $\boldsymbol{\tau_4}$ para realização da contagem. Os autores também propuseram a utilização de esquemas resolutivos no momento de se trabalhar com a técnica $\boldsymbol{\tau_2}$. A figura 7 exemplifica esse tipo de situação:

Figura 7: Exemplo de subtipo de tarefa $\mathfrak{t}_{22}$ presente no LD trabalhada com as técnicas $\boldsymbol{\tau_2}$ e $\boldsymbol{\tau_4}$



A senha de um cartão magnético bancário, usado para transações financeiras, é uma sequência de duas letras distintas (entre as 26 do alfabeto) seguida por uma sequência de três algarismos distintos. Quantas senhas podem ser criadas?

Solução:

Devemos determinar o número de sequências (agrupamentos ordenados) formadas por cinco elementos, sendo os dois primeiros letras distintas e os três últimos algarismos distintos.

Utilizemos o princípio multiplicativo:

São possíveis 468 000 senhas ($26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 468000$).

Observe também que:

$$\underbrace{26 \cdot 25}_{A_{26,2}} \cdot \underbrace{10 \cdot 9 \cdot 8}_{A_{10,3}}$$

sequência de 2 letras distintas entre as 26

sequência de 3 algarismos distintos entre os 10

Fonte: Iezzi *et al*. (2016, p. 241)

O quadro a seguir sintetiza a praxeologia do subtipo de tarefa $\mathfrak{t}_{22}$:

Quadro 7: Síntese da praxeologia matemática em torno do subtipo de tarefa $\mathfrak{t}_{22}$

Subtipo de Tarefa $\mathfrak{t}_{22}$	Técnicas	Entorno tecnológico-teórico
Determinar $A_{m,n} \cdot B_{x,y}$, sendo A o número de arranjos de m elementos, tomados n a n, e B, o número de arranjos de x elementos tomados y a y.	(τ_2) Princípio Fundamental da Contagem	Utilização da definição e do conceito de Arranjo Simples para m elementos, tomados n a n – Combinatória (θ_{AS}).
	(τ_4) Fórmula de Arranjo Simples	

Fonte: Elaboração própria dos autores

A respeito do subtipo de tarefa $\mathbf{t}_{31}$, os autores elegeram as técnicas $\boldsymbol{\tau_2}$ e $\boldsymbol{\tau_5}$, que se tratam do Princípio Fundamental da Contagem e da Fórmula de Combinação Simples, respectivamente. É preciso ressaltar que o trabalho com a técnica $\boldsymbol{\tau_2}$, nesse caso, necessita de mais uma etapa, já que, nos problemas desse tipo, a permutação de *m* elementos dá origem a uma única combinação, pois os agrupamentos formados a partir de *m* são distintos um dos outros apenas pela natureza dos seus elementos. Logo, é necessário excluir a quantidade de vezes que um mesmo agrupamento foi contado. Podemos perceber um exemplo de subtipo de tarefa $\mathbf{t}_{31}$ na figura abaixo:

Figura 8: Exemplo de subtipo de tarefa $\mathbf{t}_{31}$ presente no LD

Em uma classe de 30 alunos pretende-se formar uma comissão de três alunos para representação discente no colégio. Quantas comissões distintas podem ser formadas?

Fonte: Iezzi *et al*. (2016, p. 241)

Como podemos constatar, trata-se de um problema de combinação simples. Para se resolver esse exemplo utilizando a técnica $\boldsymbol{\tau_2}$, realizam-se duas etapas: na primeira, se determina o número de comissões formadas levando em consideração a ordem de escolha dos elementos $(30 \cdot 29 \cdot 28)$; por fim, como a ordem não importa, determina-se o número de ordens possíveis para escolher três determinados alunos ($3 \cdot 2 \cdot 1$ ou $P_3 = 3!$). Assim, o número de combinações é $\frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3 \cdot 2 \cdot 1}$ = 4060. Já o trabalho com a técnica $\boldsymbol{\tau_5}$, consiste na aplicação direta da fórmula de combinação simples:

$$C_{30,3} = \frac{30!}{(30-3)!\,3!} = \frac{30!}{27!\,3!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27!}{27! \cdot 6} = 4060$$

Apresentamos a síntese da praxeologia do subtipo de tarefa $\mathbf{t}_{31}$ no quadro a seguir:

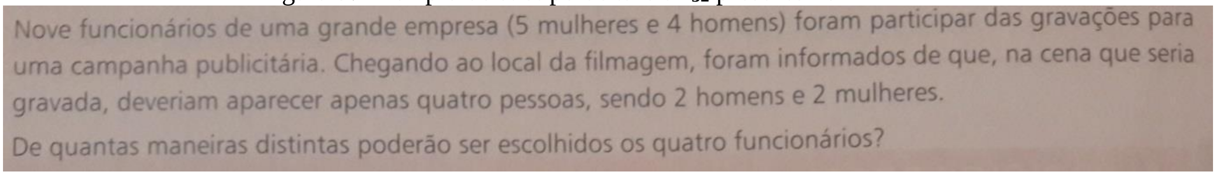
Quadro 8: Síntese da praxeologia matemática em torno do subtipo de tarefa $\mathbf{t}_{31}$

Subtipo de Tarefa t_{31}	Técnicas	Entorno tecnológico-teórico
Dado m elementos distintos, determinar $C_{m,n}$ (número de combinações desses m elementos, tomados n a n, com n elementos distintos, escolhidos entre os m).	(τ_2) Princípio Fundamental da Contagem (τ_5) Fórmula de Combinação Simples	Utilização da definição e do conceito de Combinação Simples para *m* elementos, tomados *n* a *n* – Combinatória (θ_{CS}).

Fonte: Elaboração própria dos autores

Em relação ao subtipo de tarefa $\mathbf{t}_{32}$, os autores aplicaram a fórmula de Combinação Simples ($\boldsymbol{\tau_5}$) no seu processo de resolução. Como justificativa da técnica, utilizaram-se da enumeração de agrupamentos e também do diagrama da árvore de possibilidades. Chamamos a atenção para o fato de que a tecnologia aqui empregada corresponde a técnicas utilizadas, em outros momentos, para a resolução de outros tipos e subtipos de tarefas no campo da Combinatória. A esse respeito, Santos e Freitas (2017) assinalam que, em dado momento ou instituição, uma determinada técnica pode ser uma tecnologia e, uma tecnologia que justifica a técnica utilizada pode, em outra etapa da aula ou em outro ano escolar, passar a ser uma técnica. Temos, na Figura 9, um exemplo do subtipo de tarefa $\mathfrak{t}_{32}$.

Figura 9: Exemplo de subtipo de tarefa $\mathfrak{t}_{32}$ presente no LD

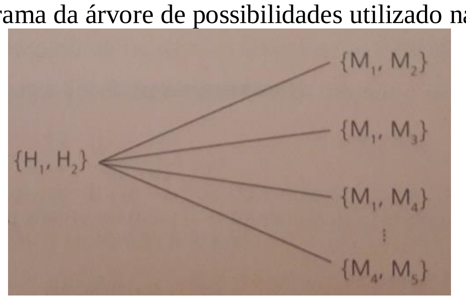


Nove funcionários de uma grande empresa (5 mulheres e 4 homens) foram participar das gravações para uma campanha publicitária. Chegando ao local da filmagem, foram informados de que, na cena que seria gravada, deveriam aparecer apenas quatro pessoas, sendo 2 homens e 2 mulheres.
De quantas maneiras distintas poderão ser escolhidos os quatro funcionários?

Fonte: Iezzi *et al*. (2016, p. 246)

Os autores dividiram o trabalho com a técnica em três momentos: no primeiro momento escolhem-se os dois funcionários homens ($C_{4,2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$). Para justificar o uso da fórmula de Combinação Simples, os autores enumeram as 6 possibilidades na tentativa evidenciar que os agrupamentos formados nesse caso são não ordenados e distintos um dos outros apenas pela natureza dos seus elementos; no segundo momento, é realizado o mesmo procedimento para a contagem das possibilidades das duas funcionárias ($C_{5,2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$); no terceiro momento, antes da contagem do número de possibilidades de composição com as duplas, os autores justificam a escolha da técnica utilizando o diagrama da árvore de possibilidades, como podemos ver na figura 10:

Figura 10: Diagrama da árvore de possibilidades utilizado na θ da $\mathfrak{t}_{32}$ do LD



Fonte: Iezzi *et al.* (2016, p. 246)

Como o diagrama deixa evidente que cada dupla masculina poderá se juntar a qualquer uma das dez duplas femininas, o resultado procurado é $C_{4,2} \cdot C_{5,2} = 6 \cdot 10 = 60$ possibilidades. No próximo quadro, elencamos a síntese da praxeologia relativa ao subtipo de tarefa $\mathfrak{t}_{32}$.

Quadro 9: Síntese da praxeologia matemática em torno do subtipo de tarefa **f_{32}**

Subtipo de Tarefa f_{32}	Técnicas	Entorno tecnológico-teórico
Determinar $C_{m,n} \cdot D_{x,y}$, sendo C o número de combinações de m elementos, tomados n a n, e D, o número de combinações de x elementos tomados y a y.	(τ_5) Fórmula de Combinação Simples	• Listagem, uma a uma, das possibilidades de agrupamento (θ_{CT}); • Diagrama da árvore de possibilidades (θ_{AP}); • Utilização da definição e do conceito de Combinação Simples para m elementos, tomados n a n – Combinatória (θ_{CS}).

Fonte: Elaboração própria dos autores

Em relação à classificação das OM's, quanto ao grau de complexidade de seus elementos, presentes no livro didático, é possível classificar as OM's apresentadas como Organizações Matemáticas Locais, pois o que se observa é a existência da articulação de várias Organizações Pontuais em torno de um mesmo discurso tecnológico. O quadro a seguir sintetiza as Organizações Matemáticas descritas neste estudo.

Quadro 10: Síntese das Organizações Matemáticas apresentadas

Subtipo de Tarefa	Técnicas	Entorno tecnológico-teórico
f_{11}	τ_1	θ_{CT}
	τ_2	θ_{PS}
f_{13}	τ_3	
f_{21} f_{22}	τ_2 τ_4	θ_{AS}
f_{31}	τ_2	θ_{CS}
	τ_5	
f_{32}		

Fonte: Elaboração própria dos autores

Considerações Finais

Tomando como referência o livro didático analisado, podemos concluir que o mesmo aborda trabalhos de elaboração e sistematização de diferentes técnicas para realizar grande parte dos subtipos de tarefas relativos aos problemas de contagem da Combinatória dos tipos Arranjo, Permutação e Combinação. No entanto, para alguns subtipos de tarefas não foram apresentadas essa sistematização de técnicas, embora se possam utilizar técnicas que se amparam nos entornos-tecnológicos descritos. O livro didático também não justifica a existência da maioria das técnicas, o que pode dificultar a avaliação das mesmas quanto aos seus limites de aplicação e potencialidade, por exemplo. Apesar disso, por meio de inferências, é possível justificar a existência de uma determinada técnica a partir do tipo de problema de contagem que se apresenta, já que, aquilo que se está contando (tipo de tarefa), interfere na forma de contar (técnica) (RUFINO, 2015).

Ao que tudo indica, na análise realizada, o livro didático apresenta subsídios suficientes para que o aluno possa compreender a distinção dos problemas de contagem da Combinatória a partir das ideias de ordem e natureza. No entanto, é necessário que, os professores de Matemática, ao lançarem mão de um recurso didático como esse, atentem para os limites e possibilidades de sua utilização, buscando a proposição de técnicas além das apresentadas no material, na tentativa de cada vez mais fazer evoluir as organizações matemáticas num processo contínuo.

Referências

ALMEIDA, F. E. L. de. *O contrato didático e as organizações matemáticas e didáticas*: analisando as relações no ensino de equação do segundo grau a uma incógnita. 2016. 305f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife.

ALMOULOUD, S. A. Teria antropológica do didático: metodologia de análise de materiais didáticos. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. n 42, p. 09-34, 2015.

BARRETO, Fernanda; BORBA, Rute (2010). *Como o raciocínio combinatório tem sido apresentado em livros didáticos dos anos iniciais*. Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática. Salvador.

BENÍTEZ, P. R. A; BRAÑAS, J. R. F. *Introducción a la matemática aplicada* (matemática discreta). Colección Textos Universitarios. Canarias, Litografía A. Romero S, 2001.

BOGMAN, R.; BIKLEN, Sari. *Investigação Qualitativa em educação*: uma introdução à teoria dos métodos. Porto, Portugal: Porto Editora, 2010.

BORBA, R. E. S. R. *O raciocínio combinatório na educação básica*. In: Anais... 10 Encontro Nacional de Educação Matemática. Salvador-BA, 2010.

BORBA, Rute; ROCHA, Cristiane; MARTINS, Glauce; LIMA, Rita. *O que dizem estudos recentes sobre o raciocínio combinatório*. In: Encontro Gaúcho de Educação Matemática, 10. 02-05 jun. 2009, Ijuí. Anais. Ijuí: Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional Rio Grande do Sul.

BOSCH, M. *Un punto de vista antropológico: la evolución de los "instrumentos de representación" en la actividad matemática*. p.15-28, 2000. In: CONTRERAS, L. C. et. al. Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Huelva: Universidad de Huelva, 2001.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. *Base nacional comum curricular*. Brasília, DF, 2017
________. Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática*. 1º e 2º ciclos. Brasília: Secretaria de Ensino Fundamental. 1997

CÂMARA DOS SANTOS, M; BESSA DE MENEZES, M. A teoria antropológica do didático: uma releitura sobre a teoria. *Perspectivas da educação matemática*, Mato Grosso do Sul, Volume 8, Número Temático – 2015

CHEVALLARD, Y. *Conceitos Fundamentais da Didática*: as perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica, 1992. In: Didáctica das matemáticas / Jean Brun. Trad: Maria José Figueredo, Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

_______________. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999.

ESTEVES, I. *Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos – 8ª série do ensino fundamental*. 2000. 203f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro das Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

FERREIRA, A. G; RUFINO, M. A. S; SILVA, J. R. *Os obstáculos epistemológicos em combinatória*: um estudo com os licenciandos em matemática. In: II CONGRESO INTERNACIONAL DE ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS E LA MATEMÁTICA, 1, 2016, Tandil – Argentina. Libro de Atctas. Tandil – Argentina: NIECyT/FCE, 2016, p. 312-319.

FONSECA, S. S. *et al*. Uma reflexão sobre conteúdo Análise Combinatória em dois livros didáticos do ensino médio. *Scientia Plena*, Sergipe, v.10, n. 04, p. 01-08, 2014.

GOMES, Tâmara; GITIRANA, Verônica. *Grandezas numéricas em questões de raciocínio combinatório do 6º ao 9º ano*. Anais da VIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife, 2011.

IEZZI, G. et. al. *Matemática*: ciência e aplicações: ensino médio – volume 2. 9 ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

MERAYO, F. *Matemática Discreta*. Madrid: Paraninfo, 2001.

MOREIRA, M. A. *Metodologias de Pesquisa em Ensino*. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

MORGADO, A. C. et. al. *Análise Combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro : SBM, 2016.

OLIVEIRA, Eliana; COUTINHO, Cileda (2013). *Combinatória nos livros didáticos de matemática dos anos iniciais: uma análise do PNLD 2013*. Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba.

PÁDUA, E. M. M. de. *Metodologia da Pesquisa*: abordagem teórico-prática. 13. ed. São Paulo: Papirus, 2004.

RUFINO, M. A. S. *Aprendizagem Significativa na Resolução de Problemas de Matemática*: o Arsenal Operatório Cognitivo dos Professores do Ensino Básico. 2015. 307 f. Tese (Programa Internacional de Doctorado Enseñanza de las Ciencias) – Departamento de Didácticas Específicas. Universidad de Burgos - Espanha.

RUIZ OLARRÍA, A. *La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria*: de las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza. 2015. 372 f. Tese (Doctorado en Educación) – Facultad de Formación de Profesorado y Educación – Universidad Autonoma de Madrid – Espanha.

SANTOS, C. M.; FREITAS, J. L. M. Contribuições da teoria antropológica do didático na formação dos professores de matemática. *Amazônia Revista de Educação em Ciências e Matemática*. v. 13, n. 27, p. 51-66, 2017.

SANTOS, J. P.; MELLO, M. P.; MURARI, I. T. C. *Introdução à Análise Combinatória*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.

SEVERINO, A. J. (2007). *Metodologia do Trabalho Científico*. 23. ed. São Paulo: Cortez.

SILVA, M. C.; PESSOA, C. A. S. A combinatória em livros didáticos do ensino fundamental. *ZETETIKÉ*, Campinas – SP, v. 23, n. 44, p. 377–394, 2015a.

______________________________. A combinatória: estado da arte em anais de eventos científicos nacionais e internacionais ocorridos no Brasil de 2009 a 2013. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo – SP, v. 17, n. 4, p. 670-693, 2015b.

Texto recebido: 20/08/2018
Texto aprovado: 13/03/2019