

Ensino e Aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo: algumas reflexões a partir de uma revisão sistemática de literatura

Teaching and Learning of the Fundamental Theorem of Calculus: some reflections
from a systematic literature review

JULIANA FRANÇA VIOL PAULIN¹

ALESSANDRO JACQUES RIBEIRO²

Resumo

Neste artigo apresenta-se uma revisão sistemática de literatura, a partir de pesquisas em Educação Matemática que investigaram e discutiram aspectos relacionados ao Teorema Fundamental do Cálculo. A partir disso, busca-se organizar alguns resultados referentes ao ensino e à aprendizagem do Cálculo sob a ótica do Conhecimento Matemático para o Ensino. Primeiramente expõe-se uma categorização dessas pesquisas, focando seus objetivos de investigação e destacando suas similaridades e convergências. Em um segundo momento, a partir de questões que nortearam a leitura e análise, buscam-se por aspectos histórico-epistemológicos e didático-pedagógicos que caracterizam os processos de ensinar e de aprender Cálculo. Nos resultados são apontadas evidências da importância do conceito de função para a compreensão de conceitos relacionados ao Teorema Fundamental do Cálculo e, conseqüentemente, para o ensino e aprendizagem do Cálculo.

Palavras-chave: Teorema fundamental do cálculo, ensino e aprendizagem de cálculo, conhecimento matemático para o ensino, revisão sistemática de literatura.

Abstract

This paper presents a systematic literature review, based on researches in Mathematics Education that investigated and discussed aspects related to the Fundamental Theorem of Calculus. From this, it seeks to organize some results about the teaching and learning of Calculus based on Mathematical Knowledge for Teaching. Firstly, it presents a categorization of researches, focusing on its objectives and highlighting its similarities and convergences. Secondly, based on questions that guided our reading and analysis, searching for historical-epistemological and didactical-pedagogical aspects that characterize the teaching and learning of Calculus. The results show evidences about the importance of the concept of function for the understanding of concepts related to the Fundamental Theorem of Calculus and, consequently, for the teaching and learning Calculus.

¹ Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP), *campus* Rio Claro. E-mail: viol.juliana@gmail.com.

² Doutor em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica (PUC-SP). Professor adjunto no Centro de Matemática, Computação e Cognição (CMCC) da Universidade Federal do ABC (UFABC). E-mail: alessandro.ribeiro@ufabc.edu.br.

Keywords: *Fundamental theorem of calculus, teaching and learning of calculus, mathematical knowledge for teaching, systematic literature review.*

Introdução: problemas relacionados ao ensino e à aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral

O envolvimento com a Educação Matemática nos leva a preocupações que envolvem questões relacionadas ao ensino e à aprendizagem da Matemática. Entretanto, não é necessário estar envolvido diretamente com esta área de pesquisa e ensino para deparar-se com críticas relacionadas à Educação no Brasil, especificamente, inerentes à Matemática. Segundo Marim (2011):

Dentre os muitos problemas que assolam a Educação no Brasil, destaca-se o ensino de Matemática no âmbito da Educação Básica, conforme se constata nos baixos resultados dos alunos brasileiros, tanto em conteúdo como em habilidade, facilmente visualizados no sistema de Avaliação do Ensino Brasileiro (SAEB) e Prova Brasil. (p. 22)

Além disso, para Perez (2004), “a falta de interesse para estudar Matemática pode ser resultante do método de ensino empregado pelo professor, que usa linguagem e simbolismo muito particular, além de alto grau de abstração” (p. 251).

Essas dificuldades com a Matemática na Educação Básica refletem no desempenho dos alunos em diferentes disciplinas na Educação Superior, principalmente no início dos cursos de graduação. Consideramos que a não compreensão de alguns conceitos relacionados ao conteúdo de função, por exemplo, implica em sérias dificuldades nos processos de ensino e de aprendizagem de diferentes conceitos que são abordados em disciplinas na Educação Superior. Nesse sentido, O’Shea, Breen e Jaworski (2016) destacam a importância do conceito de função em cursos de graduação, enfatizando a complexidade da compreensão deste conceito, visto que diversos estudos têm mostrado que os estudantes de graduação têm dificuldades com diferentes aspectos relacionados ao conceito de função e com a noção de variável.

Em Ribeiro (2016) são apresentadas importantes justificativas relacionadas ao ensino de Álgebra e, em especial, aos conceitos inerentes ao conteúdo de função, indicando que “provém tanto da ênfase que é dada a ela [à Álgebra] na Educação Básica, como dos resultados das avaliações em larga escala, que ‘explicitam as deficiências dos estudantes em seus conhecimentos algébrico’ [ênfase no original]” (p. 128). Além disso, podemos identificar a existência de uma descontinuidade entre a Matemática escolar e a

Matemática acadêmica, assim como aponta Farias (2015), ao enfatizar que é preciso “ampliar e aprofundar os debates, tanto a nível prático como teórico, promovendo especialmente a integração dos múltiplos aspectos que aproximam o Ensino Médio da Educação Superior” (p. 47).

Presente em diferentes disciplinas da Educação Superior, seja na Álgebra ou em tantas outras, o conceito de função é importante para a compreensão dos diferentes conceitos abordados nas disciplinas que abrangem os conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral (CDI). Esclarecemos que, quando nos referimos a conceitos de CDI, nos remetemos imediatamente aos conceitos de Limite, Derivada, Integral e também, conseqüentemente, ao Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), visto que este teorema estabelece relações entre duas operações centrais do Cálculo, a derivação e a integração (SEGADAS, 1998; THOMPSON, 1994). Porém, para que se possa alcançar o pleno entendimento desses conceitos, consideramos imprescindível que os estudantes dominem alguns conceitos relacionados ao conteúdo de funções (O’SHEA et al., 2016; VALLEJO; MARTÍNEZ; PLUVINAGE, 2012), como, por exemplo, domínio, imagem, representações gráficas e algébricas dos diferentes tipos de funções estudadas nas disciplinas que envolvem CDI.

Imersos nessas preocupações, no presente artigo desenvolvemos uma revisão sistemática de literatura (MENDUNI-BORTOLOTI; BARBOSA, 2017) a partir de pesquisas em Educação Matemática que investigaram e discutiram aspectos relacionados aos processos de ensino e de aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), sendo que as reflexões e os resultados abordados estão vinculados a um estágio de pós-doutorado³.

Investigações que privilegiam o desenvolvimento de revisões sistemáticas de literatura permitem “conhecer o que a área tem desenvolvido, remetendo-nos a resultados de pesquisas, empíricas e/ou teóricas” (MENDUNI-BORTOLOTI; BARBOSA, 2017, p. 950). Assim, nosso intuito, com os resultados apresentados neste artigo, é destacar a importância do conceito de função no/para o TFC, a partir do que nos dizem as pesquisas foco de nossas análises, bem como discutir aspectos relacionados aos processos de ensino e aprendizagem do TFC por meio de uma reflexão fundamentada no Conhecimento Matemático para o Ensino (CME).

³ Estágio de Pós-Doutorado PNP/DCAPES desenvolvido no período de fevereiro de 2017 a maio de 2018 pela primeira autora do artigo, sob a supervisão do segundo autor, em uma universidade pública do estado de São Paulo, cuja pesquisa teve por principal objetivo investigar o papel do conceito de função nos processos de ensino e de aprendizagem de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral.

Diversos pesquisadores da área de Educação Matemática, como Vallejo et al. (2012), Ribeiro e Cury (2015), O'Shea et al. (2016), Pazuch e Ribeiro (2017), dentre outros, têm centrado esforços em destacar a importância do estudo do conceito de função, enfatizando sua relevância tanto para os processos de ensino e de aprendizagem da Matemática quanto para a Formação de Professores, uma vez que consideram este conceito fundamental

para a compreensão de tópicos variados de Matemática, na modelagem de situações da vida real, na resolução de problemas de outras ciências e para o desenvolvimento do pensamento algébrico e funcional, que dá suporte à aprendizagem de outros assuntos na Matemática e em outras áreas do saber. (PAZUCH; RIBEIRO, 2017, p. 467)

Não obstante a isso, de acordo com o que nos mostra Marin (2009), o ensino de Cálculo Diferencial e Integral apresenta alguns impasses relacionados às dificuldades nos processos de ensino e de aprendizagem, dentre as quais destacamos:

- Cálculo é uma disciplina de transição entre o ensino médio e o ensino superior;
- Cálculo, por ser uma disciplina que, em muitas universidades, está no primeiro semestre e possui grande número de alunos em sala de aula;
- A alta deficiência pela maioria dos alunos ao entrar na universidade, oriunda da sua formação anterior tem prejudicado seu desempenho nas etapas seguintes;
- O aluno vem com formação precária do ensino médio então o professor tenta sanar algumas dificuldades e acaba condensando os conteúdos que devem ser ministrados na disciplina porque a carga horária é insuficiente e com isso compromete esta e outras disciplinas que dependem do Cálculo;
- O professor que ministra aula no curso superior, principalmente em universidades privadas, trabalha como horista e, muitas vezes, ministra muitas aulas em mais de uma universidade não tendo tempo de entrar em contato com novas práticas pedagógicas;
- A grande quantidade de matéria a ser exposta faz com que a aula siga um ritmo acelerado, havendo pouco espaço para o aluno pensar e questionar. (p. 26)

Esses impasses contribuem sobremaneira para as deficiências na formação dos alunos e fazem com que a disciplina de Cálculo seja precedida por aversão e expectativa negativa por parte deles, visto o alto índice de reprovação e evasão. Além disso, as práticas pedagógicas privilegiam o desenvolvimento de aulas expositivas, sem alternativas diferentes que possam contribuir para os processos de ensino e de aprendizagem do Cálculo (MORELATTI, 2001; RICHT, 2010; TREVISAN; MENDES, 2018).

Ao tratar da temática inserida em um curso de Cálculo, temos o TFC como um dos tópicos mais importantes no ensino de Cálculo, já que estabelece a relação entre os conceitos de derivada e de integral. Dada a relevância de tal temática, diferentes pesquisadores desenvolveram investigações com alunos dessa disciplina, pesquisas que privilegiaram aspectos relacionados ao TFC, como o uso de tecnologias digitais como suporte ao ensino

e à aprendizagem (SEGADAS, 1998) e o uso de experimentos de ensino (THOMPSON, 1994).

Segadas (1998) apresentou em sua pesquisa a compreensão do TFC por parte dos estudantes, destacando que a relevância de estudar o TFC reside em sua importância para a compreensão de outros fenômenos e de suas consequências para a aprendizagem da Matemática. A autora apontou ainda aspectos sobre como repensar as práticas pedagógicas a partir da compreensão das dificuldades dos alunos e destacou a ineficiência do emprego de imagens gráficas utilizadas apenas para ilustrar os conceitos de CDI por meio de exemplos de situações em que determinada definição se aplica ou não. Segadas destaca que se faz pouco uso da representação gráfica como facilitadora da resolução e da compreensão de alguns problemas, teoremas ou definições.

Pensando nesses aspectos, Segadas (1998) sugere o implemento das tecnologias digitais por meio da utilização de gráficos dinâmicos nas aulas da disciplina de CDI. A autora constatou em sua pesquisa, por meio de testes e entrevistas, que os alunos apresentam dificuldades na resolução de problemas cuja representação gráfica da situação contribuiria para a resolução, por evitar o uso de algoritmos extensos, e facilitaria o processo de aprendizagem do conceito envolvido.

Também trabalhando com a investigação acerca do TFC, Thompson (1994) desenvolveu, com alunos de Matemática, um experimento de ensino para a compreensão de $F'(x)$ como taxa de variação, explorando situações-problema que envolviam comparações entre velocidade e distância, volumes e superfícies. O pesquisador destacou algumas dificuldades que os alunos tiveram, ao trabalhar com o TFC; dentre elas, o uso de noções como as de razão de acumulação, taxa de variação e taxa de acumulação e outros problemas, como o conceito de imagem de uma função.

Apresentada a contextualização de nossa problemática, a qual está motivada pelos resultados de pesquisas como as que discutimos até o momento, e tendo em vista a importância do TFC para os processos de ensino e de aprendizagem de CDI, damos continuidade ao nosso artigo com a apresentação dos processos metodológicos, em especial, a seleção e a análise das pesquisas em Educação Matemática que compõem nosso *locus* de análise. Logo após, trazemos a análise e a discussão dos resultados, primeiramente buscando uma categorização das pesquisas analisadas e, posteriormente,

trazendo uma discussão dos principais aspectos⁴ dos processos de ensino e de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral sob a ótica do Conhecimento Matemático para o Ensino (CME).

Fundamentos e procedimentos teórico-metodológicos de nosso estudo

A revisão sistemática de literatura que contemplamos neste artigo está inspirada no trabalho de Menduni-Bortoloti e Barbosa (2017), por se tratar de uma pesquisa que “consiste em identificar e sintetizar estudos, cujos processos de seleção e análise são rigorosos e transparentes” (p. 951). De acordo com estes autores e, no caso específico de nossa investigação, ao identificarmos diferentes maneiras de comunicar aspectos dos processos de ensino e de aprendizagem de Cálculo, focando especificamente no TFC, explicitamos aqui uma variabilidade de comunicações, “gerando outro resultado que não se constituiria dessa forma se não integrássemos os estudos selecionados” (p. 951).

Além disso, pesquisas deste tipo “procuram inventariar, sistematizar e avaliar a produção científica numa determinada área de conhecimento” (FIORENTINI, 1994, p. 32), possibilitando “identificar tendências e descrever o estado do conhecimento de uma área ou de um tema de estudo” (FIORENTINI; LORENZATO, 2007, p.103). Com isso, pesquisas do tipo revisão sistemática de literatura consistem em reconhecer e identificar, a partir dos principais resultados de outras investigações, as principais tendências, temáticas e abordagens dominantes e emergentes em uma área. Torna-se ainda um importante método de pesquisa, uma vez que permite identificar lacunas deixadas por outros estudos, evidenciando campos inexplorados e que poderão servir de temática para futuras pesquisas.

A revisão que desenvolvemos neste artigo é composta pela literatura acerca de pesquisas em Educação Matemática que abordam aspectos relacionados ao TFC. Iniciamos uma busca em periódicos, anais de eventos (nacionais e internacionais da área) e no site Google Acadêmico, com o objetivo de identificar artigos científicos, Teses e Dissertações que tivessem como objeto de investigação aspectos relacionados ao TFC. A partir do título, das palavras-chave e do resumo dos textos, procuramos chegar à expressão “Teorema Fundamental do Cálculo”, buscando por evidências de quais aspectos referentes a esse teorema poderiam estar sendo abordados nas referidas pesquisas.

⁴ Neste artigo tratamos destes aspectos, buscando revelar um ponto de vista sob o qual pode ser considerado um fato ou uma observação abordada nas pesquisas analisadas, que possa contribuir para os processos de ensino e de aprendizagem do CDI.

Vale destacar que, para o desenvolvimento deste estudo, elegemos como recorte temporal o período de 2007 a 2016, visando contemplar os últimos dez anos de investigação em Educação Matemática acerca da temática investigada. Julgamos que esse período ofereceria um corpus substancial, capaz de nos fornecer um panorama satisfatório de pesquisas cujas temáticas se relacionassem com o foco do nosso estudo. Feita a busca, obtivemos como resultado um total de 16 pesquisas, as quais são apresentadas no Quadro 1:

Quadro 1 – Pesquisas levantadas e analisadas em nosso estudo

Artigo	Autores	Publicação	Ano
<i>Uma investigação sobre a aprendizagem do teorema fundamental do cálculo</i>	ANACLETO, G. M. C.	Dissertação em Educação Matemática – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	2007
<i>A abordagem do teorema fundamental do cálculo em livros didáticos e os registros de representação semiótica</i>	CAMPOS, R. P.	Dissertação em Educação Matemática – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	2007
“Exploring connected understanding in context”	GERSON, H. & WALTER, J. G.	<i>Psychology of Mathematics Education (PME)</i> ⁵	2007
<i>Os registros de representação semiótica mobilizados por professores no ensino do teorema fundamental do cálculo</i>	PICONE, D. F. B.	Dissertação em Educação Matemática – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	2007
Investigando o teorema fundamental do cálculo com calculadoras gráficas	SCUCUGLIA, R.	Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM)	2007
“Areas and the Fundamental Theorem of Calculus”	VAJIAC, A. & VAJIAC, B.	<i>International Journal of Mathematical Education in Science and Technology (IJMEST)</i> ⁶	2008
“Historical reflections on teaching the fundamental theorem of integral calculus”	BRESSOUD, D. M.	<i>The American Mathematical Monthly</i> ⁷	2011
<i>Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino</i>	GRANDE, A. L.	Tese em Educação Matemática – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	2013
“Developing prospective mathematics teachers in Mexico: a lesson on the relationship between integration and differentiation”	PONCE-CAMPUZANO, J. C.	<i>International Journal of Mathematical Education in Science and Technology (IJMEST)</i>	2013

⁵ Disponível em: <<http://www.igpme.org>>.

⁶ Disponível em: <<http://www.tandfonline.com>>.

⁷ Disponível em: <<http://www.maa.org/press/periodicals/american-mathematical-monthly>>.

“The fundamental theorem of calculus: visually?”	KIRSCH, A.	<i>ZDM Mathematics Education</i> ⁸	2014
“Learning the integral concept by constructing knowledge about accumulation”	KOUROPATO V, A. & DREYFUS, T.	<i>ZDM Mathematics Education</i>	2014
“The fundamental theorem of calculus within a geometric context based on Barrow’s work”	PONCE-CAMPUZANO, J. C. & MALDONADO-AGUILAR, M. A.	<i>International Journal of Mathematical Education in Science and Technology (IJMEST)</i>	2014
“Using dynamic tools to develop an understanding of the fundamental ideas of calculus”	VERZOSA, D., GUZON, A. F., & DE LAS PEÑAS, M. L. A.	<i>International Journal of Mathematical Education in Science and Technology (IJMEST)</i>	2014
“The prevalence of area-under-a-curve and anti-derivative conceptions over Riemann sum-based conceptions in students’ explanations of definite integrals”	JONES, S. R.	<i>International Journal of Mathematical Education in Science and Technology (IJMEST)</i>	2015
“O ensino do teorema fundamental do cálculo envolvendo o pensamento intuitivo e visual”	GRANDE, A. L.	Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM)	2016
“Una propuesta de reconstrucción del significado holístico de la antiderivada”	GORDILLO, W. & PINO-FAN, L. R.	<i>Boletim de Educação Matemática (BOLEMA)</i> ⁹	2016

Fonte: elaborado pelos autores

Após a seleção das pesquisas, passamos à leitura integral de cada uma delas, destacando as palavras-chave, a problemática de investigação, os objetivos, a metodologia e os procedimentos metodológicos, assim como a análise e a discussão dos dados, o referencial teórico e as considerações acerca dos resultados obtidos nas referidas pesquisas. Além desses aspectos, com a leitura integral das pesquisas, buscamos indicativos da importância do conceito de função para o estudo de conceitos presentes no TFC, ou seja, procuramos por respostas às questões¹⁰ que elaboramos previamente e que contemplam aspectos histórico-epistemológicos e didático-pedagógicos do TFC.

⁸ Disponível em: <<https://link.springer.com/journal/11858>>.

⁹ Disponível em: <www.scielo.br/bolema>.

¹⁰ As questões que nortearam a leitura das pesquisas analisadas estão apresentadas no Quadro 2.

Diferentemente da revisão sistemática de literatura desenvolvida por Menduni-Bortoloti e Barbosa (2017), a qual contempla ênfases¹¹ ao conceito de proporcionalidade, em nossa investigação, elaboramos algumas questões norteadoras que conduzissem e nortearassem nossa revisão sistemática, tomando por base os aspectos teóricos discutidos por Ball, Thames e Phelps (2008) e por Ribeiro (2012), no que se refere ao Conhecimento Matemático para o Ensino (CME). Com isso, as questões que nos guiaram abordam a perspectiva do conhecimento específico do conteúdo e do conhecimento pedagógico do conteúdo, considerando que “o primeiro refere essencialmente ao conteúdo matemático a ser ensinado” e “o segundo remete ao modo como esse conteúdo pode ser ensinado, contemplando o currículo, os estudantes e as próprias relações entre estes e o conteúdo matemático” (PAZUCH; RIBEIRO, 2017, p. 474).

Consideramos, no contexto de nosso estudo, que o Conhecimento Matemático para o Ensino, desenvolvido por Ball e colaboradores, e amplamente discutido por Ribeiro (2012, p. 541), “não se limita ao que os professores precisam saber para ensinar, mas envolve, também, o que os professores, eles mesmos, precisam saber e ser capazes de fazer para realizar tal ensino”. Logo, identificamos que há “a necessidade de os professores serem capazes de explicar o significado de conceitos e procedimentos (por exemplo, algoritmo da subtração e conceito de subtração) aos estudantes e de escolher exemplos e situações que sejam adequados para tal desenvolvimento” (p. 541).

Nessa perspectiva, ao elaborar as questões que apresentamos no Quadro 2, tivemos por objetivo contribuir para a elucidação de aspectos que compõem o conhecimento matemático para o ensino do TFC, englobando aspectos relacionados ao conhecimento específico do conteúdo – contemplados nas questões que envolvem os aspectos histórico-epistemológicos – e ao conhecimento pedagógico do conteúdo, a partir das questões sobre os aspectos didático-pedagógicos.

Quadro 2 – Questões elaboradas para análise das pesquisas sobre o TFC

<i>Questões envolvendo aspectos histórico-epistemológicos</i>	
1.	Como a pesquisa aborda o fato de o TFC ser nomeado/considerado fundamental?
2.	Como o conceito de função está presente nas discussões sobre o TFC?

¹¹ O termo *ênfases* é utilizado por Menduni-Bortoloti e Barbosa (2017, p. 952), baseados em Sfard (2008), “como um instrumento de análise da literatura e uma estratégia de modelagem teórica, com o objetivo de propor uma Matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade”. As ênfases ao conceito de proporcionalidade privilegiadas são: *Realizações* – conceito de proporcionalidade comunicado na escrita dos artigos; *Cenários* – quando realizações do conceito de proporcionalidade foram agrupadas, conforme regras comunicadas pelos autores dos artigos; *Vínculos* – gerados entre as realizações agrupadas no mesmo cenário, ou seja, vínculos entre as regras comunicadas.

3.	Como o TFC é aplicado/desenvolvido/utilizado na pesquisa? Apenas para resolução de integrais definidas?
4.	Qual é o destaque dado à relação existente entre os conceitos de derivada e de integral de uma função, bem como sua conexão com o TFC?
5.	Como a importância da relação entre a representação gráfica e a algébrica de uma função influencia a compreensão dos conceitos presentes no TFC?
<i>Questões envolvendo aspectos didático-pedagógicos</i>	
1.	Quais estratégias didáticas são propostas para o ensino do TFC?
2.	Quais recursos didático-pedagógicos são utilizados para o ensino do TFC?
3.	Quais são as principais dificuldades relacionadas aos processos de ensino e de aprendizagem do TFC?
4.	Quais são as dificuldades, por parte dos alunos, na compreensão dos conceitos presentes no TFC?
5.	Quais conhecimentos são mobilizados pelos alunos para o desenvolvimento de tarefas sobre o TFC?

Fonte: elaborado pelos autores

Para a análise das pesquisas sistematizadas nesta revisão de literatura, procedemos primeiramente a uma análise descritiva, por meio da categorização das pesquisas segundo seu objetivo de investigação, buscando destacar suas similaridades e convergências, o que será discutido na seção seguinte. Em um segundo momento, procedemos à análise das pesquisas a partir das questões elaboradas (Quadro 2), buscando por aspectos histórico-epistemológicos e didático-pedagógicos que caracterizam os processos de ensinar e de aprender Cálculo Diferencial e Integral, mais especificamente, o TFC. Tais análises se encontram na seção 4 deste artigo.

Análise descritiva: uma possível categorização das pesquisas revisadas em nosso estudo

Visando explicitar as tendências temáticas e teórico-metodológicas privilegiadas pelas pesquisas em Educação Matemática que abordam aspectos relacionados ao TFC, procedemos a uma categorização destas pesquisas segundo seus objetivos de investigação. Com essa categorização, foi possível identificar que algumas pesquisas privilegiam os aspectos didático-pedagógicos, outras tratam de histórico-epistemológicos, assim como há aquelas que desenvolvem estudos teóricos ou bibliográficos inerentes ao TFC.

A revisão sistemática resultou na identificação de pesquisas que favoreceram a investigação de *aspectos didático-pedagógicos* acerca dos processos de ensinar e de aprender Cálculo, focando, em algumas delas, no TFC. Estas pesquisas foram, em sua

maioria, desenvolvidas com estudantes de diferentes cursos de graduação e estudantes do Ensino Médio, por meio da realização de tarefas e de sequências didáticas sobre Cálculo. As pesquisas de Kouropatov e Dreyfus (2014) e Grande (2013) trabalharam com o estudo do conceito de integral em uma perspectiva da ideia matemática de acumulação, mostrando que esta estratégia é pertinente para a compreensão da relação mútua entre integração e derivação como operações inversas entre si.

Também trabalhando com estudantes, a pesquisa de Gerson e Walter (2007) mostrou a importância das experiências anteriores de vida dos estudantes para o desenvolvimento de “tarefas de respostas abertas sobre Cálculo¹²”, identificando que esta metodologia de trabalho permitiu aos alunos regatar aspectos de sua experiência de vida e compartilhá-los com os demais colegas, visando justificar e estabelecer conexões entre as ideias abordadas nas tarefas.

Já as pesquisas realizadas por Verzosa, Guzon e Las Peñas (2014) e Ponce-Campuzano (2013) caracterizam-se pelo desenvolvimento de sequências didáticas com o uso do *software* Geogebra. Elas apontam a importância do uso de *softwares* que, vinculado a uma estratégia de ensino, permite aos alunos formular uma compreensão mais profunda e compartilhada dos conceitos aprendidos. Além disso, os pesquisadores destacam que as ferramentas dinâmicas proporcionaram aos alunos a oportunidade de compreender ideias, explorando múltiplas representações e imagens em movimento, e potencializam a visualização de conceitos, usando mudanças dinâmicas e resultados instantâneos.

Pelo seu lado, a pesquisa de Picone (2007) acompanhou professores de Cálculo nas aulas referentes ao Teorema Fundamental do Cálculo e verificou que, para os professores investigados, quando se ensina o TFC, é importante enfatizar as utilidades desse teorema como uma ferramenta para o cálculo de áreas e destacar que ele estabelece uma conexão entre derivação e integração.

Pudemos identificar que as pesquisas que abordaram *aspectos didático-pedagógicos* do Teorema Fundamental do Cálculo, destacam este teorema como uma ferramenta para o cálculo de área, bem como salientam que o TFC é um importante resultado do Cálculo Diferencial e Integral, uma vez que estabelece a relação entre dois conceitos: derivada e integral. Especificamente sobre o conceito de função, os pesquisadores salientam a importância do conceito de continuidade de uma função para o entendimento do TFC e a

¹² No original “open-response calculus task”

necessidade de reforçar a compreensão deste conceito com os estudantes, antes mesmo de se iniciar o estudo do TFC.

No que se refere às pesquisas que abordam os aspectos *histórico-epistemológicos* do TFC, encontramos aquelas que discutem os aspectos históricos do desenvolvimento do TFC e os aspectos da construção do conhecimento quando se trabalha esse teorema. As pesquisas desenvolvidas por Scucuglia (2007), Grande (2016), Anacleto (2007), Jones (2015) tiveram por objetivo investigar a construção de conhecimentos pelos alunos por meio do desenvolvimento de ações que privilegiam a discussão do TFC. Essas pesquisas identificaram que alguns conteúdos, considerados adquiridos, se caracterizaram como obstáculos para a aprendizagem, bem como o fato de os alunos não focarem em aspectos conceituais do teorema, e apenas memorizar o algoritmo dos procedimentos, sem refletir sobre a sua aplicabilidade.

Os pesquisadores destacam ainda que, no estudo do TFC, é preciso priorizar aspectos relacionados às noções de acumulação e de variação, uma vez que uma metodologia de trabalho diferenciada pode contribuir para uma mudança significativa na compreensão, pelos alunos, do conceito de integral, por meio da noção de acumulação, desprendendo-se da interpretação geométrica de integral como sinônimo de área. Nesse sentido, os pesquisadores salientam a importância de um trabalho inicial com conceitos como o de Soma de Riemann para, posteriormente, trabalhar com conceitos relacionados ao cálculo da área sob a curva. É interessante observar que isso é o contrário do que é proposto na maioria dos livros didáticos e pode auxiliar os alunos a desenvolver uma concepção mais abrangente dos conceitos de somatória.

No que se refere ao conceito de função, as pesquisas não chegam a destacar a importância de discutir aspectos relacionados ao conceito de função para a compreensão do TFC; entretanto, pode-se observar pelas ações desenvolvidas, o privilégio do trabalho com funções para a identificação de padrões e generalizações acerca do TFC, como acontece na pesquisa de Scucuglia (2007), por exemplo. Além disso, para Grande (2016), o estudo do TFC engloba muitos outros assuntos a ele relacionados, tais como os conceitos de continuidade, integrabilidade e diferenciabilidade de uma função.

No que se refere às pesquisas de cunho histórico, temos os estudos desenvolvidos por Gordillo e Pino-Fan (2016), Ponce-Campuzano e Maldonado-Aguilar (2014) e Bressoud (2011) que discutem aspectos relacionados ao desenvolvimento histórico do TFC, focando, em alguns casos, em conteúdos específicos relacionados a ele.

Segundo Gordillo e Pino-Fan (2016), os estudos de Leibniz, além de suma importância para o desenvolvimento da Análise Matemática, conduziram ao que conhecemos hoje como o TFC, mostrando as propriedades para determinar a área abaixo de uma curva e a relação da somatória de limites de funções contínuas com a integral definida.

Já Ponce-Campuzano e Maldonado-Aguilar (2014) destacam a importância dos estudos de Isaac Barrow para a compreensão do TFC, no que se refere à quadratura de uma curva com a reta tangente a esta curva, por meio de algumas propriedades, enfatizando que isto poderia ser tomado como uma versão geométrica precursora do TFC.

Por seu lado, a pesquisa desenvolvida por Bressoud (2011) explora a história do Teorema Fundamental do Cálculo, focando em sua origem (século 17), sua formalização (século 19) e sua apresentação em livros (século 20). A partir do estudo, o pesquisador salienta que nunca é suficiente apenas introduzir o conceito de integral como limite de somas de Riemann e nos chama atenção para o fato de que, mesmo com grande esforço por parte dos professores, muitos alunos permanecerão relacionando a definição de integral apenas como um processo para encontrar primitivas de funções.

Assim, com as pesquisas que investigaram os aspectos *histórico-epistemológicos* foi possível identificar a importância das múltiplas representações do conceito de função para a compreensão do TFC, e os privilégios do uso das tecnologias digitais para essas representações. Além disso, aparecem como extremamente importantes as noções de acumulação e variação, consideradas a essência do TFC.

A revisão sistemática da literatura também resultou na identificação de estudos que não puderam ser enquadrados como didático-pedagógicos ou histórico-epistemológicos, trata-se de estudos teóricos envolvendo conceitos ligados ao TFC e também um estudo bibliográfico a partir livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral, que buscaram discutir aspectos inerentes ao TFC.

O estudo teórico realizado por Kirsch (2014) mostrou como é possível desenvolver uma compreensão visual do TFC, relacionada ao conceito de derivada, destacando a dificuldade, por parte dos alunos, na compreensão da relação entre os conceitos de tangente e área, e enfatizando a necessidade de comparar os gráficos da função primitiva e da função derivada.

Já a pesquisa apresentada por Vajiac e Vajiac (2008) discute alguns aspectos relacionados ao ensino da noção de área e ao TFC para diferentes grupos de estudantes, fundamentando seu estudo na discussão das ideias que levaram à definição da integral de Riemann e à

abordagem da área envolvendo esses conceitos, trazendo diferentes justificativas que colaboram para a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos.

Temos ainda a pesquisa bibliográfica desenvolvida por Campos (2007), o qual analisou quatro livros didáticos¹³ de Cálculo Diferencial e Integral, que abordam o Teorema Fundamental do Cálculo. Este estudo identificou quais são as diferenças fundamentais nos enfoques dos diferentes autores dos livros analisados por ele e observou como os autores exploram a coordenação dos registros de representação na apresentação do TFC. Com a análise das pesquisas desenvolvidas por Kirsch (2014), Vajiac e Vajiac (2008) e Campos (2007) foi possível identificar a importância não só da abordagem histórica para a compreensão dos conceitos envolvidos no TFC, mas também da visualização e da interpretação gráfica para o entendimento desses conceitos. No que se refere aos livros didáticos, alguns autores dão pouca ênfase à inter-relação do conceito de derivada e integral que deve ser discutida a partir do TFC, entretanto favorecem a exploração das múltiplas representações desses conceitos.

Na sequência, trazemos uma outra perspectiva da análise do *corpus* de nossa investigação, a qual se desenvolveu a partir das questões que nortearam a leitura das pesquisas. Esta outra abordagem de análise tem por objetivo discutir diferentes aspectos dos processos de ensino e de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral sob a ótica do Conhecimento Matemático para o Ensino (CME).

Análise a partir das Questões Norteadoras: caracterizando os processos de ensino e de aprendizagem do Cálculo

Nesta seção discutiremos as pesquisas por um outro viés de análise, o qual contempla aspectos relacionados ao CME, os quais foram identificados nas pesquisas por nós revisadas e que nos conduzem a possíveis respostas para as questões norteadoras tomadas como fundamento em nossa investigação. Procuramos elucidar quais são os aspectos histórico-epistemológicos e didático-pedagógicos que caracterizam os processos de ensinar e aprender Cálculo Diferencial e Integral, especificamente o Teorema Fundamental do Cálculo, em concordância com os pesquisadores estudados.

¹³ (1) Guidorizzi, H. L. *Um curso de cálculo* (Vol. 1, 5a ed.). Rio de Janeiro: Editora LTC, 2001; (2) Lima, E. L. *Curso de análise* (3a ed.). Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1982; (3) Moise, E. E. *Cálculo. Um curso universitário*. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1970; (4) Stewart, J. *Cálculo* (5a ed.). São Paulo: Editora Pioneira Thomson Learning, 2006.

Aqui não tratamos mais das pesquisas segundo seus objetivos, mas as analisamos de acordo com os elementos identificados nelas na seção anterior e que se constituem como possíveis respostas às questões que nortearam nossa leitura e análise. Portanto, buscamos articular aspectos inerentes ao TFC, identificados nas diferentes pesquisas que compõem o *corpus* de nossa investigação, com o objetivo de destacar a importância do conceito de função no/para o TFC, a partir das questões norteadoras.

Assim, quando buscamos por aspectos que caracterizam o fato de este teorema ser nomeado “teorema fundamental”, alguns pesquisadores (ANACLETO, 2007; BRESSOUD, 2011; GRANDE, 2013; VAJIAC; VAJIAC, 2008) destacam que o Teorema Fundamental do Cálculo traz a ideia central do Cálculo, sendo considerado a pedra angular do Cálculo Diferencial e Integral. Isso é considerado, uma vez que este teorema é a base das duas operações centrais do Cálculo, derivação e integração, operações inversas uma da outra (ANACLETO, 2007). Além disso, a utilização do TFC no cálculo de integrais definidas, em especial na resolução de problemas envolvendo área, volume e comprimento de arco, entre outras, torna-se essencial (GRANDE, 2013). Entretanto, este teorema passou a ser assim nomeado somente a partir do século XIX (BRESSOUD, 2011), ainda que sua origem seja atribuída a Leibniz e Newton, em sua forma intuitiva. Entretanto, em uma formulação mais rigorosa, o TFC foi mencionado primeiramente nos trabalhos de Cauchy (VAJIAC; VAJIAC, 2008).

Por ser considerado um importante resultado do CDI, podemos identificar que, nas discussões referentes ao Teorema Fundamental do Cálculo, encontra-se presente o conceito de função, considerado como uma linha condutora, que norteia o entendimento dos conceitos abordados neste teorema (GRANDE, 2013). Historicamente, as descobertas sobre o conceito de função contribuíram para a compreensão, a prova e o desenvolvimento do TFC, com destaque para a introdução das Séries de Fourier no século XIV. Tal descoberta possibilitou a expansão do conceito de função, influenciando principalmente a compreensão do conceito de continuidade de uma função (BRESSOUD, 2011), um dos conceitos-chave para a compreensão do TFC. Além do mais, dentro da abordagem de função contínua, considera-se importante enfatizar que um dos principais objetivos de um curso de Cálculo é fazer com que seja aprendido que toda função é a derivada de sua própria integral (para quase todos os tipos de função) (PONCE-CAMPUZANO; MALDONADO-AGUILAR, 2014).

Dada a importância do TFC dentro do Cálculo, os pesquisadores ressaltam, nos resultados de suas pesquisas, que seu uso/aplicação ainda se restringe ao cálculo de integrais

definidas e à resolução de problemas envolvendo o cálculo de áreas de regiões limitadas pelo gráfico de uma função contínua em um determinado intervalo. Entretanto, conforme destacado por Kouropatov e Dreyfus (2014), é válido desenvolver um trabalho enfatizando a importância da compreensão do conceito de acumulação, caracterizado como central na ideia de integração. Em outras palavras, entender a integração como acumulação é a chave para o entendimento de muitas ideias e aplicações no Cálculo, como o cálculo de área e de volumes de corpos e o conceito de trabalho. Vale ressaltar ainda que essa ideia de acumulação é intuitivamente mais acessível que o conceito de Soma de Riemann e, por esse motivo, é relevante que tal ideia seja trabalhada para a compreensão do TFC.

Vimos ainda a ênfase dada em algumas pesquisas (CAMPOS, 2007; PONCE-CAMPUZANO, 2013; PONCE-CAMPUZANO; MALDONADO-AGUILAR, 2014), as quais destacam a conexão entre os conceitos de derivada e integral estabelecida pelo TFC. Tais autores enfatizam que o TFC relaciona a derivação e a integração, mostrando que estas são operações inversas uma da outra, ou seja, o TFC estabelece uma conexão entre a noção de área de regiões planas formadas pelos gráficos de funções contínuas em um determinado intervalo e suas antiderivadas (PONCE-CAMPUZANO, 2013).

Nesse contexto, trata-se de dois conceitos muitas vezes ensinados de forma independente,

o primeiro, ligado ao problema de se determinar a reta tangente a uma curva em um ponto, enquanto o segundo, ligado ao problema para se encontrar a área de uma figura plana. Apenas aparentemente, entre os dois problemas parece não existir relação. (CAMPOS, 2007, p. 2).

Assim, os pesquisadores valorizam a importância de trabalhar essa conexão por meio do TFC, uma vez que a primeira parte do teorema é conhecida como a parte da antiderivada (primitiva) de uma função, pois garante a existência de antiderivadas de funções contínuas; já a segunda parte do teorema é tida como a parte da avaliação (ou aplicação), uma vez que mostra como usar o conceito de antiderivada para o cálculo de integrais definidas (PONCE-CAMPUZANO; MALDONADO-AGUILAR, 2014).

Pensando na compreensão dos conceitos envolvidos no TFC, os pesquisadores (PICONE, 2007; PONCE-CAMPUZANO, 2013) salientam a importância da articulação entre as representações gráfica e algébrica das funções. Picone (2007), por exemplo, destaca a importância da coordenação entre as representações algébrica e gráfica desde o ensino das funções, do conceito de derivada e de integral, especialmente no caso do ensino da integral definida. Sendo assim, de acordo com Ponce-Campuzano (2013), a literatura sugere que situações dinâmicas, relacionadas às representações algébrica e gráfica,

ajudam os alunos a entenderem melhor o conceito de função e acumulação em Cálculo, favorecendo a compreensão do TFC.

Nesse contexto, buscando facilitar a compreensão dos conceitos envolvidos no TFC, conforme o destaque dado por Bressoud (2011), há algumas estratégias didático-pedagógicas que podem favorecer os processos de ensino e de aprendizagem. Para ele não é suficiente introduzir o conceito de integral como limite de somas de Riemann. Por se tratar de um conceito muito complexo, os alunos precisam experienciar uma variedade de problemas envolvendo o conceito de acumulação, problemas modelados a partir da soma de produtos, multiplicando o resultado da acumulação por pequenos incrementos na variável independente. Em tais situações, o cálculo da integral definida passa mesmo a ser o último passo (BRESSOUD, 2011).

Quando se discute o TFC, também é preciso estar atento ao seu desenvolvimento histórico, uma vez que a integração e a derivação têm dois aspectos conceituais distintos: um geométrico e outro dinâmico. Para Bressoud (2011), é necessário focar primeiramente no entendimento dinâmico e em seu uso, para, então, construir uma interpretação geométrica do TFC.

O próximo passo é considerar a taxa de variação da função acumulação. Taxa de variação já é um conceito difícil. Compor este conceito a um acumulador torna-se ainda mais difícil. Porém, uma vez que todas essas peças estejam no lugar e sejam entendidas, o TFC é praticamente auto-evidente. Newton nunca provou isso. Ele simplesmente observa que é evidente que a taxa de variação da quantidade acumulada é a taxa na qual essa quantidade está se acumulando. O Cálculo emerge da consciência do poder dessa observação (p. 113, tradução nossa).

Neste contexto, outros pesquisadores também enfatizam a importância de trabalhar o fato de que o conceito de integral está relacionado à soma ou à acumulação de quantidades (GRANDE, 2016; JONES, 2015; KOUROPATOV; DREYFUS, 2014; PONCE-CAMPUZANO, 2013). Para esses autores, essa conexão pode contribuir para que os alunos compreendam o processo comum para a determinação de antiderivadas e o cálculo de integrais indefinidas e percebam que os conceitos abordados no TFC emergem da soma de Riemann e do problema de cálculo de área sob uma curva.

Além disso, Ponce-Campuzano e Maldonado-Aguilar (2014) dão destaque à abordagem geométrica a partir da proposição do matemático Isaac Barrow e salientam que tal abordagem pode contribuir para exemplificar e discutir a relação entre o conceito de área sob a curva como o gráfico de uma função contínua e o conceito de reta tangente em um

ponto da função área, ou seja $G(x) = \int_a^x f(t) dt$, o qual pode ser considerado como uma versão mais intuitiva do TFC.

Toda a discussão acerca de estratégias didático-pedagógicas para a compreensão do TFC está ancorada nas dificuldades de aprendizagem dos alunos nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, em particular na compreensão do significado do TFC e no entendimento dos seus conceitos fundamentais: derivada, integral e continuidade (ANACLETO, 2007).

Por mais que alguns pesquisadores (ANACLETO, 2007; BRESSOUD, 2011; CAMPOS, 2007; GRANDE, 2013; PONCE-CAMPUZANO, 2013; PONCE-CAMPUZANO; MALDONADO-AGUILAR, 2014; VAJIAC; VAJIAC, 2008) tenham apontado que uma das ideias centrais do TFC é trazer a inter-relação do conceito de derivada e integral no âmbito da Educação Matemática, as pesquisas realizadas no Brasil e em outros países, tais como França, Inglaterra e Estados Unidos, evidenciaram a incompreensão dos alunos no tocante à falta de ligação existente entre os conceitos de integral e derivada no estudo do TFC em um curso de Cálculo (GRANDE, 2013). Além disso, os alunos têm dificuldades no uso das diferentes representações gráficas para trabalhar com o conceito de integral e o significado de integral definida, sendo esses aspectos fundamentais para a compreensão do TFC (JONES, 2015).

Ainda sobre as dificuldades dos alunos com Cálculo, Ponce-Campuzano (2013) destaca alguns fatores, muitas vezes relacionados aos conceitos tidos como fundamentais para a compreensão dos conceitos de limite, integral e derivada. Dentre eles estão o conhecimento limitado do conceito de função; o pouco entendimento acerca da ideia de taxa de variação e acumulação; as poucas habilidades para trabalhar com o conceito de covariação; e a compreensão da ordem na qual as duas “partes” do TFC são apresentadas em cursos introdutórios de Cálculo. Além disso, mesmo que os alunos compreendam a relação entre as operações de derivação e de integração, esta não é uma condição que garanta que eles venham a identificar a conexão existente entre o conceito de área e de taxa de variação (VERZOSA, GUZON; LAS PEÑAS, 2014).

Postas essas dificuldades, é possível trabalhar os conceitos abordados no TFC com o uso das tecnologias digitais, por exemplo, visando favorecer os processos de ensino e de aprendizagem. Sabemos dos diversos limites e impasses que se colocam para o desenvolvimento de uma prática pedagógica que privilegie o uso das tecnologias digitais,

sejam eles relacionados à formação e à prática docente ou ao currículo e às organizações educacionais¹⁴.

Entretanto, as pesquisas analisadas (GRANDE, 2013; KOUROPATOV; DREYFUS, 2014; PONCE-CAMPUZANO, 2013; VERZOSA et al., 2014) mostram que as tecnologias digitais aliadas à prática docente podem contribuir para a compreensão dos conceitos envolvidos no TFC. Esses pesquisadores trabalharam com os *softwares* Maple e Geogebra, além de *applets* e vídeos, enfatizando que as tecnologias digitais promovem uma representação gráfica e numérica dinâmica, permitindo que os estudantes explorem o TFC sob múltiplas perspectivas (VERZOSA et al., 2014).

A análise das pesquisas que desenvolvemos neste artigo nos revelou a importância do TFC para a compreensão dos conceitos de derivada e integral, bem como nos mostrou a importância do conhecimento do conceito de função e de continuidade. Os pesquisadores valorizaram a discussão tanto de aspectos histórico-epistemológicos quanto didático-pedagógicos do TFC, apresentando estratégias pedagógicas e conhecimentos que precisam ser mobilizados para o estudo do TFC. Entretanto, identificamos a necessidade de pesquisas que apontem as dificuldades enfrentadas pelos professores para o desenvolvimento dos processos de ensino e de aprendizagem do TFC e sugeriram diferentes tarefas e propostas didáticas para o uso em sala de aula.

Conclusões e Considerações Finais

Ao proceder à revisão sistemática de literatura que apresentamos neste artigo, foi possível identificar aspectos inerentes aos processos de ensino e de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral que podem ser interpretados sob a ótica do Conhecimento Matemático para o Ensino (CME). Segundo os apontamentos de Ribeiro (2012), fundamentado em Ball, Thames e Phelps (2008) e Shulman (1986), o *Conhecimento Matemático para o Ensino* pode ser dividido em *Conhecimento do Conteúdo* (subdividido em conhecimento comum do conteúdo e conhecimento especializado do conteúdo) e *Conhecimento Pedagógico do Conteúdo* (subdividido em conhecimento do conteúdo e de estudantes e conhecimento do conteúdo e de ensino).

¹⁴ Diversos pesquisadores em Educação e Educação Matemática têm investigado os limites e as possibilidades do desenvolvimento de uma prática pedagógica que privilegie o uso das tecnologias digitais, destacando aspectos relacionados à formação e à prática docente (Almeida (2014); Miskulin (2003)), bem como os relacionados ao currículo (Almeida (2008) e Almeida; Valente (2012)).

No que se refere ao *Conhecimento do Conteúdo*, foi possível identificar que as pesquisas enfatizam a necessidade de se valorizarem alguns conceitos e conteúdos, imprescindíveis para a compreensão do Teorema Fundamental do Cálculo, dos quais destacamos: conceito de acumulação, conceito de taxa de variação, conceito de função e continuidade. Além disso, é preciso enfatizar que o TFC explora a relação existente entre as duas principais operações do Cálculo Diferencial e Integral: a integração e a derivação.

Ainda sobre o *Conhecimento do Conteúdo*, as pesquisas afirmam que é essencial fazer com que os alunos compreendam a aplicação das integrais definidas para a resolução de problemas de área, volume e comprimento de arco, e que seja favorecida a compreensão da relação existente entre a noção de área limitada pelo gráfico de funções contínuas e suas antiderivadas, ou seja, que saibam explicitar que $F'(x) = f(x)$. Os pesquisadores apontam também a pertinência de trabalhar o conceito de integral na perspectiva da acumulação, estabelecendo conexões com o conceito de Soma de Riemann.

Já em relação ao *Conhecimento Pedagógico do Conteúdo*, os pesquisadores enfatizam a importância de uma prática pedagógica que articule as múltiplas representações de um conceito matemático, visando favorecer os processos de visualização e de compreensão por parte dos alunos. É preciso promover, principalmente, a inter-relação entre as representações algébrica e geométrica, uma vez que a abordagem geométrica privilegia a compreensão da relação existente entre a área sob uma curva e a reta tangente, bem como propicia a discussão e a compreensão do conceito de integral a partir de problemas envolvendo a ideia de acumulação.

Para que se promova a articulação das múltiplas representações dos conceitos de função, continuidade, derivada e integral, os pesquisadores destacam a contribuição das tecnologias digitais neste processo. Salientam, também, a importância de criar cenários/ambientes de ensino por meio do desenvolvimento de tarefas exploratórias e de situações-problema, principalmente em grupos, levando os alunos a discutir e articular ideias que podem culminar na compreensão dos conceitos abordados.

Também em relação ao *Conhecimento Pedagógico do Conteúdo*, as pesquisas chamam a atenção para as dificuldades dos alunos em relação aos conceitos de Cálculo Diferencial e Integral, destacando aquelas inerentes aos conceitos de derivada, integral e continuidade, taxa de variação e acumulação, e também a dificuldade de estabelecer e compreender as inter-relações desses conceitos. Além disso, os pesquisadores apontam que o conhecimento limitado do conceito de função acaba comprometendo o entendimento dos conceitos envolvidos no Teorema Fundamental do Cálculo.

Consideramos, assim, urgente promover a articulação entre os conteúdos do Ensino Médio e Ensino Superior, como discutimos no início deste artigo, visando à preparação dos alunos para a graduação.

Em síntese, os aspectos apresentados e discutidos neste artigo mostram um possível caminho para trabalhar os conceitos envolvidos no TFC, contribuindo para os processos de ensino e de aprendizagem do Cálculo. É preciso valorizar e enfatizar a principal relação estabelecida pelo TFC entre os conceitos de derivada e integral, e explorar não apenas a representação algébrica, mas também a representação gráfica, visto a importância do papel da visualização para o ensino de Cálculo, fato que pode ser favorecido pelo uso de tecnologias digitais.

Discutir o TFC em sala de aula pode favorecer a abordagem de aspectos históricos do desenvolvimento deste teorema. Para que se compreenda o TFC é necessário, também, considerar a importância de entender aspectos relacionados ao conceito de função, principalmente no que tange ao conceito de continuidade. Essas abordagens contribuem para que não se tenha uma visão simplista do TFC como ferramenta para o cálculo de integrais definidas e cálculo de áreas de figuras planas formadas pelo gráfico de funções contínuas. Além disso, é preciso valorizar a compreensão do conceito de integral como acumulação e do conceito de derivada como taxa de variação, e não como simples operações com funções que são inversas uma da outra.

Os aspectos discutidos nesta revisão sistemática de literatura, relacionados ao *conhecimento do conteúdo* e ao *conhecimento pedagógico do conteúdo*, nos mostram evidências da importância do conceito de função para a compreensão dos conceitos relacionados ao Teorema Fundamental do Cálculo. Consequentemente, revelam a necessidade de valorizar e priorizar uma prática docente que estabeleça conexões que favoreçam a discussão do conceito de função e sua influência nos processos de ensino e de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral.

Destacamos também que nós, professores, precisamos estar atentos à formação que estamos propiciando aos alunos das disciplinas de Cálculo, ou seja, importa identificar qual é a experiência que fica para esses alunos após a disciplina. Assim como enfatizado por Bressoud (2011), muitos deles não conseguem compreender e recordar nada sobre o significado do Cálculo. Segundo esse autor, fica para os alunos apenas a compreensão de que a derivação é um processo para transformar as funções em funções “mais simples” – no sentido de que os polinômios quadráticos se tornam lineares e os polinômios cúbicos tornam-se quadráticos – e que a integração é o inverso deste processo. Por este motivo,

“à medida que pensamos sobre como devemos ensinar o TFC, devemos ter em mente o que queremos que os alunos se lembrem deste curso, e então devemos trabalhar duro para garantir que isto aconteça” (BRESSOUD, 2011, p. 113).

No que se refere especificamente à formação de professores de Matemática, os aspectos identificados com a revisão sistemática da literatura corroboram o que Fiorentini (2005, p. 109) destaca como importante para a formação matemática do professor, questionando qual Matemática o professor/futuro professor precisa saber para ensinar em sala de aula, enfatizando que

O professor precisa conhecer o processo de como se deu historicamente a produção e a negociação de significados em Matemática [...]. Além disso, precisa conhecer e avaliar potencialidades educativas do saber matemático; isso o ajudará a problematizá-lo e mobilizá-lo da forma que seja mais adequada, tendo em vista a realidade escolar onde atua e os objetivos pedagógicos relativos à formação dos estudantes

Por fim, com o desenvolvimento desta revisão sistemática de literatura, podemos concluir que trazer para os alunos do Ensino Superior, professores e futuros professores de Matemática, bem como para os alunos do Ensino Médio, uma variedade de elementos e abordagens que compõem os processos de ensino e de aprendizagem dos conceitos envolvidos no TFC (como derivada, continuidade e integral de uma função) amplia e sistematiza a comunicação deste conceito e pode contribuir tanto para a aprendizagem dos alunos quanto para a prática pedagógica dos professores. Uma abordagem da prática docente que privilegie esses aspectos constitui-se como um desafio para nós, professores e pesquisadores em Educação Matemática, tendo em vista a organização das universidades, das escolas e das disciplinas de CDI.

Referências

ALMEIDA, M. E. B. Integração currículo e tecnologias: concepção e possibilidades de criação de web currículos. In: ALMEIDA, M. E. B.; ALVES, R. M.; LEMOS, S. D. V. *Web Currículo: aprendizagem, pesquisa e conhecimento com o uso de tecnologias digitais*. Rio de Janeiro: Letra Capital, 2014. p. 17-30.

ALMEIDA, M. E. B. Tecnologias na Educação: dos caminhos trilhados aos atuais desafios. *Boletim de Educação Matemática (BOLEMA)*, Rio Claro, v. 21, n. 29, p. 99-129, abr. 2008.

ALMEIDA, M. E. B.; VALENTE, J. A. Integração Currículo e Tecnologias e a Produção de Narrativas Digitais. *Currículo sem Fronteiras*, v. 12, n. 3, p. 57-82, set./dez. 2012.

ANACLETO, G.M.C. *Uma investigação sobre a aprendizagem do teorema fundamental do cálculo*. Dissertação em Educação Matemática. 2007, 136 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, New York, v. 59, n. 5, p. 389 - 407, nov./dez. 2008.

BRESSOUD, D. Historical Reflections on Teaching the Fundamental Theorem of Integral Calculus. *The American Mathematical Monthly*, v. 118, n. 2, p. 99-115, Feb. 2011. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/10.4169/amer.math.monthly.118.02.099>>. Acesso em: 29 jun. 2017.

CAMPOS, R. P. *A abordagem do teorema fundamental do cálculo em livros didáticos e os registros de representação semiótica*. Dissertação em Educação Matemática. 2007, 202 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

FARIAS, M. M. do R. *Introdução a noções de cálculo diferencial e integral no ensino médio no contexto das TIC: implicações para prática do professor que ensina matemática*. 2015. 292p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2015.

FIORENTINI, D. *Rumos da Pesquisa Brasileira em Educação Matemática: o caso da produção científica em cursos de pós-graduação*. 1994, 414p. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 1994.

FIORENTINI, D. A Formação Matemática e Didático-pedagógica nas Disciplinas da Licenciatura em Matemática. *Revista de Educação PUC-Campinas*, Campinas, n. 18, p. 107-115, jun. 2005.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos*. 2. ed. Campinas: Autores Associados, 2007.

GRANDE, A. L. O ensino do teorema fundamental do cálculo envolvendo o pensamento intuitivo e visual. In: XII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016, São Paulo – SP. *Anais... XII Encontro Nacional de Educação Matemática*, p. 1-12, 2016

GRANDE, A. L. *Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino*. 2013, 324 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

GERSON, H.; WALTER, J. G. Exploring connected understanding in context. In: 29th Annual Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2007, Lake Tahoe. *Proceedings... PME*, p. 268-271, 2007.

GORDILLO, W.; PINO-FAN, L. R. Una Propuesta de Reconstrucción del Significado Holístico de la Antiderivada. *Boletim de Educação Matemática (BOLEMA)*, Rio Claro, v. 30, n. 55, p. 535-558, ago. 2016.

JONES, S. R. The prevalence of area-under-a-curve and anti-derivative conceptions over Riemann sum-based conceptions in students' explanations of definite integrals. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, v. 46, n. 5, p. 721–736, 2015. DOI: <http://dx.doi.org/10.1080/0020739X.2014.1001454>

KIRSCH, A. The fundamental theorem of calculus: visually?. *ZDM Mathematics Education*, v. 46, p. 691–695, 2014. DOI 10.1007/s11858-014-0608-9

KOUROPATOV, A.; DREYFUS, T. Learning the integral concept by constructing knowledge about accumulation. *ZDM Mathematics Education*, v. 46, p. 533–548, 2014. DOI 10.1007/s11858-014-0571-5

MARIM, V. *Formação Continuada do Professor que Ensina Matemática nas Séries Iniciais do Ensino Fundamental: um estudo a partir da produção acadêmico-científica brasileira 2003-2007*. Tese (Doutorado em Educação Currículo). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC/SP, 2011.

MARIN, D. *Professores de matemática que usam tecnologia de informação e comunicação no ensino superior*. 2009, 164 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2009.

MENDUNI-BORTOLOTTI, R. D.; BARBOSA, J. C. A Construção de uma Matemática para o Ensino do Conceito de Proporcionalidade Direta a partir de uma Revisão Sistemática de Literatura. *Boletim de Educação Matemática (BOLEMA)*, Rio Claro (SP), v. 31, n. 59, p. 947-967, dez. 2017. DOI: <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a05>

MISKULIN, R. G. S. As possibilidades didático-pedagógicas de ambientes computacionais na formação colaborativa de professores de Matemática. In: FIORENTINI, D. (org.). *Formação de Professores de Matemática: explorando novos caminhos com outros olhares*. Campinas: Mercado das Letras, 2003. p. 217-248.

O'SHEA, A. BREEN, S.; JAWORSKI, B. The Development of a Function Concept Inventory. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, v. 2, n. 3, p. 279-296, 2016. DOI 10.1007/s40753-016-0030-5

PAZUCH, V.; RIBEIRO, A. J. R. Conhecimento profissional de professores de matemática e o conceito de função: uma revisão de literatura. *Educação Matemática Pesquisa, São Paulo*, v. 19, n.1, p. 465-496, 2017.

PEREZ, G. Prática Reflexiva do Professor de Matemática. In: BICUDO, M.A.V.; BORBA, M.C. (Org.). *Educação Matemática: Pesquisa em Movimento*. São Paulo: Editora Cortez, 2004, p. 250-263.

PICONE, D. F. B. *Os registros de representação semiótica mobilizados por professores no ensino do teorema fundamental do cálculo*. 2007, 126 f. Dissertação (Mestrado em

Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

PONCE-CAMPUZANO, J. C. Developing prospective mathematics teachers in Mexico: a lesson on the relationship between integration and differentiation. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, v. 44, n. 7, p. 996-1006, 2013. DOI: 10.1080/0020739X.2013.826386

PONCE-CAMPUZANO, J. C.; MALDONADO-AGUILAR, M. A. The fundamental theorem of calculus within a geometric context based on Barrow's work. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, v. 45, n. 2, p. 293-303, 2014. DOI: 10.1080/0020739X.2013.822586

RIBEIRO, A. J. A Álgebra que se aprende e a Álgebra que se ensina: encontros e desencontros na visão dos professores. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, Costa Rica, Año 11. Número 15. pp 127-136, 2016.

RIBEIRO, A. J. Equação e Conhecimento Matemático para o Ensino: relações e potencialidades para a Educação Matemática. *Boletim de Educação Matemática (BOLEMA)*, Rio Claro (SP), v. 26, n. 42B, p. 535-557, abr. 2012.

RIBEIRO, A. J.; CURY, H. N. *Álgebra para a formação do professor* – explorando conceitos de equação e de função. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

SCUCUGLIA, R. Investigando o teorema fundamental do cálculo com calculadoras gráficas. In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007, Belo Horizonte - MG. *Anais... IX Encontro Nacional de Educação Matemática Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM)*, p. 1-20, 2007

SEGADAS, V. C. *Students' Understanding of the Fundamental Theorem of Calculus: an Exploration of Definitions and Visual Imagery*. Tese (Doutorado), Institute of Education, University of London, 1998.

SHULMAN, L. S. Those who understand: Knowledge growth in the teaching. *Educational Researcher*, Washington, US, v. 15, n. 2, p. 4 - 14, 1986.

THOMPSON, P. Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies Mathematics*, v. 26, p. 229-274, 1994.

VAJIAC, A.; VAJIAC, B. Areas and the Fundamental Theorem of Calculus. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, v. 8, n. 39, p.1023-1036, 2008. DOI: 10.1080/00207390802136545

VERZOSA, D.; GUZON, A. F.; DE LAS PEÑAS, M. L. A. N. Using dynamic tools to develop an understanding of the fundamental ideas of calculus. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, v. 45, n. 2, p. 190–199, 2014, DOI: <http://dx.doi.org/10.1080/0020739X.2013.790513>

Texto recebido: 03/09/2018
Texto aprovado: 07/05/2019