

Polígono: uma linha ou uma região?

Polygon: is it a line or a region?

JOABY DE OLIVEIRA SILVA¹

GILSON BISPO DE JESUS²

Resumo

A definição de um conceito é algo essencial na atividade matemática. No tocante à definição de polígono, alguns pesquisadores criticam autores de livros didáticos que definem polígono como uma região do plano, em vez de defini-lo como uma linha. Neste contexto, esta pesquisa objetivou analisar elementos históricos, epistemológicos e didáticos sobre a definição de polígono. Assim, foi realizada uma Análise Institucional, baseada nos conceitos da Teoria Antropológica do Didático, sobre Os Elementos, livros específicos de Geometria, Parâmetros Curriculares Nacionais, Base Nacional Comum Curricular e um livro didático de matemática do 6º ano. Desse modo, foi possível concluir que Os Elementos e o livro didático adotam a definição de polígono como região, as referências atuais como uma linha e os documentos oficiais são indiferentes.

Palavras-chave: Polígono, Teoria Antropológica do Didático, Análise Institucional.

Abstract

The definition of a concept is something essential in mathematical activity. Concerning the polygon definition, some researchers criticize textbook authors who define polygon as a flat region, instead of defining it as a line. In this context, this research aimed to analyze historical, epistemological and didactic elements on the definition of polygon. Thus, it made an Institutional Analysis, based on the concepts of the Anthropological Theory of Didactic, on The Elements, specific books of Geometry, Parâmetros Curriculares Nacionais, Base Nacional Comum Curricular and a textbook of mathematics for the 6th year. Thus, it concluded that The Elements and the textbook adopt the polygon conception as a flat region, the current references as a line and official documents are indifferent.

Keywords: Polygon. Anthropological Theory of Didactic. Institutional Analysis.

¹ Mestrando em Educação Matemática, bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES): Universidade Estadual de Santa Cruz, Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas – joabyjos@hotmail.com.

² Doutor em Educação Matemática: Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Formação de Professores – gilbjs@bol.com.br.

Introdução

Os objetos matemáticos têm como característica predominante a abstração, diferente dos objetos de outras áreas do conhecimento. Ninguém pode dizer que pegou uma função ou tocou em um quadrado. A “manipulação” de um objeto matemático faz-se exclusivamente por meio de suas representações (DUVAL, 1993). Uma dessas representações é a definição, a qual é comumente expressa na língua materna, e que constitui um dos principais elementos do Saber Matemático.

Essa importância da definição para a organização interna da matemática se dá, dentre outros fatores, por ela ter o potencial de apresentar a essência do conceito matemático. Por exemplo, a definição de cubo verbaliza as principais características desse objeto que só existe, perfeitamente representado, na dimensão abstrata da matemática, além de permitir compreender sua relação com outros objetos tais como prismas e quadrado. Além disso, as definições têm seu valor para o processo de ensino e aprendizagem de matemática reconhecido por diversos pesquisadores (ZASLAVSK; SHIR, 2005; AIRES; CAMPOS; POÇAS, 2015; DE VILLIERS; GOVENDER; PATTERSON, 2009; COSTA; SANTOS, 2016; VELOSO, 1998).

Desse modo, uma pesquisa sobre o ensino de um objeto matemático, em particular, exige que o pesquisador não perca de vista as representações desse objeto e que se mantenha fiel à essência dele, que é externada por meio da definição. A investigação relatada nesse artigo consistiu em um processo de busca da essência do que é um polígono. Essa busca ocorreu no contexto de uma pesquisa de mestrado que objetiva analisar o processo de construção de definição de polígono mediado pelo uso do *software* GeoGebra no 6º ano do Ensino Fundamental.

Neste texto, objetivou-se *analisar elementos históricos, epistemológicos e didáticos sobre a definição de polígono*. Desse modo, é apresentada uma Análise Institucional sobre a definição de polígono, tendo em vista seu ensino e aprendizagem em uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental. Nesse tipo de análise, busca-se identificar as principais características do objeto matemático em estudo, sob o ponto de vista interno da matemática e do sistema de ensino.

Assim, a Análise Institucional realizada nesta pesquisa teve como foco a definição de polígono que pode ser encontrada no livro *Os Elementos*, de Euclides, e em livros que são, atualmente, referência em cursos de Geometria de universidades brasileiras. Na sequência, buscou-se identificar como essa definição é apresentado nos documentos

oficiais, Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Por fim, voltou-se o olhar para o livro didático do 6º ano adotado pela instituição da Educação Básica participante da pesquisa de mestrado, mencionada anteriormente.

A base teórica para a Análise Institucional, utilizada nesta pesquisa, advém da Teoria Antropológica do Didático - TAD (CHEVALLARD, 1992). Desse modo, foram aplicados os conceitos de Praxeologia, enquanto modelo de análise de práticas pessoais e institucionais relativas ao objeto; e o de Ecologia, que abrange as funções desempenhadas e as relações estabelecidas com outros objetos.

Essa teoria é melhor explicitada na seção seguinte, a qual é sucedida pela seção de Metodologia, espaço em que são apresentados os passos para realização da pesquisa. Na sequência, encontram-se as seções denominadas “Análise Institucional”, “Saber Sábio: os Elementos de Euclides e os polígonos”, “Saber Sábio: a concepção de polígono nas referências atuais”, “O Saber a Ser Ensinado Presente no Livro Didático”, as quais compõem o conjunto de resultados obtidos na investigação. Por fim, a seção das “Considerações Finais”, onde são expostas inferências dos resultados apresentados na seção anterior.

Referencial teórico

Na presente seção, discorre-se sobre os principais conceitos e noções da Teoria Antropológica do Didático (TAD). Esta teoria, proposta por Chevallard (1992), consiste, essencialmente, na expansão da Teoria da Transposição Didática, elaborada pelo mesmo autor. Nesta segunda teoria, é defendida a existência de três tipos de saberes: o Saber Sábio; o Saber a Ser Ensinado; e o Saber Ensinado. Segundo Chevallard (2000), o Saber Sábio, que também pode ser chamado de Saber de Referência, é a forma inicial que todo saber assume quando saberes sobre determinada área são agrupados, seguindo uma lógica interna. O Saber Geométrico é um exemplo de Saber Sábio que consiste na reunião de uma série de saberes sobre o espaço e as formas presentes nele. Esses saberes são relacionados entre si por um conjunto de regras de natureza hipotético-dedutiva que seguem os moldes da lógica matemática.

Esse Saber Sábio é, também, a origem do Saber a Ser Ensinado e do Saber Ensinado. O Saber a Ser Ensinado é constituído a partir da necessidade social de se comunicar os saberes constituintes do Saber Sábio às novas gerações (CHEVALLARD, 2000). Sendo assim, aspectos desses saberes são avaliados, selecionados e organizados, de forma a

corroborar o desenvolvimento das habilidades necessárias à vida na sociedade. Essa classe de saberes é geralmente encontrada em documentos oficiais dos sistemas de ensino. Enquanto isso, o Saber Ensinado é aquele que pode ser identificado na sala de aula sendo comunicado. Esse Saber é aquele derivado do Saber a Ser Ensinado, que é encontrado, por exemplo, no plano de aula do professor e nos registros (cadernos e fichas de atividades) dos alunos.

No contexto dessa teoria, o processo no qual os elementos que compõem um tipo de saber são transformados e adequados para compor outro saber é denominado por Chevallard (2000) de Transposição Didática. Ainda segundo esse autor, o processo de construção do Saber a Ser Ensinado é denominado de Transposição Didática Externa, pois ocorre fora do ambiente de efetivação do ensino, e é realizado por agentes externos tais como membros do governo responsáveis pela área da educação. Enquanto que o Saber Ensinado é originado por meio da Transposição Didática Interna, pois ele é efetivado somente no momento em que ocorre o processo de ensino-aprendizagem. Assim, essa transposição é realizada pelo professor.

Chevallard (1998), ao escrever sobre a Teoria Antropológica do Didático, destaca a dimensão antropológica no estabelecimento de um saber, ou seja, a constituição de um saber, como, por exemplo, o Saber Matemático, que decorre da ação e interação do homem. Segundo Henriques, Attie e Farias (2007), a TAD postula que a existência de um objeto do saber está atrelada ao seu reconhecimento por uma instituição ou por uma pessoa pertencente a uma instituição. A *instituição* é concebida como um dispositivo social total (HENRIQUES, 2016), no sentido de que reúne todos os elementos necessários para desempenhar uma função que lhe é designada pela sociedade. O reconhecimento institucional de um objeto se dá pela identificação de práticas institucionais (ou pessoais) que envolvam o objeto e de relações que este estabelece com outros objetos da instituição. Por essa razão, Chevallard (1998) teoriza sobre duas dimensões da TAD, a *praxeológica* e a *ecológica*.

A Organização Praxeológica, ou simplesmente Praxeologia, é um modelo para análise das práticas institucionais e pessoais no entorno de um objeto do saber (CHEVALLARD, 1998). Este modelo é composto por quatro noções: *Tarefa*, *Técnica*, *Tecnologia* e *Teoria*. A Tarefa pode ser entendida como aquilo que é solicitado que o aluno faça, como, por exemplo, *Construir um heptágono regular*. O modo de uma Tarefa ser realizada é denominado de Técnica, podendo haver mais de uma, a qual está ligada a um discurso que desempenha as funções de justificá-la e explicá-la. Esse discurso é chamado de

Tecnologia e está baseado em um tipo de discurso mais abrangente, que fornece os elementos para que a Tecnologia cumpra suas funções. A esse discurso “maior” Chevallard (1998) atribui o nome Teoria.

Esse modelo praxeológico se apresenta bastante útil na análise das práticas no entorno de um objeto específico, como, por exemplo, os polígonos. Contudo, as relações que esse objeto em estudo estabelece com outros são compreendidas de modo melhor quando lançamos nosso olhar sobre ele, seguindo a dimensão ecológica da TAD. Essa dimensão é composta de duas noções, a saber: *habitat* e *nicho*. O *habitat* pode ser entendido como o local de vida do objeto (CHEVALARD, 1998), ou seja, são os momentos do processo de estudo em que ele assume o papel principal. Enquanto que o *nicho* é concebido como as funções desempenhadas pelo objeto, dentro de outros *habitats*, ao se relacionarem com outros objetos. Por exemplo, a inscrição e circunscrição de polígonos em uma circunferência desempenham um papel fundamental no método para se chegar à fórmula da medida da área de um círculo.

Baseado nas ideias da TAD, Henriques, Nagamine e Nagamine (2012) propõem um modelo de análise de elementos institucionais, principalmente o de documentos oficiais do sistema de ensino e de livros didáticos. Esse modelo é chamado de Análise Institucional, que, segundo os autores:

[...] é um estudo realizado em torno de elementos institucionais, a partir de inquietações/questões levantadas pelo pesquisador no contexto institucional correspondente, permitindo identificar as condições e exigências que determinam, nessa instituição, as relações institucionais e pessoais a objetos do saber, em particular, os objetos matemáticos, as organizações ou praxeologias desses objetos que intervêm no processo ensino/aprendizagem. (HENRIQUES; NAGAMINE; NAGAMINE, 2012, p. 7).

Uma vez que essa análise permite identificar as “exigências” institucionais a respeito das características dos objetos matemáticos que devem ser ensinadas, ela se torna um processo imprescindível na elaboração de uma sequência didática. Assim, este artigo busca apresentar as respostas, encontradas por meio de uma Análise Institucional, a uma série de questionamentos sobre a definição de polígono, que estão presentes na seção seguinte. Os resultados dessa análise são apresentados e comparados com as concepções de outros pesquisadores, nas seções posteriores.

Metodologia

A pesquisa apresentada neste artigo consiste em uma Análise Institucional, realizada no âmbito de um curso de mestrado, na qual os pesquisadores se propõem a elaborar,

implementar e analisar os resultados de uma sequência didática voltada para construção da definição de polígono. Nessa Análise Institucional, objetivou-se *analisar elementos históricos, epistemológicos e didáticos sobre a definição de polígono*, a fim de saber: Como eram definidos os polígonos em *Os Elementos*, de Euclides?; Como é definido polígono em livros que atualmente são utilizados na formação de matemáticos e professores de matemática? Quais indicações os documentos oficiais brasileiros fazem a respeito do ensino sobre polígono? Quais são as práticas sugeridas no livro didático para a construção da definição de polígono?

A escolha do livro *Os Elementos*, de Euclides, se deve ao fato de que ele é uma fonte histórica que serviu como referência principal do Saber Geométrico e influenciou seu ensino por séculos (TOMEI, 2006; EVES, 2004). Sendo assim, foi realizada a leitura das definições do primeiro capítulo, da tradução para o português, do livro *Os Elementos* (EUCLIDES, 1944), a partir da qual se realizou uma interpretação matemática baseada nos conceitos da Teoria Antropológica do Didático.

As referências atuais, livros que são utilizados no Ensino Superior, foram escolhidas em quatro passos, sendo os dois primeiros aleatórios. Contudo, para se sentirem representados nesta pesquisa, os autores incluíram, automaticamente, uma universidade baiana como fonte de obtenção dessas referências. No primeiro passo da seleção dos livros, os nomes de quatro regiões do Brasil foram escritos em pedaços de papel, e sorteados dois deles, resultando nas regiões Norte e Sudeste. O segundo passo ocorreu de forma análoga, no qual foi sorteado um estado de cada região anteriormente selecionada, obtendo, assim, Pará e São Paulo. No terceiro passo, em cada um desses dois estados, foi escolhida uma universidade, que ofertasse o curso de matemática (licenciatura e/ou bacharelado).

Feito isso, o quarto passo consistiu na leitura da lista de disciplinas obrigatórias e das referências sugeridas nas ementas dos componentes que tratam especificamente sobre Geometria. Os livros selecionados nesse processo são apresentados na seção “Saber Sábio: a concepção de polígono nas referências atuais”, e constituem a principal fonte de elementos epistemológicos para análise.

No que diz respeito à seleção dos documentos oficiais, foram escolhidos os que são direcionados à instituição de referência da pesquisa de mestrado, ou seja, o 6º ano do Ensino Fundamental. Assim, os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997, 1998) e a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) foram submetidos a uma análise ecológica nos moldes da Teoria Antropológica do Didático. Nesta análise,

observou-se, essencialmente, em que momento os polígonos são apontados como objetos centrais de estudo (*habitar*³) e quais funções ele desempenha ao se relacionar com outros objetos matemáticos.

Escolhemos o livro didático do 6º ano que foi adotado pela escola que participa voluntariamente da pesquisa de mestrado. O livro didático fez parte dessa Análise Institucional por se tratar de um dos principais elementos institucionais (HENRIQUES, 2016) e que, muitas vezes, é a principal fonte dos saberes matemáticos reconhecidos pela instituição. Além disso, é um dos principais instrumentos do professor para preparação de suas aulas, o que o torna uma importante fonte de elementos didáticos para análise.

A partir da análise dessas fontes, chegou-se a algumas conclusões sobre características históricas, epistemológicas e didáticas do ensino sobre a definição de polígono. Algumas dessas conclusões divergiam das de outros pesquisadores. Assim, nas próximas seções, são apresentados os resultados das análises realizadas acompanhados de comparações com a concepção de polígono defendida por outros autores.

Análise institucional

Nas seções seguintes, são apresentados os resultados da Análise Institucional, a qual foi estruturada tendo como referência os três tipos de saberes descritos por Chevallard (2000). Cada um desses saberes foi associado a uma pergunta. Assim, quando se buscou identificar o Saber Sábio, a pergunta “*O que é um polígono?*” foi quem norteou as leituras de *Os Elementos* e dos livros usados no Ensino Superior. Enquanto que o Saber a Ser Ensinado foi associado ao questionamento “*O que deve ser ensinado sobre polígono no 6º ano?*”, e as fontes utilizadas para respondê-lo foram os Parâmetros Curriculares Nacionais e a Base Nacional Comum Curricular. Além disso, “*Como os polígonos são definidos e propostos para serem ensinados no livro didático do 6º ano?*” Esses questionamentos são respondidos nas seções que seguem.

Saber Sábio: *Os Elementos* de Euclides e os polígonos

No que concerne à Geometria, o livro *Os Elementos* é a fonte histórica e epistemológica de notável relevância para este campo do Saber Matemático, dada a influência que

³Na abordagem ecológica de saberes, Chevallard (1992) define *habitat* como sendo o lugar de vida e o ambiente conceitual de um objeto do saber situações de ensino nas quais aparecem as manipulações e experiências”. (CHEVALLARD, 1992 apud HENRIQUES, NAGAMINE E NAGAMINE, 2012, p. 1268)

exerceu sobre o processo de ensino e aprendizagem durante séculos. Contudo, não se esperava encontrar o termo “polígono” acompanhado de uma definição, e de fato não foi identificado em *Os Elementos* essa palavra. Todavia, dentre as definições iniciais apresentadas no “Primeiro Livro” – primeiro capítulo de *Os Elementos* – encontramos as de *Têrmo* e *Figura*. O “*Têrmo* se diz aquilo, que é extremidade de alguma cousa” (EUCLIDES, 1944, p. 5, grifo nosso). Também é apresentado em uma tradução para o Português mais recente: “*Fronteira* é aquilo que é extremidade de alguma coisa” (EUCLIDES, 2009, p. 97, grifo nosso), onde podemos verificar que houve basicamente uma troca de palavra.

Enquanto isso, o objeto *Figura* não passou por essa mudança de terminologia. No entanto, as redações são ligeiramente diferentes nas duas traduções, como podemos ver: “é um espaço fechado por um ou mais *Têrmos*” (EUCLIDES, 1944, p. 5); “é o que é contido por alguma ou algumas fronteiras” (EUCLIDES, 2009, p. 97). Ao lermos estas duas traduções, é plausível afirmar que as duas definições de *Figuras* são equivalentes a algo, cujos limites são chamados de *Têrmo/Fronteira*.

Essas definições apresentadas no parágrafo anterior podem ser consideradas “genéricas”, no sentido de que é possível interpretar os polígonos, os poliedros e, até mesmo, os segmentos de reta, como *Figuras*. Além disso, nota-se uma dependência mútua entre *Têrmo/Fronteira* e *Figura*, pois a primeira existe para limitar algo, e a segunda existe por ser limitada por algo. Um ponto que merece destaque, em ambas as traduções da definição de *Figura*, é que elas remetem à ideia de uma partição (do plano ou do espaço), pois é algo que possui “extremidades”, é “fechado”, está “contido”, ou seja, ela é um subconjunto disjunto das demais partes do plano ou do espaço. Por exemplo, se um poliedro é uma *Figura*, então ele é sólido; caso contrário, ele é apenas um conjunto de superfícies planas que limitam uma região espacial.

Ao aplicar o mesmo raciocínio do parágrafo anterior à 20ª definição de presente em Euclides (1944, p. 6), “*Figuras retilíneas* são as que são formadas com linhas retas”, vemos que esse conceito de *Figuras Retilíneas* se refere, aparentemente, ao conceito de polígono. Embora o autor não deixe claro se essas linhas retas são coplanares e se são *Têrmo/Fronteira* da *Figura*, o fato é que, por se tratar de um tipo de *Figura*, não são apenas um conjunto de linhas, mas sim o que está contido por estas linhas. Assim, a expressão “formada com linhas retas” pode ser interpretada como um atributo definidor, ou seja, “características ou propriedades que definem um conceito” (PROENÇA; PIROLA, 2011, p. 204).

Posteriormente, Euclides (1944) classifica as Figuras Retilíneas de acordo com a quantidade de linhas retas que formam seus extremos. Desse modo, o autor fala em *triláteros*, *quadriláteros* e *multiláteros*, que é uma forma de classificação análoga ao que é aplicado no estudo dos polígonos. Desse ponto de vista, torna-se plausível afirmar que em *Os Elementos*, de Euclides, polígono aparece sob a denominação de Figura Retilínea e, portanto, é uma região plana delimitada por linhas retas.

Essa ideia de polígono, derivada das definições presentes na obra acima mencionada, diverge da ideia defendida por Proença e Pirola (2011) e por Leivas (2012). Esses autores defendem que o ensino de geometria deve considerar que polígono é uma linha, e que a região delimitada por ele deve ser tratada como *região poligonal*. Como um dos argumentos desses autores gira em torno de uma obra que pode ser considerada como referência atual em cursos de Geometria no Ensino Superior, inicialmente (na próxima seção), será apresentada a análise de livros usados em cursos de nível superior; em seguida, discutiremos mais sobre a questão: *os polígonos são regiões planas ou linhas?*

Saber Sábio: a concepção de polígono nas referências atuais

Inicialmente, é importante esclarecer que, quando se escreve *referências atuais*, neste texto, faz-se alusão a livros que foram selecionados conforme descrito na metodologia, mesmo estes tendo sido publicados entre as décadas de 1970 e 1990. Desse modo, eles são ditos atuais, pois compõem os currículos atuais dos cursos de Matemática. Assim, os livros que foram selecionados se encaixam nessa descrição, e a análise destes foi iniciada pela observação dos sumários no intuito de se identificar quais capítulos tratavam especificamente da definição de polígono. Em seguida, procedeu-se com a identificação das definições e dos elementos geométricos utilizados nelas e, por fim, foi feita uma comparação entre as definições apresentadas em cada livro.

Os livros selecionados no processo descrito na metodologia foram: Castrucci (1978); Morgado, Wagner e Jorge (1973); Moise e Downs (1971); Carvalho (1982); Dolce e Pompeo (1993). Com a análise desses livros, foi possível identificar inicialmente três “caminhos” para a apresentação da definição de polígono, os quais foram chamados de *definir triângulo*, *definir região convexa* e *definir linha poligonal*.

Moise e Downs (1971) foram os únicos autores que seguiram o percurso de *definir triângulos* para chegarem à definição de polígono. Eles escrevem que, “se A, B e C forem três pontos não-colineares, a reunião dos segmentos AB, AC e BC é chamada um

triângulo e é representada por ΔABC ". Em seguida, afirmam que "cada triângulo ΔABC determina três ângulos", para depois definirem pontos no interior e no exterior de um ângulo. Baseados nessas definições, eles diferenciam os pontos interiores e exteriores do triângulo, sendo os primeiros aqueles que pertencem à intersecção dos três ângulos determinados pelo ΔABC . Na sequência, Moise e Downs (1971) definem *região triangular* como a união entre o triângulo (linha) e os pontos interiores. É a partir dessa definição de região triangular que Moise e Downs (1971, p. 291) definem *a região poligonal* como "a reunião de um número finito de regiões triangulares, em um plano, de tal modo que, se duas se interceptam, a intersecção é um ponto ou um segmento". Pode-se inferir que, de acordo com esses autores, assim como um triângulo é a linha que delimita uma região, então o polígono também deve ser considerado como um conjunto de segmentos de retas que delimitam uma região fechada no plano.

No "caminho" de *definir região convexa*, tem-se Carvalho (1982). Esse autor inicia escrevendo sobre um conjunto de pontos no plano, tais que, dados dois pontos distintos, se o segmento que os une está totalmente contido na região, então esta é dita convexa. Essa definição de região plana convexa é compatível com a apresentada por Lima (2007)⁴ e Castrucci (1978), que seguem outra linha para a construção da definição de polígono. A partir dessa definição, pode-se afirmar que um segmento de reta é uma região convexa, pois ele atende a todos os atributos definidores. Contudo, Carvalho (1982) agrega a essa, a definição de *contorno*.

Carvalho (1982) diz que "chama-se *região poligonal convexa*, o conjunto dos pontos comuns a todos os semiplanos que as retas dos lados de um polígono podem determinar. A linha quebrada e fechada é neste caso o *contorno* da região" (CARVALHO, 1982, p. 22, grifo do autor). Nesse caso, o contorno é o conjunto dos segmentos de retas que pertencem à intersecção dos semiplanos. No tocante à existência de um contorno, a definição de Carvalho (1982) apresenta uma intersecção com a de Moise e Downs (1971), pois em ambas é apontada a existência do que em topologia é denominado de pontos de fronteiras⁵.

Dando continuidade à apresentação das ideias de Carvalho (1982), ele define *linha poligonal* e *região poligonal*. Entretanto, foi possível notar uma aparente contradição ao

⁴ A obra desse autor não é analisada neste trabalho porque não apareceu mediante o processo de seleção descrito na seção de Metodologia deste artigo. Além disso, ela trata somente dos polígonos convexos.

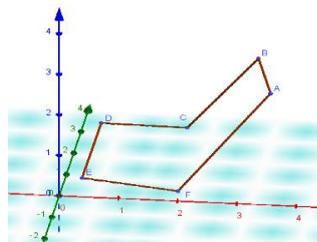
⁵ Seja A um subconjunto de um espaço métrico ε . Se a bola aberta centrada num ponto $q \in A$ contiver algum ponto que não pertence a A , dizemos então que q pertence a fronteira de A . (WU, 2006, p. 122)

empregar o termo “polígono” para se referir tanto à linha quanto à região. Isso talvez se justifique pelo fato de que o autor defende que “a região poligonal e seu contorno formam o que já definimos como polígono” (CARVALHO, 1982, p. 22), ou seja, como a região e a linha poligonal formam o polígono. Então, para ele, cada um, individualmente, também pode ser chamado de polígono. Sendo assim, pode-se afirmar que, para Carvalho (1982), polígono é a união de uma linha com a região delimitada por ela, diferente do que é defendido por Moise e Downs (1971).

Diferente dos autores apresentados até aqui (MOISE; DOWNS, 1971; CARVALHO, 1982), Castrucci (1978), Morgado, Wagner e Jorge (1973) e Dolce e Pompeo (1993) percorrem o caminho de *definir linha poligonal*. Esses autores apresentam a ideia de polígono como um conjunto de três ou mais segmentos de retas unidos pelos extremos. Dentre essas três obras, somente Morgado, Wagner e Jorge (1973) se dedicam a separar as linhas poligonais em abertas e fechadas, e apenas Dolce e Pompeo (1993) mencionam a necessidade de que os vértices da linha poligonal sejam coplanares.

Essa coplanaridade dos vértices faz-se necessária à definição de polígono, pois esse objeto geométrico pode ser representado também no espaço. Caso a coplanaridade dos vértices (ou mesmo dos segmentos) que compõe a figura não se faça presente na definição, é possível que o objeto geométrico representado na Figura 1, também possa ser chamado de polígono.

Figura 1 – Exemplo de polígono caso a coplanaridade dos lados seja omitida da definição.



Fonte: Construção dos autores.

Retomando as características do “caminho” de definir linha poligonal, tomado por Castrucci (1978), Morgado, Wagner e Jorge (1973) e Dolce e Pompeo (1993), tem-se a seguinte sequência de ações: explicitar as noções de plano, reta e ponto; definir pontos não-colineares e pontos coplanares; definir segmento de reta; definir linhas poligonais abertas e fechadas, sendo estas últimas o que estes autores chamam de polígono.

A análise das obras apresentadas nesta seção permite observar que, para a maioria dos autores das referências atuais, o polígono é uma linha e a região plana delimitada por ele é dita região poligonal. Essa concepção diverge da que aparece em *Os Elementos*, de

Euclides (apresentada na seção anterior), mas converge para o mesmo ponto de vista de Proença e Pirola (2011) e Leivas (2012).

Este último autor argumenta que “os dois conceitos [polígono e região poligonal] devem, em nossa opinião, ser distinguidos desde o início da escolaridade, a fim de não produzirem obstáculos epistemológicos futuros e terem continuidade no avanço da escolaridade” (LEIVAS, 2012, p. 13). Se a adoção da concepção de polígono como região é um obstáculo epistemológico, segundo Brousseau (2008), estes não podem ser evitados. O problema reside na possibilidade dessa concepção ser um obstáculo didático, ou seja, fruto da escolha do professor, que gera e dificulta o processo de ensino-aprendizagem de forma desnecessária. Contudo, a natureza da pesquisa apresentada neste artigo não permite concluir, ou refutar, se a adoção da concepção de polígono como região gera um obstáculo didático.

Nas obras analisadas (CASTRUCCI, 1978; MORGADO; WAGNER; JORGE, 1973; MOISE, DOWNS, 1971; CARVALHO, 1982; DOLCE; POMPEO, 1993), não são apresentadas justificativas para que se considere o polígono como sendo uma linha. Tampouco é dado um motivo para não considerar a região poligonal como parte constituinte do polígono. Essa ausência se deve ao fato de que não é característico desse tipo de obra matemática apresentar tais tipos de justificativa. No entanto, Leivas (2012) defende que não diferenciar esses dois objetos geométricos pode causar dificuldades aos alunos na diferenciação dos conceitos de área e perímetro. Pois, segundo este autor:

Há de ser levado em consideração o conceito de polígono [uma linha], ao qual está associada uma unidade de medida, que é o comprimento, e ao qual se associa perímetro, que é linear. Por outro lado, região poligonal está associada a uma unidade de medida que é sua área. (LEIVAS, 2012, p. 13).

Esse argumento é coerente, pois tenta associar um conceito geométrico a uma unidade de medida, porém essa ideia não é irrefutável, uma vez que também é plausível justificar a dificuldade dos alunos em diferenciar os conceitos de área e perímetro simplesmente por eles não compreenderem o que cada palavra denota. A palavra “perímetro”, por exemplo, deriva do grego *perímetros*, que significa “medida de contorno”. Partindo desse entendimento, se se considerar polígono como sendo uma linha, a expressão “perímetro de um polígono” perde o sentido, pois linha não tem contorno.

No que diz respeito à área, Proença e Pirola (2011, p. 208) destacam uma tendência dos autores de livros didáticos que “têm apresentado definições que caracterizam polígonos sendo a linha poligonal mais a região interna. Possivelmente, isso seja uma postura assumida para uma abordagem posterior do assunto de áreas”. Pode-se inferir dessa

afirmação que, embora Proença e Pirola (2011) concordem com Leivas (2012) que polígono de fato é uma linha, eles não sustentam o argumento que associa o polígono e a região poligonal a unidades de medidas diferentes (comprimento e área, respectivamente). Entretanto, estes autores, Proença e Pirola (2011) e Leivas (2012), compartilham a mesma concepção da maioria das obras analisadas nessa seção e divergem daquela encontrada por Euclides (1944).

Diante desses dois resultados e das críticas aos autores de livros didáticos que apresentam os polígonos como a união da linha poligonal com a região poligonal, pode-se questionar: por que esses autores de livros didáticos insistem nessa ideia? Sabe-se que os documentos oficiais sobre a educação brasileira, como os PCN e, mais recentemente, a BNCC norteiam a elaboração desses livros didáticos, que são submetidos à avaliação do Programa Nacional do Livro Didático. Desse modo, a análise desses documentos poderia lançar luz sobre a insistência de alguns autores de livros didáticos defenderem a concepção de polígono como região. Assim, na próxima seção apresentamos os resultados de uma análise ecológica dos PCN e da BNCC.

O Saber a Ser Ensinado: os polígonos nos documentos oficiais

Nesta seção, apresenta-se uma parte de uma Análise Institucional que, originalmente, objetivava identificar os *nichos* e *habitats* dos polígonos nas indicações dos PCN e da BNCC para o 6º ano do Ensino Fundamental. Ou seja, buscava-se listar as funções desempenhadas pela definição de polígono (*nicho*), bem como quais tipos de polígono são mencionados e com quais outros objetos matemáticos ele se relaciona (*habitat*). Contudo, nesta seção, além de serem apresentados os principais resultados dessa análise, tenta-se apontar fatores que podem ter levado os autores de livros didáticos a definirem polígonos como a união da linha poligonal com a região poligonal.

Assim, os Parâmetros Curriculares Nacionais são um conjunto de documentos organizados em dez volumes. Cada um deles, com exceção do Volume 1 que apresenta o documento de forma geral, traz uma série de indicações referentes ao ensino de um campo de conhecimento a nível do Ensino Fundamental. Por exemplo, o Volume 3 versa sobre o ensino de Matemática. Esse documento divide o Ensino Fundamental em quatro ciclos, os quais abrangem, em termos do Ensino Fundamental de nove anos, 2º e 3º anos, que formam o primeiro ciclo, 4º e 5º anos, que formam o segundo ciclo, o terceiro ciclo, que é formado pelos 6º e 7º anos, e o quarto ciclo, formado pelos 8º e 9º anos. Além disso, o

documento referente à área de matemática está dividido internamente em quatro blocos: Números e Operações; Espaço e Forma; Grandezas e Medidas; e Tratamento da Informação.

Embora a pesquisa desenvolvida estivesse focada no 6º ano, optou-se por analisar os ciclos anteriores para se obter uma melhor visão do tratamento dado aos polígonos nesse documento. Assim, referente ao segundo ciclo, encontraram-se os seguintes excertos:

Perceber semelhanças e diferenças entre objetos no espaço, identificando formas tridimensionais ou bidimensionais, em situações que envolvam descrições orais, construções e representações (BRASIL, 1997, p. 47).

Percepção de semelhanças e diferenças entre cubos e quadrados, paralelepípedos e retângulos, pirâmides e triângulos, esferas e círculos. (BRASIL, 1997, p. 51).

É possível notar, a partir desses trechos, que o estudo das figuras bidimensionais está atrelado ao das formas espaciais (tridimensionais). Neste contexto, a característica elementar do polígono (estar contido inteiramente no plano) é desenvolvida por meio da percepção da diferença entre figuras planas e espaciais. Estes fragmentos do PCN demarcam um *habitat* das figuras espaciais, especialmente do cubo, paralelepípedo e esfera, pois é por meio do estudo das características das superfícies dos objetos tridimensionais que emerge o estudo dos polígonos. Dessa forma, é possível identificar uma função dos polígonos no *habitat* das figuras geométricas espaciais, que é o de representar as faces de algumas dessas figuras. A essa função atribui-se o nome de *nicho espacial*, o qual se estabelece no *habitat dos poliedros*.

Esse *nicho* espacial pode ser identificado também no terceiro ciclo do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998). Neste contexto, pode-se perceber um delinear do processo de construção do conceito de polígono, o qual é visto até esse ponto como uma representação da face de um poliedro. Desse modo, seria possível que um aluno definisse quadrado como sendo face de um cubo.

Ainda sobre o processo de definição, é possível identificar no mesmo documento como papel do professor incitar os alunos à “observação de características das figuras [...] o que lhes permite identificar propriedades e, desse modo, estabelecer algumas classificações” (BRASIL 1997, p. 58). Essa recomendação didática dos PCN é mais específica, pois destaca como Conteúdo Conceitual e Procedimental, do bloco Espaço e Forma, as propriedades dos polígonos que devem ser explicitadas no processo de ensino e aprendizagem. Assim, as atividades realizadas em sala sobre polígonos devem focar na identificação “de semelhanças e diferenças entre polígonos, usando critérios como

número de lados, número de ângulos, eixos de simetria, [...] paralelismo e perpendicularismo de lados” (BRASIL 1997, p. 60).

A partir dessas indicações, é possível notar o protagonismo do conceito de polígono. Esse fato é um forte indicador da existência de um *habitat próprio dos polígonos* no 4º ano e 5º ano, os quais compõem o segundo ciclo do Ensino Fundamental. Assim, é plausível afirmar que os alunos desse ciclo devem ser submetidos ao processo de estudo dos principais conceitos e propriedades, os quais são utilizados no processo de construção da definição de polígono. Em relação aos PCN do terceiro ciclo, este *habitat* próprio não só é mantido, como também é expandido. Este fato pode ser verificado, pois, além de descrever semelhanças e diferenças entre as figuras planas, propõe-se que os alunos as distingam “estabelecendo relações entre elas e utilizando nomenclatura própria” (BRASIL, 1998, p. 73).

Além disso, os PCN apontam como uma atitude a ser desenvolvida pelos alunos a “sensibilidade para observar simetrias e outras características das formas geométricas, na natureza, nas artes, nas edificações” (BRASIL, 1997, p. 62). Esse Conteúdo Atitudinal presente nesse documento revela um *nicho* da aplicação dos polígonos na realidade, ao qual foi dado o nome de *nicho artístico*. Deste, emergem diversas conexões dos saberes matemáticos sobre polígono com objetos do mundo físico, o que potencializa o desenvolvimento de atividades que visem contribuir para a aprendizagem e, mais especificamente, para a construção da definição desse objeto geométrico.

Como é possível notar até aqui, os polígonos estendem sua influência para além do *habitat* próprio anteriormente identificado. Outra prova disso é a possibilidade de se encontrar no terceiro ciclo indicações que remetem ao denominado *nicho numérico*. Esse *nicho* é evidenciado, por exemplo, pela proposição de um estudo “da raiz quadrada e cúbica de um número, a partir de problemas como a determinação do lado de um quadrado de área conhecida ou da aresta de um cubo de volume dado” (BRASIL, 1998, p. 72).

De modo geral, os volumes dos PCN analisados defendem um ensino exploratório para as figuras geométricas. “Dessa exploração resultará o reconhecimento de figuras [...] bidimensionais (como quadrados, retângulos, círculos, triângulos, pentágonos, etc.) e a identificação de suas propriedades” (BRASIL, 1997, p. 82). Esse trecho, além de sugerir que o ensino de geometria deve levar os alunos a realizarem experimentos com as figuras geométricas planas, também explicita os polígonos que devem figurar no processo de ensino e aprendizagem no Ensino Fundamental, a saber: triângulos; retângulos; quadrados; e pentágonos.

O mesmo padrão de análise aplicado nos PCN foi aplicado na Base Nacional Comum Curricular, ou seja, buscou-se identificar *habitats* e *nichos* dos polígonos e indicações para o desenvolvimento do processo de ensino sobre esses objetos. A BNCC é um documento onde é definido “o conjunto orgânico e progressivo de *aprendizagens essenciais* que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica” (BRASIL, 2017, p.7, grifo nosso). Além disso, este documento norteia o Ensino Fundamental na busca de desenvolver dez Competências Gerais, as quais são traduzidas em competências específicas dentro de cada uma das cinco Áreas de Conhecimento: Linguagens; Matemática; Ciências da Natureza; Ciências Humanas; e Ensino Religioso.

Ainda sobre a organização da BNCC, as Competências Específicas de cada área são compostas por habilidades. Essas habilidades são organizadas, no caso da Matemática, em cinco Unidades Temáticas: Números; Álgebra; Grandezas e medidas; Geometria; Probabilidade e estatística. Assim, nessas Unidades são encontrados elementos da ecologia relativa aos polígonos. O *nicho espacial*, por exemplo, é identificado por meio da expectativa de “que os alunos indiquem características das formas geométricas tridimensionais e bidimensionais, associem figuras espaciais a suas planificações e vice-versa” (BRASIL, 2017, p. 228). Note-se que a função implícita (*nicho*) de representar as faces de figuras espaciais, ao serem planificadas, é potencialmente desenvolvida pelos polígonos, assim como era indicado nos PCN.

Além desse *nicho* espacial, é possível identificar no 4º, 5º e 6º ano uma função desempenhada especificamente pelos quadrados na Unidade Temática Grandezas e medidas. Nesta Unidade, os quadrados representam a unidade de medida de área, caracterizando, assim, o *nicho métrico*. A partir do 5º ano, este *nicho* é ligeiramente ampliado, pois, além do quadrado representar essa unidade de medida, os polígonos de forma geral passam a ser objetos de investigação no estudo de área e perímetro. Para essa investigação, a BNCC indica o uso de diferentes recursos didáticos.

No tocante aos recursos didáticos, a BNCC sugere o uso de papel quadriculado, ou plano cartesiano, e *softwares* de Geometria Dinâmica no estudo de simetria presente em alguns polígonos. Esses recursos têm suas contribuições apontadas ainda nos PCN, mas é notório que a BNCC indica o uso de *softwares* um número de vezes maior do que os PCN. É bem provável que esta presença mais notória dos programas de computador, especificamente desenvolvidos para o ensino de conteúdos matemáticos, se deva ao fato da popularização de dispositivos de informática, principalmente *notebooks* e *smartphones*. Na BNCC, tanto

para os Anos Iniciais, quanto para os Anos Finais, é notório que “*softwares* de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas” (BRASIL, 2017, p. 232).

No texto da BNCC, o *habitat próprio* dos polígonos é revelado por meio da sugestão de desenvolver a habilidade de “classificar e comparar figuras planas (triângulo, quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo) em relação a seus lados (quantidade, posições relativas e comprimento) e vértices” (BRASIL, 2017, p. 245). Esse trecho faz referência à necessidade de se trabalhar com elementos que são essenciais para construção da definição de polígono. Ao mesmo tempo, revela o primeiro indício de que os quadriláteros e os triângulos são os tipos de figuras que ganham maior ênfase no estudo dos polígonos. Ainda, a “congruência de figuras geométricas planas” (BRASIL, 2017, p. 244) é indicada como uma aprendizagem essencial para o Ensino Fundamental até o 6º ano.

Na mesma parte da BNCC, referente ao 6º ano, aparece como Objeto de Saber os “Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados” (BRASIL, 2017, p. 258). Nessa citação, a classificação quanto às medidas de lados e ângulos pode ser interpretada como uma indicação para o estudo dos polígonos regulares e os não regulares. No tocante aos triângulos, essa indicação revela a sugestão de que sejam estudados os escalenos, isósceles e equiláteros, assim como os obtusângulos, acutângulos e os retângulos. Além disso, esse trecho da BNCC menciona o uso das noções de paralelismo e perpendicularismo como características a serem utilizadas na separação dos polígonos em categorias.

É possível notar que o ato de *classificar* é uma ação bastante recorrente nesse documento e que é usada para gerar diferentes definições. A Tarefa *classificar as figuras planas* é a ação inicial que pode conduzir os alunos a observarem os atributos definidores que distinguem os polígonos das demais figuras planas. Assim como a classificação quanto ao número de lados, ângulos, lados paralelos e perpendiculares aponta na direção da divisão interna dos polígonos. Desse modo, é possível afirmar que, para que uma proposta de ensino sobre polígonos possa ser vista como coerente às indicações da BNCC, deve abranger situações de classificação destas figuras.

A análise institucional desses dois documentos, PCN e BNCC, permitiu que fossem identificados os polígonos, que encontram um *habitat próprio*, pelo menos, do 1º ao 6º ano. Além disso, esses objetos geométricos emergem do *habitat* dos poliedros, que constitui o denominado *nicho espacial* dos polígonos. Contudo, essa classe de figuras não

estabelece relações apenas dentro do domínio da Geometria, prova disso é a identificação do *nicho numérico*, do *nicho métrico* e do *nicho artístico*.

No que se refere à definição de polígono, estes documentos não explicitam se é uma linha ou uma região. No entanto, há expressões, tal como “área de um quadrado” (BRASIL 2017, p. 259) que remete à ideia de polígono como região. Essa apresentação implícita da concepção de polígono permite aos autores de livros didáticos, que se baseiam nos documentos oficiais, adotarem a concepção de polígono que lhes parece mais coerente, ou seja, a opção se dá por meio de uma interpretação subjetiva. Entretanto, foi possível identificar uma série de indicações didáticas que se resume em comparar, classificar, construir e decompor polígonos. Estas podem ser arranjadas a fim de promover a identificação de atributos definidores a serem utilizados na construção da definição destes objetos geométricos. Também é impossível não reconhecer como uma das principais decorrências dessa análise o notório protagonismo dos triângulos e quadrados no processo de estudo sobre polígonos.

A partir dos resultados trazidos até essa seção e baseando-se no aporte teórico da Teoria Antropológica do Didático, apresenta-se, a seguir, a análise sobre o livro didático do 6º ano. O livro didático é, na maioria das escolas públicas brasileiras, para os estudantes, a principal fonte de acesso aos saberes reconhecidos pela instituição, pois este pode ser acessado dentro e fora da sala de aula. Desse modo, na seção que segue, é apresentada uma síntese da análise de um livro didático nos níveis *global*, *regional* e *local*, fundamentados no modelo proposto por Henriques, Nagamine e Nagamine (2012).

O Saber a Ser Ensinado presente no livro didático

No nível global da análise, como o próprio nome sugere, objetiva-se dar uma visão geral para o leitor da organização do livro. Nessa análise, foram observadas as principais características do livro que o identificam e descrevem a distribuição dos objetos do saber presentes nele. Assim, a instituição de ensino que participou da pesquisa de mestrado, mencionada na introdução deste artigo, adotou o livro didático *Projeto Araribá: matemática* (GAY, 2014). Este volume é uma obra coletiva que, após a capa e contracapa, aparece um texto intitulado “Apresentação”, no qual os autores escrevem que o objetivo da obra é que os alunos descubram que o aprender matemática pode ser uma experiência interessante e que eles ampliem seus conhecimentos, bem como sua visão de mundo.

Em seguida, aparece uma apresentação dos principais elementos estruturais do livro, que é composta por 6 “Partes”, que, por sua vez, estão subdivididas em Unidades, sendo 18 no total, distribuídas de forma não equitativa entre as Partes. Cada uma dessas partes são iniciadas por uma “Página de Abertura”, em que são apresentados temas motivadores, como, por exemplo, na Parte 3 o tema é o “Bondinho do Pão de Açúcar”. Enquanto isso, as Unidades são iniciadas com a exposição do conteúdo a ser tratado nelas, as quais são sucedidas por blocos de atividades denominados “Vamos Fazer”, “Vamos Aplicar”, e em algumas, “Atividade Integrada”. Ao final de cada Parte, se fazem presentes as seções “Para Finalizar: organizem suas ideias” e “Para Finalizar: para conhecer mais”, destinadas aos alunos, a fim de que analisem o que foi estudado, e sugere vídeos, livros e sites para os alunos aprofundarem sobre o tema. A organização global do livro didático é comumente disposta em um quadro, o qual não é apresentado aqui por questões de espaço. A Unidade 14 do livro didático foi destacada, pois ela contém os elementos sobre o processo de estudo dos polígonos. Por esta razão, essa Unidade foi foco da análise a nível regional, apresentada no Quadro 1, que é construída com o objetivo de evidenciar como o polígono é tratado neste livro didático.

Quadro 1 – Estrutura organizacional regional de Gay (2014).

Seção	Título da Seção	Def.	Teo.	Ex.	Exo.	Pq.	P.
1	Polígono	4	1	4	8	2	3,5
2	Triângulos	7	0	6	4	1	2
3	Quadriláteros	7	3	6	17	1	4,5
	Atividade Integrada	0	3	0	13	1	2
Total		18	7	16	42	5	12
Def.= definições, Teo.=teremas, Ex.= exemplos, Exo.= exercícios, Pq.= pacotes⁶, P.=páginas.							

Fonte: Construção dos autores.

A análise regional do livro didático, resumida no Quadro 2, revela que na Unidade 14 é possível encontrar uma quantidade significativa de definições associadas ao conceito de polígono. Além disso, a própria subdivisão da Unidade reflete a ênfase a ser dada ao estudo dos quadriláteros e triângulos, pois estes dois contam com seções exclusivas e com parte significativa das páginas dedicadas à Unidade. Esse destaque também pode ser consequência do caráter norteador dos documentos oficiais, especificamente os PCN, para a elaboração de materiais didáticos, como é o caso do livro analisado. Todavia, os elementos que são destacados no modelo de análise regional não são o bastante para a

⁶Pacotes é um conjunto de exercícios que são resolvidos a partir de uma mesma Técnica (HENRIQUES; NAGAMINE; NAGAMINE; 2012).

compreensão do processo de construção da definição de polígono, menos ainda, como elas são usadas na obra analisada. Por assim ser, faz-se necessário um aprofundamento da análise do livro didático a um nível local.

Na análise local do livro didático, é observado cada elemento que compõe as seções. Assim, a primeira seção da Unidade 14 é iniciada com uma pintura composta por um conjunto de formas com cores variadas, as quais preenchem todo o espaço retangular da tela. Seis destas formas são destacadas pelos autores do livro didático, as quais são novamente separadas em dois grupos de acordo com as características dos seus contornos. Um dos dois grupos é composto por figuras, cujos contornos são “formados apenas por segmentos de retas” (GAY, 2014, p. 240). Esses contornos são denominados de *linhas poligonais*, enquanto que o contorno das figuras do outro grupo é chamado de *linhas não poligonais*.

Assim, é possível perceber que o processo de construção da definição de polígono é iniciado baseando-se no *nicho artístico*, para, posteriormente, adentrar no *habitat* próprio dos polígonos. Os autores continuam o processo de construção da definição de polígono abandonando as linhas não poligonais e iniciando uma classificação das linhas poligonais em quatro grupos, a saber: abertas não simples; abertas simples; fechada não simples; e fechada simples. O critério utilizado para dizer se uma linha poligonal é simples é a identificação de um possível cruzamento entre linhas, caso não haja, esta linha poligonal é dita simples. No entanto, os autores não explicitam uma Técnica a ser aplicada para identificar se uma linha é aberta ou fechada.

Diante disso, no livro é apresentado o seguinte teorema: “Uma linha poligonal *plana* fechada e simples divide o plano em duas regiões, ambas com infinitos pontos e sem pontos em comum” (GAY, 2014, p. 240, grifo nosso). Os autores não apresentam demonstração para esse teorema, tampouco essa apresentação seria adequada para o nível de escolaridade e o contexto introdutório em que o teorema aparece. Há nesse teorema um ponto importante, que é a necessidade de toda linha poligonal estar contida em um mesmo plano.

Essa planicidade também aparece na definição de polígono apresentada neste livro, como é possível ler: “Uma linha poligonal plana fechada e simples com sua região interna é um *polígono*” (GAY, 2014, p. 240, grifo do autor). É possível também observar que os autores apresentam o polígono como uma região plana, que, como foi visto nas seções anteriores, está em conformidade com a principal fonte histórica da geometria, *Os Elementos*, mas que diverge da ideia da maioria das referências atuais. Essa concepção

assumida comprova o que Proença e Pirola (2011) e Leivas (2012) afirmam ser uma concepção de polígonos que pode contribuir com dificuldades no processo de ensino e aprendizagem de Geometria, e que é difundida por muitos autores de livros didáticos.

A partir desses elementos da análise global, regional e local do livro didático, apresentados até este ponto do artigo, é possível inferir uma Organização Praxeológica relativa ao conceito de polígono, expressa no Quadro 2.

Quadro 2: Organização Matemática relativa a identificação de um polígono

Tarefa	Identificar se uma figura dada é um polígono.
Técnica	Inicia-se verificando se a figura é plana, ou seja, todos os seus pontos pertencem a um único plano. Em caso positivo, observa-se se seu contorno é composto exclusivamente por segmentos de reta. A continuação consiste em observar o contorno da figura para identificar se todos os vértices consecutivos estão ligados por um segmento, sem que nenhum se cruze (poligonal simples). Caso seja possível observar esses aspectos, é possível dizer que este contorno, unido a região interna delimitada por ele, é um polígono.
Tecnologia	Os polígonos são formados por segmentos de retas contidos num mesmo plano. Assim como para as retas, para que um segmento esteja contido num plano, basta que dois de seus pontos pertençam a este plano. Em geral, observa-se se os extremos do segmento pertencem ao plano para afirmar que o segmento está contido nele. Baseando-se nisso, é possível deduzir que, se um conjunto de segmentos possuem todas as extremidades contidas num mesmo plano, estes segmentos são coplanares. Fundamentados na noção de plano associada a um conjunto infinito de pontos, e a reta como um conjunto infinito de pontos que divide um plano em dois semi-planos limitados por uma reta, porém igualmente infinitos, destaca-se que a intersecção dos semi-planos de origem nas retas suportes destes segmentos é uma partição do plano, que é limitada, mas que contém uma infinidade de pontos. A essa partição dá-se o nome de região plana limitada por uma poligonal. A união dos segmentos de retas que limitam a região plana com a própria região é o que se denomina por polígono.
Teoria	As noções de ponto, reta e plano da Geometria Euclidiana Plana é que subsidiam a definição de linha poligonal e de região, das quais deriva a definição de polígono.

Fonte: Construção dos autores.

Essa Organização Praxeológica pode ser aplicada na resolução de atividades encontradas no livro didático, como, por exemplo, na quarta questão do bloco de atividades “Vamos Aplicar”, conforme a Figura 2.

Figura 2 – Exemplo de atividade sobre identificação de polígonos proposta no livro didático.

4 Observe o quebra-cabeça abaixo.

4. a) Há quatro polígonos; os polígonos D, G e H são quadriláteros e o polígono F é um triângulo.

a) Quantas dessas peças são polígonos? Nomeie os polígonos de acordo com o número de lados.

b) Reorganizando essas oito peças, é possível formar um polígono? Por quê?

Fonte: GAY (2014, p. 243).

É evidente que a Tarefa expressa no Quadro 2 não está escrita identicamente ao enunciado da questão presente na Figura 2. Porém, a pergunta presente no item (a) exige que os alunos identifiquem quais figuras que compõem o quebra-cabeça são polígonos, ou seja, a Tarefa do Quadro 2 é uma espécie de “generalização” daquilo que pode ser solicitado

ao aluno referente ao reconhecimento de polígonos. Assim, a Técnica implícita no livro consiste sumariamente em reconhecer o atributo definidor – ser composto apenas por segmentos de retas – relativo ao contorno da figura plana.

Considerações finais

Neste artigo, apresentou-se uma pesquisa que visou *analisar elementos históricos, epistemológicos e didáticos sobre a definição de polígono*. Os elementos históricos levados em consideração foram as definições presentes no livro *Os Elementos*, de Euclides, que revelou também características da epistemologia dos polígonos. Esses elementos epistemológicos foram complementados com a análise dos livros especializados em geometria publicados entre as décadas de 1970 e 1990, os quais foram denominados como *referências atuais*. Essas duas fontes, *Os Elementos* e referências atuais permitiram ter uma visão do tipo de saber, denominado por Chevallard (2000) como Saber Sábio, referente aos polígonos. Enquanto que o Saber a Ser Ensinado, que contém os elementos didáticos também analisados, teve como fonte os PCN, a BNCC e o livro didático do 6º ano.

Salienta-se que levar em consideração, desde o início, a região interna na construção da definição de polígono, tampouco torna esse processo mais complexo para um aluno do 6º ano do Ensino Fundamental. Isso pode ser comprovado pelos dados identificados em *Os Elementos*, no livro didático e nos documentos oficiais, sendo que os dois primeiros assumem a concepção de polígono como região, enquanto que os PCN e a BNCC são indiferentes a esse aspecto. Desse modo, a pergunta “polígono é uma linha ou uma região?” tem como resposta, de acordo com a análise de elementos históricos, epistemológicos e didáticos realizada nesta pesquisa, que as duas concepções são corretas.

Mesmo se isentando de assumir uma das concepções, foi possível verificar uma coerência entre o processo de ensino e aprendizagem que está implícito nos PCN e na BNCC referente aos polígonos. Ambos os documentos se remetem à aprendizagem por adaptação do aprendiz a uma situação proposta. Além disso, estes documentos carregam consigo indicações de diferentes *nichos*, que podem ser utilizados no processo de ensino aprendizagem sobre polígono. A exemplo disso, tem-se o *nicho artístico* que foi utilizado pelos autores do livro didático para introdução do estudo sobre este objeto matemático.

Esta opção dos autores culminou com o desenvolvimento de uma Organização Praxeológica aplicável a situações em que se requer a identificação de uma figura plana como sendo polígono ou não. Entretanto, este não é o indício de sincronia entre os documentos oficiais e o livro didático analisado. O outro aspecto foi papel de destaque dado aos triângulos e aos quadriláteros, fato este que conduz aos questionamentos: Por que esse destaque? Existem razões didáticas e matemáticas que justifiquem o protagonismo dos triângulos e quadriláteros?

Diante deste quadro, não seria a definição de polígono como região equivalente a definição como linha? Para responder a este questionamento, seria necessária uma análise matemática semelhante à construída por Lima (2007), o qual apresenta três definições para polígonos convexos e demonstra a equivalência dessas definições. Segundo este mesmo autor, esta diferença na escrita da definição decorre da adequação do objeto matemático para ser abordado em um determinado campo da matemática. Porém, mantém-se a referência ao conceito matemático original, referência essa que é revelada pela equivalência das definições. Assim, sugere-se que essa análise matemática seja realizada em pesquisas posteriores a fim de se comprovar ou refutar os resultados obtidos por meio da Análise Institucional apresentada neste artigo.

Referências

AIRES, A. P.; CAMPOS, H.; POCAS, R. Raciocínio geométrico versus definição de conceitos: a definição de quadrado com alunos de 6.º ano de escolaridade. **Relime**, México, v. 18, n. 2, p. 151-176, 2015. Disponível em: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362015000200002&lng=es&nrm=iso. Acesso em 11 ago. 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. Brasília: MEC, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL, Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular: educação é a base**, Brasília: MEC, 2017. Disponível em: <<https://goo.gl/bDM4YP>>. Acesso em: 07 ago. 2018.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino**. Tradução de Camila Bogéa. São Paulo: Ática, 2008.

CARVALHO, B. A. **Desenho geométrico**. Rio de Janeiro: Ao livro Técnico, 1982. 332 p.

CASTRUCCI, B. **Fundamentos de geometria**: estudo axiomático do plano euclidiano. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1978. 195 p.

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 12, n. 1, p. 73-112, 1992.

CHEVALLARD, Y. **La transposición didáctica**: del saber sabio al saber enseñado. 3. ed, Buenos Aires: Aique, 2000. 196 p. (Psicología cognitiva y educación).

CHEVALLARD, Y. **Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques**: L'approche anthropologique. In : L'UNIVERSITE D'ETE, 1998, p.91-118. Actes de l'Université d'été La Rochelle. Clermont-Ferrand, France: IREM, 1998

COSTA, A.P.; SANTOS, M. C. Estudo dos quadriláteros notáveis por meio do GeoGebra: as estratégias dos estudantes do 6º ano do ensino fundamental. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, São Paulo, v. 5, n. 2, 2016. Disponível em:<<https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/issue/view/1745>> Acesso em: 28 out. 2017.

DE VILLIERS, M.; GOVENDER, R.; PATTERSON. Defining in geometry. In: **Understanding geometry for a changing world**, NCTM, p.189 – 203, 2009.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar 9**: geometria plana. São Paulo–SP: Atual, 1993. 326 p.

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives**, Strasbourg, v. 5, p. 35-65, 1993.

EUCLIDES. **Elementos de geometria**. São Paulo: Cultura, 1944. 324 p.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo, SP: Editora UNESP, 2009. 593 p.

EVES, Howard. **Introdução a história da matemática**. ISBN 852680657-2, Campinas, SP: Universidade de Campinas, 2004. 843 p.

GAY, M. R. G. (ed.). **Projeto Araribá**: matemática. São Paulo: Moderna, 4.ed., v. 1, 2014, 351 p.

HENRIQUES, A.; ATTIE, J. P.; FARIAS, L. M. S. Referências teóricas da didática francesa: análise didática visando o estudo de integrais múltiplas com auxílio do *software* Maple. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 9, n. 1, p. 51-81, 2007. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/585>>. Acessado em: 11 ago. 2018.

_____, A.; NAGAMINE, A.; NAGAMINE, C. M. L. Reflexões Sobre Análise Institucional: o caso do ensino e aprendizagem de integrais múltiplas. **BOLEMA**, Rio Claro, v. 26, n. 44, p. 1261-1288, Dec. 2012.

_____, A. Análise Institucional & Sequência Didática como metodologia de pesquisa. In: SIMPÓSIO LATINO-AMERICANO DE DIDÁTICA DA MATEMÁTICA, 1, 2016, Bonito. **Anais...** Mato Grosso do Sul, 2016. Disponível em: <http://ladima.tuseon.com.br/uploads/file_manager/source/d7322ed717dedf1eb4e6e52a37ea7bcd/Trabalhos/AFONSO%20HENRIQUES.pdf>. Acessado em: 11 ago. 2018.

LIMA, E. L. **Matemática e ensino**. 3.ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007. 207 p. (Coleção do professor de matemática).

LEIVAS, J. C. P. Educação Geométrica: reflexões sobre o ensino e aprendizagem em Geometria. **Educação Matemática em Revista (RS)**, v. 1, n. 13, p. 9-16, 2012. Disponível em <http://sbemrs.org/revista/index.php/2011_1/article/view/43>. Acessado em: 19 set. 2018.

MOISE, E. E.; DOWNS JR., F. L. **Geometria moderna**. v. 2, São Paulo; Brasília: E. Blucher; Ed. da Univ. de Brasília, 1971.

MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; JORGE, M. **Geometria 1**. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1973. 138 p.

PROENÇA, M. C.; PIROLA, N. A. O conhecimento de polígonos e poliedros: uma análise do desempenho de alunos do ensino médio em exemplos e não-exemplos. **Ciênc. educ. (Bauru)**, Bauru, v. 17, n. 1, p. 199-217, 2011. Disponível em <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S151673132011000100013&lng=en&nrm=iso>. Acessado em 19 set. 2018.

TOMEI, C. **Euclides: a conquista do espaço**. ISBN 858802335-2, São Paulo: Odysseus, 2006. 119 p. (Imortais da Ciência)

VELOSO, E. **Geometria: Temas actuais**. Lisboa: IIE, 1998.

WU, S. T. **Introdução a Modelagem de Sólidos**. [S. I.]: Virtual Books. UNICAMP, 2006. Disponível em: <<http://www.dca.fee.unicamp.br/courses/IA841/2s2006/notas/cap6.pdf>>. Acessado em 05 de jan. 2018, 13:03:30.

ZASLAVSKY, O.; SHIR, K. Student's Conceptions of Mathematical Definition. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 36, n. 4, p. 317-347. 2005.