EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i3p72-96

Reflexões sobre um Modelo Epistemológico Alternativo (MEA) considerando as análises das relações institucionais acerca do objeto matemático limites de funções

Reflections on an Epistemological Model Alternative (MEA) considering the analyzes of the institutional relations about the mathematical object limits of functions

---

TEODORA PINHEIRO FIGUEROA[1]

SADDO AG ALMOULOUD[2]

Resumo

A pesquisa visa contribuir com o processo de formação docente a partir de reflexões sobre um MER, que considera as incompletudes do trabalho institucional relativo ao objeto matemático limite de função de uma variável real. Nosso aporte teórico se alicerça na Teoria Antropológica do Didático (TAD). No Modelo Epistemológico Dominante (MED), questionamos o que está posto; analisamos os livros didáticos do plano de ensino dos cursos de engenharia civil, elétrica e bacharelado e licenciatura em química da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), campus Pato Branco e os cadernos dos estudantes dos respectivos cursos. A constatação de uma incompletude institucional trouxe reflexões acerca da construção de um Modelo Epistemológico Alternativo (MEA), as quais apresentaremos neste trabalho.

Palavras-chave: *Limite, Teoria Antropológica do Didático, Modelo Epistemológico de Referência.*

Abstract

The research aims to contribute to the process of teacher formation from reflections on a MER, which considers the incompleteness of the institutional work relative to the mathematical object: limits of the function of a real variable. Our theoretical knowledge is based on the Didactic Anthropological Theory (TAD). In the Dominant Epistemological Model (MED), we question what is set; we analyzed the textbooks of the teaching plan of the civil engineering, electrical and baccalaureate courses and degree in chemistry of the Federal Technological University of Paraná (UTFPR), Pato Branco campus and the students' notebooks of the respective courses. The finding of an institutional incompleteness brought reflections about the construction of an Alternative Epistemological Model (MEA), which we will present in this work.

Keywords: *Limit, Anthropological Theory of Didactics, Epistemological Model of Reference.*

---

[1] Doutora em Engenharia Mecânica pela Escola de Engenharia da Universidade de São Paulo (EESC-USP), Departamento de Matemática da UTFPR, campus Pato Branco - teodora.pinheiro@gmail.com

[2] Doutor em Mathématiques et Applications pela Université de Rennes França: Professor do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP- saddoag@pucsp.br

Introdução

A partir de relatos de algumas pesquisas (NASCIMENTO (2003), ZUCHI (2005), JUTER (2006), MORU (2006), TRUNG (2007), LIRA (2008), CELESTINO (2008), ÇETIN (2009), SARVESTANI (2011), JOB (2011), SANTOS (2013), AMATANGELO (2013) , AYDOS (2015) , LECORRE (2016), SILVA (2017)), verifica-se que a maior dificuldade dos alunos é entender a formalização matemática do conceito de limite de uma função. Apoiando-se nestas pesquisas e, em seus resultados, considerou-se a possibilidade desta dificuldade estar relacionada à maneira como esse tema tem sido proposto ou abordado nas instituições de ensino. Sendo assim, pode-se dizer que estes resultados de pesquisa motivaram a escolha do conceito de limite de uma função como objeto de estudo desta investigação.

Primeiramente, decidiu-se evidenciar o problema didático referente a este objeto matemático e suas dimensões: epistemológica, econômica e ecológica. A articulação destas três dimensões, conduziu nosso olhar, no que se refere ao problema didático, para reflexões acerca da construção de um MEA.

No que segue, discutiremos nosso referencial teórico, mais especificamente o que entendemos por dimensões epistemológica, econômica e ecológica.

Teoria Antropológica do Didático (TAD)

Segundo Chevallard (1999, apud ALMOULOUD, 2007, p. 111), essa teoria estuda o homem perante o saber matemático, e mais especificamente, perante situações matemáticas. Um motivo para utilização do termo “antropológico” é que a TAD situa a atividade matemática e, em consequência, o estudo da matemática dentro do conjunto de atividades humanas e de instituições sociais. Nesta perspectiva, a TAD considera como elementos primitivos Instituições (I), Indivíduos (X) e Objeto (O). As Relações Pessoais R(X, O) e as Relações Institucionais RI(O) são noções básicas nesta teoria.

Segundo Almouloud (2007, p.114), “a Relação Institucional que se estabelece entre uma Instituição (I) e um Objeto (O) depende das posições que estes ocupam nessa Instituição e do conjunto de tarefas que essas pessoas devem cumprir usando determinadas técnicas”.

Chevallard (1999, apud ALMOULOUD, p.114-115) concebe uma Relação Institucional, quando um Objeto (O) existe para pelo menos uma Instituição (I); já a relação pessoal, quando um Objeto (O) existe para pelo menos uma pessoa (X). Podemos afirmar que há distintas relações de pessoas (professores / alunos) com o Objeto (limite) que fazem parte das diferentes Instituições (livro didático, caderno dos estudantes, por exemplo, usados nesta pesquisa). Assim, nesta pesquisa, focamos o nosso olhar nas Relações Institucionais envolvidas na Instituição analisada.

Uma parte da teorização da TAD consiste do desenvolvimento da noção de organização praxeológica que, de acordo com Almouloud (2007, p.114) acrescenta às noções acima descritas, as noções de tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria. Para ele, tais noções vão permitir modelizar as práticas sociais em geral e, em particular as atividades matemáticas. Os tipos de tarefas (T), a técnica (τ), a tecnologia (θ) e a teoria (Θ) são definidos segundo Chevallard.

Neste trabalho de pesquisa, a TAD é de fundamental importância para a análise das praxeologias matemáticas das atividades propostas nos livros didáticos e nos cadernos dos estudantes. Neste trabalho, também, faremos uma análise praxeológica didática dos livros didáticos.

Uma praxeologia didática surge na intenção de ensinar uma Organização Matemática (OM). Na TAD, analisa-se a Organização Didática (OD) por meio de seis momentos didáticos (CHEVALLARD, 1999): i) Primeiro momento de estudo: trata-se do primeiro contato com a organização envolvida por meio de seus tipos de tarefas T; ii) Segundo momento de estudo: onde ocorre a exploração do tipo de tarefa T e elaboração de uma técnica τ; iii) Terceiro momento de estudo: onde ocorre a construção, ainda que embrionária, do bloco tecnológico-teórico [θ/Θ] referente à T; iv) Quarto momento de estudo: em que ocorre o trabalho da técnica τ para melhorar sua eficiência, podendo-se também trabalhar a tecnologia θ; v) Quinto momento de estudo: em que ocorre a institucionalização da organização matemática elaborada, com o reconhecimento dos elementos que compõem definitivamente a organização matemática; vi) Sexto momento de estudo: trata-se da avaliação, em aproximação com o momento da institucionalização. Essa avaliação não deve ser centrada apenas nas pessoas, mas também nas tarefas, técnicas e tecnologias.

Modelo Epistemológico de Referência (MER) em um problema didático

O problema didático da modelação matemática no âmbito da Teoria Antropológica do Didático (TAD), segundo Gascón (2011b apud FARRAS, BOSCH e GASCÓN, 2013) pode ser descrito pelo seguinte esquema heurístico: $\{[(P_0 \otimes P_1) \boxed{\hookrightarrow} P_2] \boxed{\hookrightarrow} P_3 \} \boxed{\hookrightarrow} P_\delta$ sendo P_0 a formulação do problema inicial, denominado problema docente P_0 e o problema didático P_δ, que contém as três dimensões: dimensão epistemológica P_1; a dimensão econômica-Institucional P_2 e a dimensão ecológica P_3. O símbolo $\otimes$ refere-se a P_0 por ser incompleto, sendo necessário adicionar ao menos a dimensão epistemológica P_1 para ser considerado um problema.

O símbolo $\boxed{\hookrightarrow}$ não deve ser interpretado como uma inclusão. Esse indica que cada uma das dimensões P_i é logicamente anterior às dimensões P_{i+1} ou pelo menos P_i vem antes de P_{i+1} em um desenvolvimento hipotético do problema. Dizemos que para uma formulação completa de P_{i+1} requer certa formulação prévia, mesmo que implicitamente, de P_i.

Por fim, P_δ é denominado problema didático e definido como uma formulação, contendo as três dimensões fundamentais, as relações entre elas e, algumas questões novas que não aparecem em nenhuma das dimensões anteriores.

Em função de uma série de pesquisas realizadas sobre o ensino e a aprendizagem de limites enunciadas anteriormente, direcionamos o nosso trabalho acerca da seguinte questão de pesquisa: Quais as possíveis incompletudes do MED e, quais os tipos de reflexões se fazem necessárias acerca da construção de um MEA?

Para isso, é necessário questionar o MED nas instituições de ensino, sendo que neste trabalho investigaremos as relações institucionais acerca do objeto matemático limite, a partir de análises dos livros didáticos que constam na referência básica do plano de ensino de cursos de engenharia civil, engenharia elétrica e bacharelado e licenciatura em química da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus Pato Branco (UTFPR-PB) e, também análises dos cadernos de alunos dos respectivos cursos.

Relatamos a seguir uma pesquisa investigativa sobre as dimensões do problema didático acerca do objeto matemático limite e, algumas reflexões acerca do MER no âmbito do ensino do conceito de limites, de tal forma a responder a nossa questão de pesquisa.

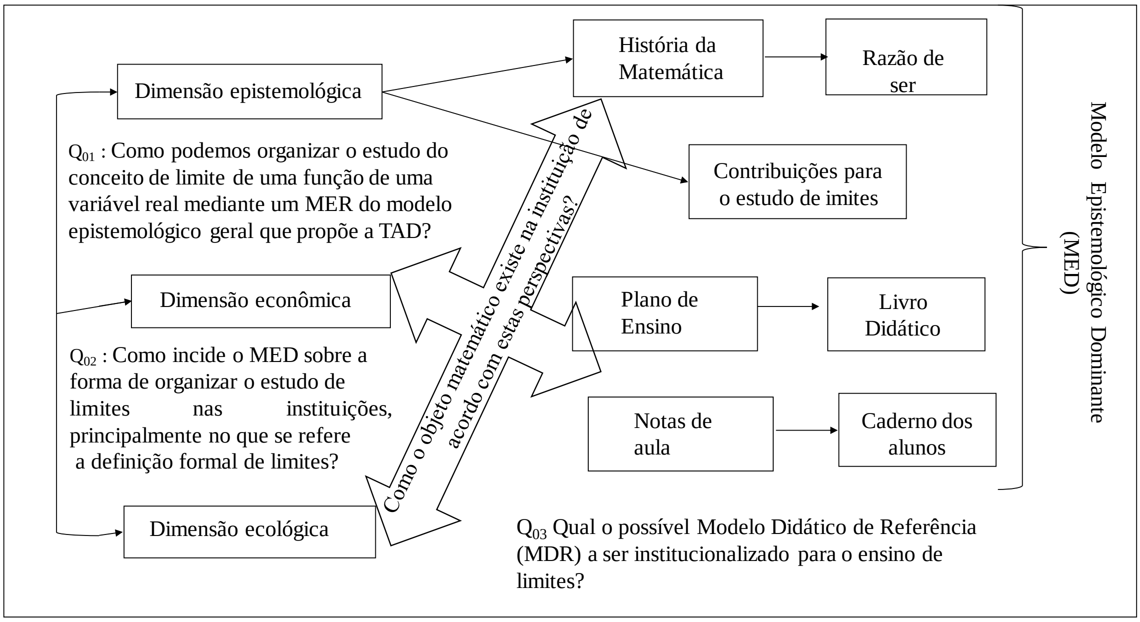
Dimensões do Problema Didático

Na Figura 1 apresentamos os recursos que utilizamos para o estudo e investigação de cada dimensão: na dimensão epistemológica realizamos um estudo do ponto de vista da História da Matemática, o que implica em através da história identificar a Razão de Ser do objeto matemático, também analisamos as Contribuições para o estudo de limites: a partir dos trabalhos de pesquisadores investigamos a razão de ser do objeto matemático nestes trabalhos.

Na dimensão econômica, tomamos como referência o Plano de Ensino dos cursos de engenharia e química da instituição analisada, por meio deste, analisamos os Livros Didáticos da Bibliografia Básica; também tomamos como referência os Cadernos de

Alunos, procurando identificar como o objeto matemático existe na instituição. Estas análises permitem explicitar o Modelo Epistemológico Dominante (MED). A dimensão ecológica é resultado de um olhar para todas as outras dimensões a fim de responder à questão central (Figura 1): Como o objeto matemático existe na instituição de acordo com estas perspectivas?

Figura 1. Esquema das dimensões do problema didático



Fonte: Construído pelos autores

Dimensão Epistemológica

Segundo Farras, Bosch e Gascón (2013), a dimensão epistemológica de um problema didático é considerada uma dimensão central, uma vez que impregna e condiciona fortemente as outras dimensões do problema didático.

Como já comentado anteriormente, segundo Farras, Bosch e Gascón (2013), no domínio da TAD, o problema de investigação surge de um problema inicial, que denominamos de problema docente P_0. No âmbito desta pesquisa, o problema docente é: o que temos que "ensinar" aos alunos sobre limite de uma função? Os pesquisadores compreendem que para transformar um problema docente em um problema de investigação em didática, no âmbito da TAD, é necessário questionar a forma de interpretar o MED, não somente nas instituições escolares, mas também na noosfera. Neste caso, com relação à dimensão epistemológica P_1, propomos a seguinte questão: Q_{01}: Como podemos organizar o estudo do conceito de limite de uma função de uma variável real mediante um MER do modelo epistemológico geral que propõe a TAD?

No processo de investigação acerca da dimensão epistemológica, investigamos aspectos referentes a História da Matemática e, Contribuições de pesquisas (Figura 1) no sentido de estabelecer a razão de ser deste objeto matemático e, conseguir responder à questão Q_{01}.

Limites x Fontes Históricas x Razão de Ser

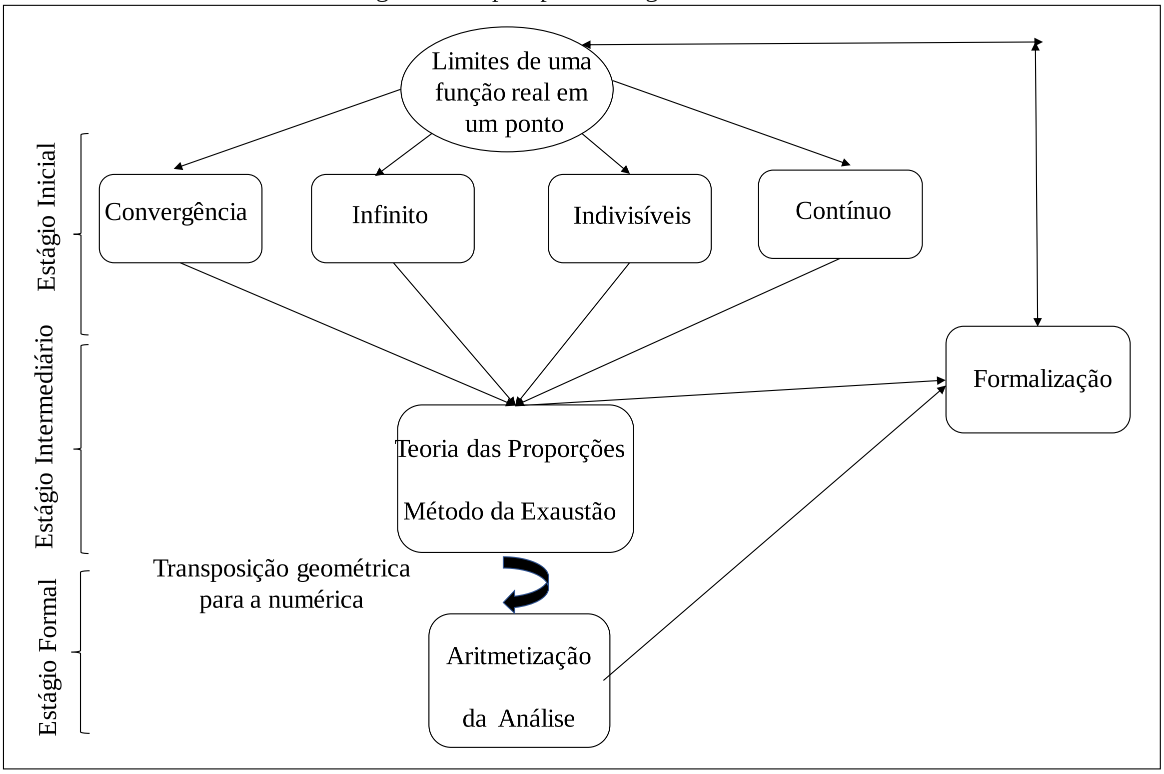
A partir do estudo e investigação em fontes históricas (BURNET, 1957; BICUDO, 1998; BARON, 1985; RADICE, 1981; GILES, 1979, STRUIK, 1997) que envolvem aspectos históricos e filosóficos relacionados ao surgimento do cálculo diferencial e integral e, em específico às primeiras ideias de limite, como, por exemplo, as primeiras noções de aproximação (*epsilon e delta*), infinito, infinitesimal e contínuo, conseguimos construir a primeira parte do mapa epistemológico (Figura 2).

O "estágio inicial" acontece no século V e, é caracterizado, neste trabalho, primeiramente, por um relato do pensamento matemático das primeiras civilizações: egípcia e babilônica, as questões filosóficas a respeito de conceitos como o movimento, o indivisível, os infinitesimais e as primeiras reflexões sobre o infinito, os quais provocaram evoluções no pensamento matemático da época que impactaram diretamente na definição formal atual de limite de função de uma variável real.

O estágio intermediário compreende do século V ao século XVII e, foi um período em que a visão era puramente geométrica. Problemas como o de calcular a medida da área de um círculo, por exemplo, foi um marco na época e, em razão deste problema, destacou-se a Teoria das Proporções e o Método de Exaustão de Eudoxo, (ROQUE, 2012, p.192-193). Pode-se dizer que a fase, denominada neste trabalho como intermediária, apresentou as duas maiores contribuições de Eudoxo: a Teoria das Proporções e o Método de Exaustão como avanços do ponto de vista geométrico à solução de problemas relacionados à área e volume.

O estágio formal, período entre os séculos XVIII e XIX, é caracterizado pelas contribuições de matemáticos, como Isaac Barrow (BOYER e MERZBACH, 2012, p. 270), Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz (BROLEZZI, 1996, p. 30), cada um com o seu estilo, um com vistas para o contínuo e o outro para o discreto e, Jean Le Rond D'Alembert, que defendeu o uso da teoria dos limites para fundamentar as bases do cálculo (BARON & BOS, 1985, v.3, p. 28).

Figura 2. Mapa Epistemológico



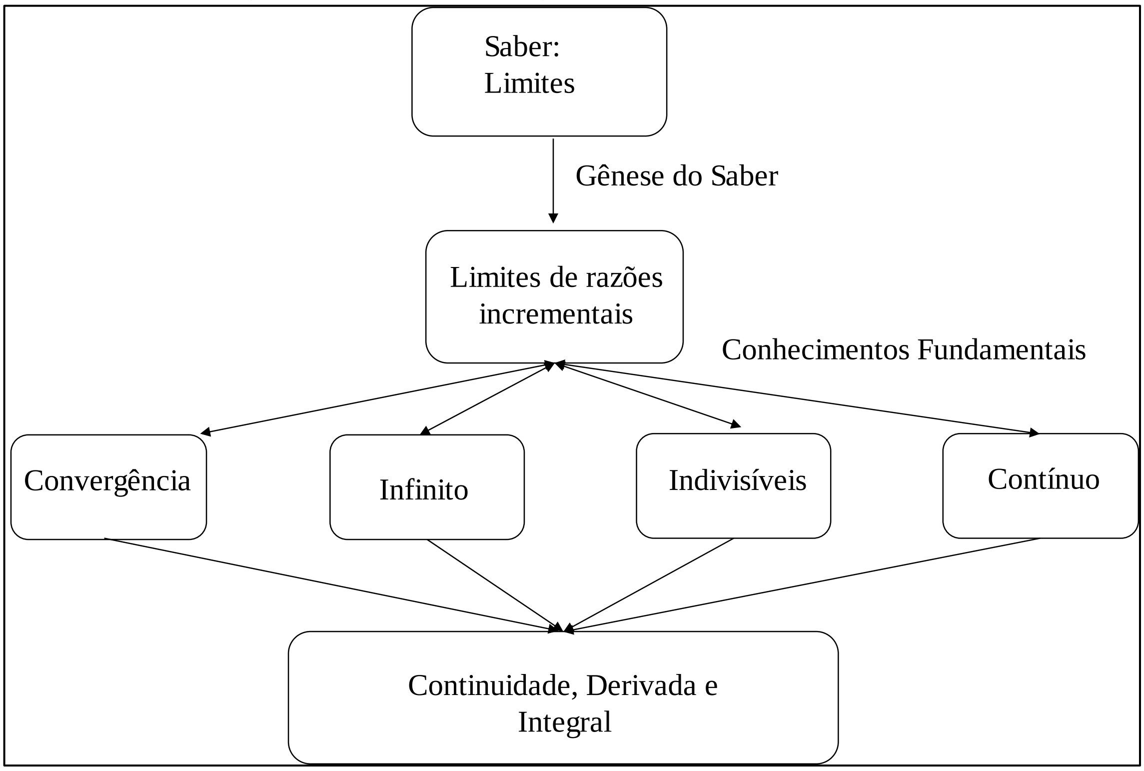
Fonte: Construído pelos autores

A construção, fundamentação e consolidação do cálculo diferencial e integral só seria possível com uma constituição rigorosa de número real, e isto só ocorre na segunda metade do século XIX, com as contribuições de Carl Friedrich Gauss, Georg Cantor, Augustin Louis Cauchy, Richard Dedekind e Karl Weirstrass (ZUCHI, 2005).

Então, com a noção de limite estabelecida por Cauchy, Weierstrass formaliza o cálculo utilizando a linguagem de épsilons e deltas. (BOYER, 1959, p. 287) que culminou na Aritmetização da Análise, a qual foi uma busca pela fundamentação do cálculo não mais de maneira geométrica, mas sim por meio de números.

As análises referentes a estes três momentos do desenvolvimento histórico de limite de uma função nos levaram a concluir que a gênese do saber está associada ao limite de razões incrementais e, que para a formalização do conceito de limite vários conhecimentos fundamentais tiveram de ser adquiridos. A Figura 3, apresenta o Modelo Epistemológico de Referência (MER) deste saber e, estes conhecimentos fundamentais.

Figura 3. Modelo Epistemológico de Referência (MER)



Fonte: Construído pelos autores

Contribuições para o estudo de limites

Neste processo de investigação acerca das contribuições para o estudo de limite, fez-se também um mapeamento das dificuldades encontradas no que se refere ao ensino e aprendizagem de limites procurando evidenciar principalmente aspectos que nos levam a entender a importância da razão de ser desse objeto matemático. Neste caso, selecionamos apenas algumas teses dentre o período de 2003 a 2017. As teses Nascimento (2003), Zuchi (2005), Juter (2006), Moru (2006), Trung (2007), Lira (2008), Celestino (2008), Çetin (2009), Sarvestani (2011), Job (2011), Santos (2013), Amatangelo (2013) , Aydos (2015) , Lecorre (2016), Silva (2017), relatam que a maior dificuldade dos alunos é entender a formalização matemática do conceito de limite de uma função devido a uma série de obstáculos de natureza epistemológica, psicológica associados as convicções prévias sobre a matemática e sobre o conteúdo de limites, dificuldades relativa a compreensão da relação entre δ e ε, a noção de infinito, abstração, matemática básica e a aplicação prática de limites, fatos já evidenciados nas pesquisas de Tall (1978), Cornu (1983 apud Trung, 2007) e Sierpinska (1985 apud TRUNG, 2007).

Designaremos por R_{01} a resposta à questão Q_{01}: Como podemos organizar o estudo do conceito de limite de uma função de uma variável real mediante um MER do modelo epistemológico geral que propõe a TAD?

R_{01}: Segundo Gascón, Bosch e Farras (2013), desde os primeiros trabalhos de Yves Chevallard sobre o ensino de álgebra (CHEVALLARD 1985, 1989a, 1989b, 1989c, apud GASCÓN, BOSCH e FARRAS, 2013), o enfoque antropológico situa a modelização matemática no centro da atividade matemática, assumindo que a modelização não é apenas um aspecto da matemática, mas que, em certo sentido, toda a atividade matemática pode ser interpretada como uma atividade de modelização.

Dessa forma, em nosso processo de pesquisa e investigação sobre o ensino e a aprendizagem do conceito de limite, constatou-se que todas as teses pesquisadas apresentavam como objeto de estudo a importância de os alunos compreenderem o conceito de limite de uma função. E, o processo de estudo e pesquisa referente à dimensão epistemológica deste saber, deixa explícito a razão de ser do ensino de limite. Logo, considerando um MER (Figura 3), compatível com a proposta da TAD, o estudo do conceito de limite deve envolver praxeologias matemáticas de acordo com a gênese deste saber, ou seja, envolvendo conceitos relativos à razão incremental, que levem à compreensão das noções fundamentais do conceito de limite: convergência, infinito, indivisíveis e contínuo. E, dessa forma, surgem uma série de questionamentos, por exemplo, como esse objeto matemático existe nas instituições, ou seja, quais são as praxeologias matemáticas dos livros didáticos e dos cadernos dos alunos, por exemplo? Sendo assim, faz-se necessário conhecer a dimensão econômica deste problema didático.

Dimensão Econômica

Para a análise da dimensão econômica do problema didático P_{δ}, procuraremos revelar o MED declarado pela instituição de referência (livros didáticos, cadernos dos estudantes), por intermédio de uma análise institucional. Analisou-se os livros que constam na Bibliografia Básica do Plano de Ensino dos cursos de engenharia civil, elétrica e licenciatura e bacharelado em química da UTFPR-PB e, os cadernos de alguns alunos desses respectivos cursos. Consideramos a seguinte questão de pesquisa: Q_{02}: Como incide o MED sobre a forma de organizar o estudo de limites nas instituições, principalmente no que se refere a definição formal de limites?

Livros Didáticos

O foco desta investigação é identificar através das OM e OD o grau de relevância da definição formal de limite na Instituição.

Quadro 1: Referências Básicas dos cursos

Livro	Autor	LD	Número de chamada Biblioteca (UTFPR-PB)	Cursos
Cálculo. vol. 1	Anton, H.; Bivens, I. e Davis, S	1	515 A634c 8. Ed.	Engenharia Elétrica (UTFPR-PB-EL, 2016)
Cálculo	Ávila, G.	2	515 A958ca 7. Ed.	
Cálculo	Stewart, J.	3	515 S849c 7. Ed.	
Cálculo	Stewart, J.	3	515 S849c 7. Ed.	Engenharia Civil (UTFPR-PB-CV, 2016)
Cálculo. vol. 1	Anton, H.; Bivens, I. e Davis, S.	1	515 A634c 8. Ed.	
Cálculo. vol. 1	Thomas, G. B.	4	515 T456c 10 Ed.	
Cálculo. vol.1	Anton, H.; Bivens, I. e Davis, S.	1	515 A634c 8. Ed.	Química (UTFPR-PB-QB, 2016)
Cálculo A	Fleming, D. M.; Gonçalves, M. B.	5	515 F599c 6. Ed.	
Cálculo vol 1	Thomas, G. B.	4	515 T456c 10 Ed.	

Fonte: Autores desta pesquisa

Análise Praxeológica da Organização Matemática dos Livros Didáticos

Na análise dos livros, verificou-se que Anton; Bivens; Davis (2007), Stewart (2013) e Thomas (2002) apresentam primeiramente noções intuitivas de limite de uma função. Anton; Bivens; Davis (2007), apresenta o problema de encontrar uma reta tangente a uma curva em um ponto e o problema da área; Stewart (2013) apresenta o problema da reta tangente e, o problema da velocidade instantânea; Thomas (2002) apresenta o problema da velocidade instantânea e o problema da reta tangente.

Anton; Bivens; Davis (2007), Stewart (2013) após a seção com as noções intuitivas, apresentam outras seções sobre limites laterais, limites infinitos, calculando limites, limites no infinito, para depois apresentarem uma seção em específico para discutir a "definição precisa" de limite.

Enquanto que Thomas (2002) apresenta logo em seguida das noções intuitivas, uma seção sobre a definição precisa de limite.

Neste caso, daremos ênfase as atividades matemáticas propostas na seção em específico sobre a "definição precisa de limite", pois o foco desta investigação é saber como se dá a relação R(O, X) e RI(O) (onde O é o objeto matemático limite de uma função, X os alunos e I a instituição investigada) do ponto de vista da definição formal de limite. Sendo assim, escolheu-se para análise praxeológica apenas uma tarefa de cada livro didático conforme apresentado nos quadros 2, 3, 4, 5 e 6.

Quadro 2: Organização Matemática do exercício 3 do LD 1

Tarefa	**Técnica**	**Bloco Tecnológico-Teórico**
Suponha que ε seja um número positivo qualquer. Encontre o maior valor de δ tal que $\|5x-10\| < \varepsilon$ se $0 < \| x-2\| < \delta$	Trabalhar com a desigualdade, resolução de uma inequação	a definição de Limite

Fonte: Anton; Bivens; Davis (2007, p.140)

Quadro 3: Organização Matemática do exercício 13 do LD 3

Tarefa	**Técnica**	**Bloco Tecnológico -Teórico**
Encontre um número δ tal que se $\|x-2\| < \delta$, então $\| 4x-8\| < \varepsilon$, onde $\varepsilon=0{,}01$	Trabalhar com a desigualdade, resolução de uma inequação	a definição de Limite

Fonte: Stewart. (2013, p.108)

Quadro 4: Organização Matemática do exercício 31 do LD 4

Tarefa	**Técnica**	**Bloco Tecnológico - Teórico**
Encontre um intervalo aberto em torno de x_0 no qual a desigualdade $\|f(x)-L\|<\varepsilon$ valha. Dê então um valor para $\delta >0$ tal que para todo x satisfazendo $0< \|x-x_0\| < \delta$ a desigualdade $\|f(x)-L\|<\varepsilon$ seja verdadeira. ($f(x)= x+1$; $L=5$; $x_0=4$; $\varepsilon=0{,}01$)	Trabalhar com a desigualdade resolução de uma inequação	a definição de Limite

Fonte: Thomas (2002, p. 95)

O autor Ávila (2003) apresenta a noção intuitiva de limite a partir do problema da reta tangente a uma curva, as seções limite e continuidade, limites infinitos e limites no infinito e, em nenhum momento apresenta a definição formal de limite.

Quadro 5: Organização Matemática do exercício 1 e 11 do LD 2

Tarefa	Técnica	Bloco Tecnológico -Teórico
Calcule os limites indicados: 1) $\lim_{x\to 2} x^2 - 3x + 1$ 11) $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$	1) Substituição de valores 2) racionalização	1) Conceito de limite de uma função polinomial. 2) Conceito de limite de uma função racional

Fonte: Ávila (2003)

O autor Fleming; Gonçalves (2006) apresenta a noção intuitiva de limite a partir de considerações no conjunto dos números reais, introduzindo a noção de tender para o infinito e, o conceito de limite para os diversos casos de limite de uma função. Em seguida apresenta uma seção com a definição formal de limite, intitulada "Definição".

Quadro 6: Organização Matemática do exercício 11 do LD 5

Tarefa	Técnica	Bloco Tecnológico - Teórico
Dado $\lim_{x\to a} f(x) = L$. Determinar um número δ para o ε dado tal que $\|f(x)-L\|<\varepsilon$ sempre que $0< \|x-a\| < \delta$. Dar exemplos de dois outros números positivos para δ, que também satisfazem a implicação dada: $\lim_{x\to 2} 2x + 4 = 8$ ε = 0,01	Trabalhar com a desigualdade, resolução de uma inequação	Conceito da definição de Limite

Fonte: Fleming; Gonçalves (2006)

Análise Praxeológica da Organização Didática do livro Analisado

Analisou-se a OD do livro LD 1, pois os LD 1, LD 3, LD 4 e LD 5 são livros com muitas características em comum, inclusive o fato de apresentarem a definição formal de Limites no mesmo formato, enquanto que o LD 2 possui uma abordagem extremamente diferente dos demais. O autor desse livro não leva em consideração a definição formal, foco de investigação deste trabalho e, os tipos de tarefa são de cálculo direto de limites. Induzimos deste fato que a análise do livro LD 1 contribuirá de forma significativa a evidenciar as tarefas e técnicas relacionadas, assim como as tecnologias que as justificam.

Cálculo 1 (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2007)

O autor estabelece que desenvolverá o conceito de limite em etapas, partindo de uma noção informal e intuitiva para uma definição matemática precisa. Nesta perspectiva, o primeiro MD é caracterizado por uma abordagem intuitiva da noção de Limites a partir de um problema acionando o conceito de reta tangente a uma curva em um ponto e, o problema da medida da área de uma superfície plana. Os tipos de tarefa T característicos do primeiro MD são: i) Dada uma função f e um ponto $P(x_0, y_o)$ em seu gráfico, encontre a equação da reta que é tangente ao gráfico em P. ii) Dada uma função f, encontre a medida da área da região situada entre o gráfico da função f e um intervalo [a, b] no eixo x.

No segundo MD, os autores Anton; Bivens; Davis (2007, p.104) introduzem o conceito de limite da seguinte forma: " O uso mais básico de limites é descrever como uma função se comporta quando a variável independente tende a um dado valor" e, dessa forma percebe-se que introduzem uma técnica τ de cálculo de limites a partir de um processo de aproximação exemplificado a partir de uma tabela de valores (x, f(x)).

O terceiro MD é caracterizado por uma introdução, mesmo que considerada informal do conceito de limite:

> Se os valores de f(x) puderem ser tornados tão próximos quanto queiramos de L, desde que tomemos os valores de x suficientemente próximos de a (mas, não iguais a a), então escreveremos: $\lim_{x \to a} f(x) = L$ (*) que deve ser lido como "o limite de f(x) quando x tende a a é L", ou "f(x) tende a L quando x tende a a". A expressão (*) também pode ser escrita como: $f(x) \to L$ quando $x \to a$. (Anton; Bivens; Davis, 2007, p.104)

de forma a constituir o bloco tecnológico/ teórico [θ/Θ] que justifica a técnica τ utilizada no segundo MD.

O quarto MD é caracterizado por uma seção em específico, a qual os autores Anton; Bivens; Davis (2007, p.113) denominam de "Calculando Limites", onde são propostas diferentes tarefas T associadas à técnica τ proposta no segundo MD e, diferentes abordagens desta técnica enunciadas a partir de teoremas específicos para cada tipo de função. No quarto MD percebe-se uma desconexão entre a ideia informal do conceito de limite do segundo MD e, a técnica utilizada segundo o conceito, para um Cálculo de Limites completamente dissociado ao conceito intuitivo, por exemplo, enunciado no primeiro MD.

No quinto MD, os autores Anton; Bivens; Davis (2007, p.134) introduzem uma seção denominada: "Limites (discutidos mais rigorosamente)". Percebe-se que o objetivo do autor é fazer a institucionalização, definir a organização matemática, introduzir a definição formal a partir dos épsilons e deltas. Mas, neste caso, surge uma questão: Será que da forma como o estudo foi organizado, a partir das praxeologias propostas, o aluno se encontrará preparado para este MD? A institucionalização ocorrerá de fato, uma vez que, diante de resultados de pesquisa científica, a definição com épsilons e deltas é considerada extremamente abstrata para os alunos? O salto entre o segundo MD, o quarto MD e o quinto MD é um fator a se levar em consideração e motivo de reflexão sobre essa desconexão do ponto de vista matemático e, acerca da relação R(X, O), ou seja, de como o estudante se relaciona com o objeto matemático diante da organização desta transposição didática apresentada no livro didático.

O sexto MD, neste trabalho, refere-se a uma avaliação das organizações matemática e didática segundo um conjunto de critérios definidos por Chevallard (1999, apud ALMOULOUD, 2007, p.126), os quais serão explicitados a seguir.

Segundo o critério de identificação, verifica-se que os tipos de tarefa são apresentados sem estabelecer conexões entre o conceito intuitivo de limite, o cálculo de limites e a definição formal. Asseveramos que essa falta de articulação pode ser fonte de dificuldade à aprendizagem do aluno e, a relação aluno – objeto matemático R (X, O) pode ser aquém do que é esperado em termos de aprendizado do conceito de limite. E, dessa forma, também fica comprometida a razão de ser do tipo de tarefa referente a definição formal, uma vez que todos os tipos de tarefa referentes ao cálculo de limites não levam em consideração a definição formal, o que também compromete o critério de pertinência das tarefas propostas pelos autores desse livro.

Nossa avaliação, das técnicas promovidas no cumprimento das tarefas, evidencia que a princípio uma técnica, utilizando o conceito de aproximação e, depois as técnicas são dadas na forma de teoremas. Acredita-se que seria necessário apenas um link entre essas duas seções: a noção de aproximação e o cálculo de limites.

Em relação ao bloco tecnológico/teórico, o mesmo é justificado usando o conceito intuitivo e, depois justificado na forma de teoremas, não demonstrados. Sugere-se que o aluno aceite o resultado do teorema sem demonstrá-lo.

Caderno dos Alunos

Optamos por integrar na pesquisa a análise dos cadernos de alunos, no que se refere à introdução ao tópico limite de função de uma variável real, a definição formal e aos tipos de exercícios. Consideramos que este tipo de análise pode auxiliar-nos na compreensão de como se estabelece a institucionalização do saber limite de função de uma variável real, e oferecer dados que dão indícios do “saber aprendido”.

Para o estudo, selecionamos cadernos de três alunos (A, B e C) de maneira aleatória, de tal forma que são notas de aulas de três professores diferentes (A, B e C).

No caderno do aluno A o objeto matemático limite é introduzido do ponto de vista do estudo do comportamento da função f quando x se aproxima de um determinado valor. Em seguida é estabelecida a notação de limite de uma função f quando x tende a “a”.

Encontram-se, depois, vários tipos de tarefas, as quais se referem ao cálculo direto de limite de uma função (Figura 4).

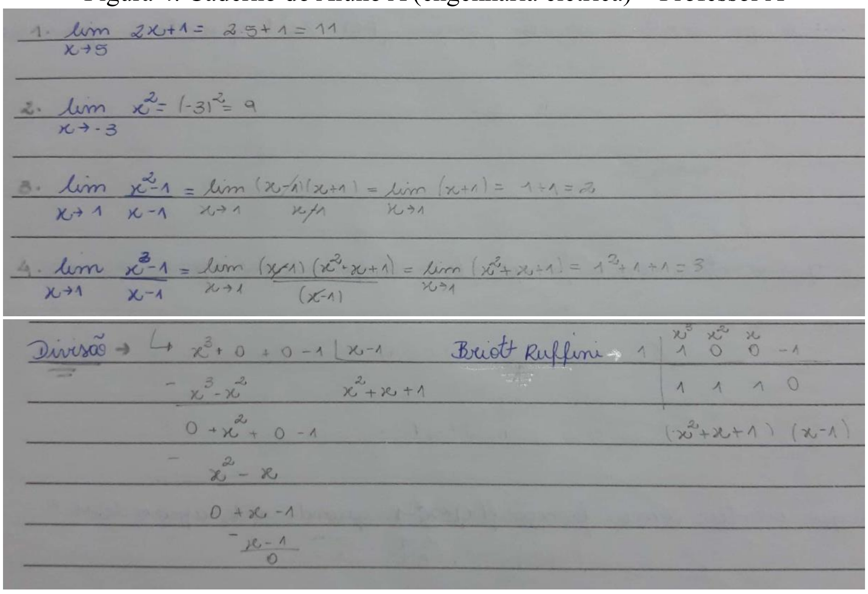
Tipo de Tarefa 1: exercícios 1 e 2, Figura 4.

Técnica: substituir o valor de “a” no lugar do x na função, da qual se quer saber o limite quando x tende a “a” (a=5; a=-3)

Tecnologia: a técnica acima utilizada exige o conhecimento do seguinte Teorema:

Para qualquer polinômio $p(x)= c_0 + c_1 x + ... + c_n x^n$ e qualquer número real a, então $\lim_{x\to a} p(x) = c_0 + c_1 a + \cdots + c_n a^n = p(a)$.

Figura 4. Caderno do Aluno A (engenharia elétrica) – Professor A



Fonte: Caderno do Aluno A

Tipo de Tarefa 2: exercícios 3 e 4, Figura 4.

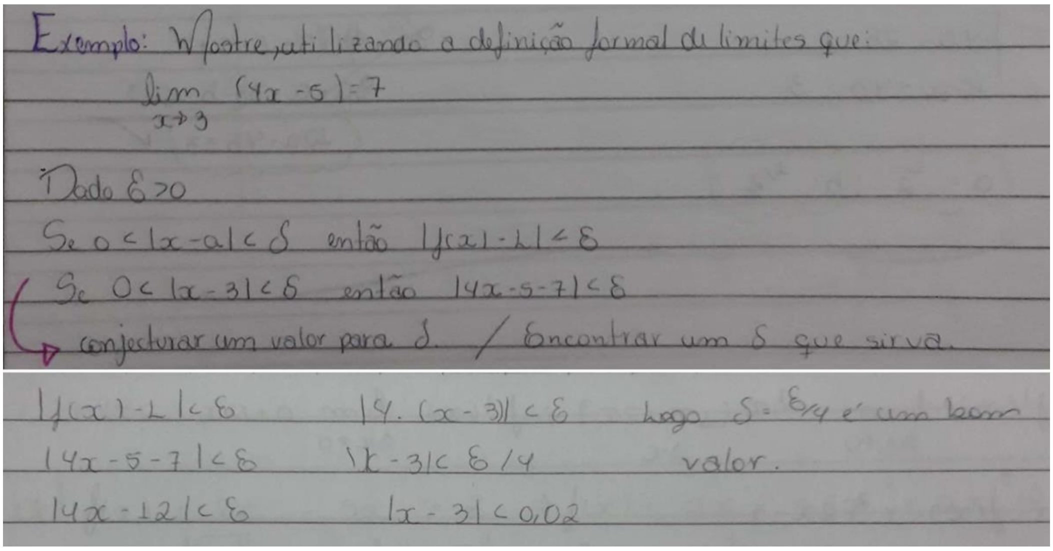
Técnica: fatoração e/ou uso de Briot-Ruffini quando ao substituir o valor de “a” (a=1) no lugar de x, aparece uma divisão por zero.

Tecnologia: a técnica Brio-Ruffini permite uma simplificação da função racional, uma vez que a função referente ao denominador tem limite igual a zero no ponto a, permitindo a utilização do seguinte Teorema:

Teorema: Suponhamos que duas funções **f** e **g** tenham limites em um ponto a, se $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$, então a função $\frac{f}{g}$ tem limite em a e, $\lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$

No caderno do Aluno B a introdução à limite de uma função é dado da mesma forma que no caderno do Aluno A. O professor introduz a definição formal de Limite e, em seguida apresenta um exemplo (Figura 5) com o seguinte tipo de tarefa: Mostre utilizando a definição formal de limite que $\lim_{x \to 3} 4x - 5 = 7$.

Figura 5. Caderno do Aluno B (engenharia civil) – Professor B



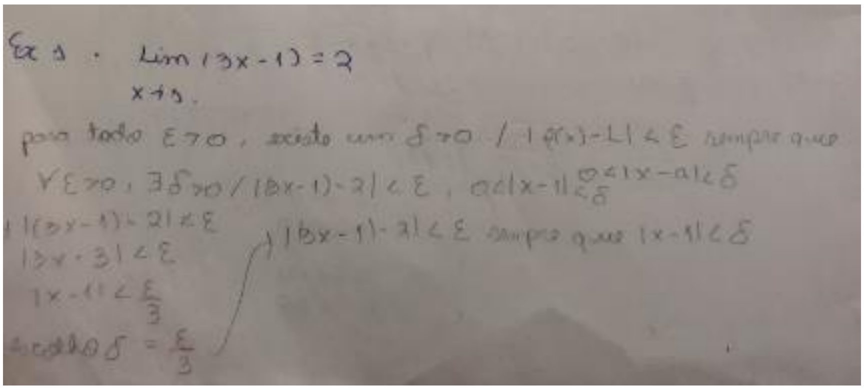
Fonte: Caderno do Aluno B

Para este tipo de tarefa, verifica-se na resolução do aluno (Figura 5) - o que pode ter sido resolvido pelo professor como um exemplo da definição - que a técnica aplicada se refere ao conceito de limite do ponto de vista formal, o qual envolve operações com desigualdades que quantificam o quanto x se aproxima de "*a*" implica em o quanto f(x) se aproxima de um determinado valor L.

Tecnologia: definição: Seja f uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número a, exceto possivelmente no próprio a. Então dizemos que o limite de f(x), quando x tende a a é L e, escrevemos: $\lim_{x \to a} f(x) = L$, se para todo número ε > 0, houver um número δ > 0 tal que se $0 < |x - a| < \delta \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon$

No caderno do Aluno C, a introdução à limite de uma função é dada da mesma forma que os cadernos dos alunos A e B. O caderno do Aluno C apresenta apenas um exemplo em que a tarefa é que o aluno mostre que: $\lim_{x \to 1} 3x - 1 = 2$, Figura 6.

Figura 6. Caderno do Aluno C (Química)– Professor C



Fonte: Caderno do Aluno C

A técnica aplicada envolve o conceito de limite do ponto de vista formal, o qual envolve operações com desigualdades que quantificam o quanto x se aproxima de “a” implica em o quanto f(x) se aproxima de um determinado valor L.

Tecnologia: definição: Seja f uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número a, exceto possivelmente no próprio a. Então dizemos que o limite de f(x), quando x tende a a, é L e, escrevemos: $\lim_{x \to a} f(x) = L$, se para todo número ε > 0, houver um número δ > 0 tal que se $0 < |x - a| < \delta \; então \; |f(x) - L| < \varepsilon$

Retornando a nossa questão de pesquisa referente à dimensão econômica, questão Q_{02}: Como incide o MED sobre a forma de organizar o estudo de limite nas instituições, principalmente no que se refere à definição formal de limite?

A partir das análises institucionais do MED, constatamos que as OM ensinadas e/ou aprendidas na universidade analisada são pontuais, pouco articuladas entre si, inclusive no que diz respeito às técnicas utilizadas. Pode-se dizer que esses fatores levam à incompletude das organizações matemáticas. Na análise dos cadernos dos alunos, percebe-se que existe uma desconexão entre a noção intuitiva de limites e a definição formal, a qual nem sempre é apresentada aos alunos. O objeto matemático (limite) existe na instituição analisada, mas com incompletudes nas relações R(O, X) e RI(O).

Dimensão Ecológica

Segundo Gascón (2011), a questão principal da dimensão ecológica é: Por que as coisas (OM e OD) são como são na Instituição e, que condições são requeridas para fazerem de outra forma, dentro do que é possível? Sendo que a nossa questão de pesquisa é: Q_{03}: Qual o possível Modelo Didático de Referência (MDR) a ser institucionalizado para o ensino de limites?

A partir das análises realizadas na dimensão econômica, percebe-se que deve existir uma certa dificuldade do professor em estabelecer uma conexão entre o domínio intuitivo-formal. Esta observação contribui para a resposta da pergunta: Por que as coisas são como são? Principalmente no que diz respeito à constatação desta lacuna na transposição didática.

Para responder a outra pergunta: Que condições são requeridas para fazerem de outra forma? Faz-se necessário refletir sobre as seguintes questões: o que eu posso fazer para ensinar uma tarefa matemática? Como dirigir o estudo de tal tarefa na aula?

A incompletude observada, pode estar associada a diversos fenômenos, entre eles, a desarticulação do objeto matemático (limite) motivada pela epistemologia dominante nas instituições (CHEVALLARD, 1991). Em relação à dificuldade em estabelecer um link entre o conceito intuitivo e formal, percebe-se que os professores não têm um apoio na instituição formadora e/ou não encontram no saber a ensinar referências para que eles possam alicerçar e construir suas práticas. Neste caso, instaura-se um fenômeno que passa despercebido na prática docente, denominado por Farias (2010) de vazio didático, o qual influenciará diretamente na prática do professor. Outro fenômeno, é a dissociação entre o trabalho da técnica e o tecnológico-teórico, uma vez que, Bosch, Fonseca e Gascón (2004) entendem que as atividades institucionais somente se completam quando se integra o trabalho da técnica com o tecnológico-teórico.

A constatação de uma incompletude no sistema de ensino suscita a necessidade de reflexões sobre um Modelo Epistemológico Alternativo (MEA) para apoiar a proposta de um MDR.

Reflexões acerca de um Modelo Epistemológico Alternativo (MEA) para o objeto matemático limite

Diante do MED investigado, propomos aqui algumas reflexões na forma de questões:

i. Acredita-se que a definição “mais precisa” a que se referem alguns autores de livros didáticos, Anton; Bivens; Davis (2007), Stewart, J. (2013) e Thomas (2002) e, que faz parte das notas de aula dos professores B e C deve ser acessível e, de pertencimento aos alunos. Mas, será que isso acontece?

ii. Como fazer um link entre a definição formal e o cálculo de limites? Inferimos que para desenvolver este link, o professor precisa de um suporte no sentido do planejamento do tipo de tarefa que contribua para isso, uma vez que o próprio livro didático não apresenta. Algumas pesquisas têm relatado este fato em relação ao livro didático, como por exemplo, Bokhari; Yushau (2006), os quais relatam que o livro didático tem dado pouca atenção aos aspectos fundamentais, ou seja, a relação entre ε e δ na definição formal de limite de uma função e, os professores tratam este tópico apressadamente. Logo, entende-se que esta questão é um objeto de pesquisa e investigação para o desenvolvimento de tipos de tarefas adequados, ou seja, que contribuam para a compreensão da relação entre ε e δ na definição formal de limite de uma função e, assim estabeleçam um link entre a definição formal e o cálculo de limites.

iii. Outra reflexão é a respeito da organização didática: Será que é válido trabalhar com praxeologias em um meio como as aulas do Círculo da Matemática (INSTITUTO TIM, 2013), por exemplo, em que é proposto um problema, o qual pode ser: Como estabelecer um link entre a ideia intuitiva e a definição formal de limite (uma vez apresentada aos alunos a definição formal)? E, a partir desta questão, com a ideia de pessoas ao redor de um círculo, que irão refletir, usar a imaginação, em uma dialética de ação característica da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1986, apud ALMOULOUD, 2007, p.31), o problema poderá ser discutido entre o professor e os alunos, supondo conjecturas, de acordo com as dialéticas de formulação, validação e institucionalização do saber pelo professor.

iv. Mas, do item iii) surge uma questão: Como trabalhar neste formato de aula do Círculo da Matemática em uma turma de 40 alunos e, cumprir todo o cronograma do plano de ensino, por exemplo? Será que é válido nos últimos minutos de aula abrir uma discussão entre os alunos sobre a questão do item iii: Como estabelecer um link entre a ideia intuitiva e a definição formal de limite (uma vez apresentada aos alunos a definição formal)? Acredita-se que esta pausa para a discussão provocaria uma situação de ação, que envolveria o uso da imaginação dos alunos sobre a questão e, o compartilhamento destas ideias, resultados de sua imaginação, é fundamental para a sua aprendizagem. Vygotsky mostra que o processo de imaginar é fundamental na formação dos conceitos, no desenvolvimento humano.

> [A imaginação] transforma-se em meio de ampliação da experiência de um indivíduo porque, tendo por base a narração ou a descrição de outrem, ele pode imaginar o que não viu, o que não vivenciou diretamente em sua experiência pessoal. A pessoa não se restringe ao círculo e a limites estreitos de sua própria experiência, mas pode aventurar-se para além deles, assimilando, com a ajuda da imaginação, a experiência histórica ou social alheia (VIGOSTKY, 2009, p. 25)

As aulas do Círculo da Matemática (INSTITUTO TIM, 2013) tem como base fundamental trabalhar com uma questão matemática e, permitir que os alunos usem a sua imaginação, compartilhem as ideias gerando um ambiente de empatia.

As questões propostas para a reflexão sobre o MEA para limite de uma função fundamentam-se em uma frase do livro "The Art of Infinite: The Pleasures of Mathematics, de Robert e Ellen Kaplan:

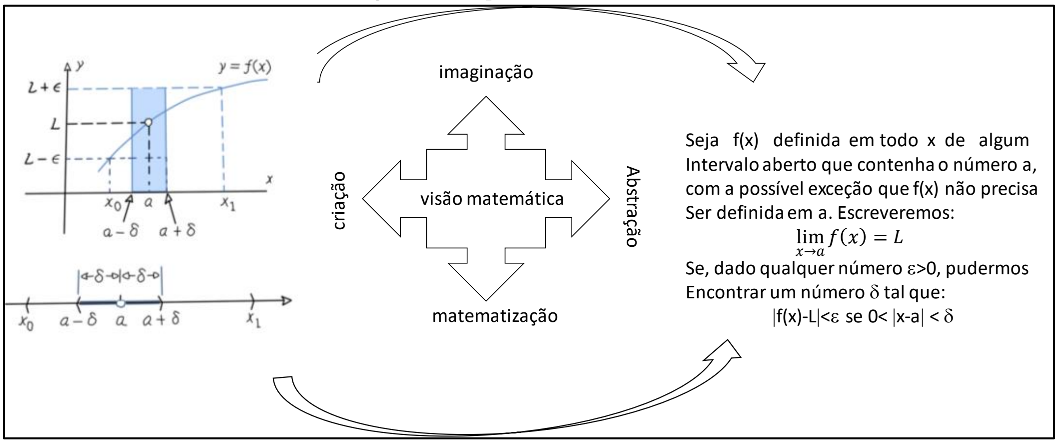
> ......but we come up against in school are boredom and fear, wedged between iron rules memorized without reason. Why hasn't mathematics the gentle touches a novelist uses to lure the reader into his imagination? (KAPLAN; KAPLAN, 2003, p.1)

Segundo Boaler (2018, p.26):

> Numerosas pesquisas (SILVER, 1994) demonstram que, quando os alunos têm a oportunidades para propor problemas matemáticos, considerar uma situação e pensar em uma pergunta matemática a ser feita sobre ela – que é a essência da matemática real -, eles se envolvem com mais profundidade e alcançam melhores resultados. Nas salas de aula, [...] eles passam seu tempo respondendo a perguntas sem vida, perguntas que eles não fizeram.

Estas informações reforçam a necessidade de uma praxeologia nos moldes da Atividade baseada no Processo de Criação do Aluno (APCA), Figura 7.

Figura 7. Esquema sobre APCA



Fonte: Construído pelos autores

APCA tem como característica principal o protagonismo do aluno, valoriza a sua criatividade, a partir da sua imaginação em um processo de abstração rumo a matematização, de forma a estabelecer um link entre o domínio intuitivo e formal.

Segundo Figueroa; Almouloud (2016), APCA é um tipo de atividade que envolve uma situação adidática, o problema é criado e/ou inventado pelo aluno. Este tipo de atividade proporciona interações entre o aluno, o saber e o meio, levando à mobilização dos saberes adquiridos através das dialéticas da ação, formulação, validação e institucionalização. E, a análise a partir da TAD, em particular das praxeologias matemáticas, implica no aluno ter que construir estratégias para o problema inventado e, mobilizar saberes matemáticos para justificar a sua técnica a partir da tecnologia e a tecnologia a partir da teoria.

Mas, são apenas reflexões sobre a construção de um MEA, ainda estamos em um processo de estudo e investigação para a construção de praxeologias matemáticas, por intermédio de um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP).

Considerações Finais

Nos livros didáticos, identificamos tarefas pontuais e locais. Entretanto, o estudo das organizações matemáticas se concentra principalmente no bloco do saber fazer (práxis), enquanto que no bloco tecnológico-teórico (logos) comprovamos escassa justificativa da técnica. Também verificamos uma ampla quantidade de tarefas com ênfase no cálculo de limites, além da falta de atividades que contemplem a definição formal de limite.

Nos cadernos dos estudantes, identificamos apenas um exemplo de tipo de tarefa sobre a definição formal de limite, o qual dá a impressão de ter sido resolvido pelo professor. Dessa forma, parece não ter existido momentos de discussão sobre as dificuldades evidenciadas nas pesquisas: dificuldades em entender a definição do ponto de vista do épsilon e delta.

A partir dos principais resultados desta pesquisa, foi verificado que o MED apresentou restrições no âmbito do saber limite de uma função quanto à concepção do conceito de limite na instituição analisada. Podemos afirmar que esta constatação não se confirmaria, caso não considerássemos o problema didático na esfera da dimensão econômica (FARRAS; BOSCH; GASCÓN, 2013).

Com este estudo, foi constatada a existência de incompletudes nas relações institucionais, o que admitiu a necessidade de reflexões acerca da construção de um MEA, o qual diante dessas incompletudes, em termos econômicos traz uma nova perspectiva da relação R(X, O) , fundamentada a partir da construção de um MER.

As reflexões foram apresentadas e, a partir destas espera-se contribuir para o processo de formação docente no que diz respeito a construção de praxeologias matemáticas pertinentes ao problema didático investigado.

Referências

ALMOULOUD, S. A. Fundamentos da Didática da Matemática. Curitiba. PR: Editora UFPR, 2007.

AMANTANGELO, M. L. Student Understanding of Limit and Continuity at a Point: A Look into Four Potentially Problematic Conceptions. Thesis - Department of Mathematics Education, Brigham Young University, Utah (EUA), 2013.

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. Cálculo. Porto Alegre, RS: Bookman, 2007.

ARAUJO, A. J. O Ensino de Álgebra no Brasil e na França: Um Estudo Sobre o Ensino de Equações do 1°. Grau à Luz da Teoria Antropológica do Didático. Tëse (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica). UFPE, 2009.

ÁVILA, G. Cálculo. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2003

AYDOS, M. The Impact of Teaching Mathematics with GeoGebra on the Conceptual Understanding of Limits and Continuity: The Case of Turkish Gifted and Talented Students. Thesis – The program of curriculum and instruction, İhsan Doğramacı Bilkent University, Ankara (Turquia), 2015.

BARON, M. E; BOS, H. J. M. Curso de história da matemática: origens e desenvolvimento do cálculo. vol 1-5. Brasília: Editora Universidade de Brasília,1985.

BICUDO, I. Platão e a Matemática. LETRAS CLÁSSICAS, n. 2, p. 301-315, 1988.

BOALER, J. (2018). Mentalidades Matemáticas: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. Instituto Sidarta. Porto Alegre: Penso.

BOKHARI, M. A.; YUSHAU, B. Local (L, ε) - approximation of a function of single variable: an alternative way to define limit. International Journal of Mathematical Education in Science & Technology, 37(5), p.515-526, 2006.

BOSCH, M.; FONSECA, C.; GASCÓN, J. Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. Recherches en didactique des mathématiques, v. 24, p. 1-200, 2004.

BOYER, C. B. The history of the calculus and its conceptual development. New York: Dover, 1959.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U.C. História da matemática. 3. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2012.

BROLEZZI, A. C. A Tensão entre o Discreto e o Contínuo na História da Matemática e no Ensino de Matemática. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação. Universidade de São Paulo, 1996.

BURNET, J. Early Greek Philosophy. New York: Meridian Books, 1957.

CELESTINO, M.R. (2008). Concepções sobre limite: imbricações entre obstáculos manifestos por alunos do Ensino Superior. Tese de Doutorado - Programa de Matemática, da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC-SP, São Paulo.

ÇETIN, I. Students’ understanding of limit concept: an APOS perspective. Thesis – The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Middle East Technical University, Turquia, 2009.

CHEVALLARD, Y. La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné, Grenoble, La Pensée Sauvage (2e édition revue et augmentée, en coll. Avec Marie-Alberte Joshua, 1re édition 1985), 1991.

CHEVALLARD, Y. L’analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble : La Pensée Sauvage-Editions, v.19. n.2, p.221-265, 1999.

FARIAS, L. M. S. Étude des interrelations entre les domaines numérique, algébrique et géométrique dans l'enseignement des mathématiques ausecondaire: Une analyse des pratiques enseignantes en classes de troisième et de seconde. Thèse (Doctorat en Didactique des mathématiques) – Université de Montpellier 2, France, 2010.

FARRAS, B.B.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. Las tres dimensiones del problema didáctico. Educação Matemática e Pesquisa, São Paulo, v.15, p.1-28, 2013.

FIGUEROA, T.P.; ALMOULOUD, S. A. Pesquisa sobre a viabilidade da proposta de uma atividade baseada em um processo de criação do aluno (APCA). In: I Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática, Bonito (MS), 2016. Disponível em: http://ladima.tuseon.com.br/. Acesso em: 11/09/2018

FLEMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. Cálculo A: funções, limite, derivação e integração. São Paulo, SP: Pearson Prentice Hall, 2006

GILES, T. R. Introdução à Filosofia. São Paulo: EPU: Editora da Universidade de São Paulo, 1979.

INSTITUTO TIM. O Círculo da Matemática do Brasil. 2013. Disponível em: http://www.ocirculodamatematica.com.br/. Acesso: 25/08/2018.

JOB, P. Étude du rapport à la notion de définition comme obstacle à l'acquisition du caractère lakatosien de la notion de limite par la méthodologie des situations fondamentales/adidactiques. Thesis - Faculté des Sciences Didactique des sciences mathématiques, Université de Liège, Bélgica, 2011.

JUTER, K. Limits of Functions- University Students’ Concept Development. Tese (Doutorado) – Department of Mathematics, Luleå University of Technology, Luleå (Suécia), 2006.

KAPLAN, R., KAPLAN, E. The art of infinite: the pleasures of mathematics. Bloomsbury Press, New York, 2003.

LECORRE, T. Des conditions de conception d’une ingénierie relative à la définition de la notion de limite. Thèse - Mathématiques, sciences et technologies de l’in- formation, informatique, Université Grenoble Alpes, Grenoble, 2016.

LIRA, A.F. O processo da construção do conceito matemático de limite pelo aprendiz com a utilização de objetos digitais. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, UFRGS, Porto Alegre, 2008.

MORU, E.K. Epistemological Obstacles in Coming to Understand the Limit Concept at Undergraduate Level: A Case of the National University of Lesotho. Thesis - School of Science and Mathematics Education in the Faculty of Education, University of the Western Cape, Cape (África do Sul), 2006.

NASCIMENTO, J.C. O conceito de limite em cálculo: obstáculos e dificuldades de aprendizagem no contexto do ensino superior de matemática. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Psicologia, UFPE, Recife, 2003.

RADICE, L. L. O Infinito: De Pitagóras a Cantor itinerários filosóficos e matemáticos de um conceito de base. Lisboa: Editorial Notícias-Biblioteca de Conhecimentos Básicos, 1981.

ROQUE, T. História da Matemática – Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.

SANTOS, M.B.S. Um olhar para o conceito de limite: constituição, apresentação e percepção de professores a alunos sobre o ensino e aprendizado. Tese (Doutorado) - Programa Matemática, da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC-SP, São Paulo, 2013.

SARVESTANI, A.K. Contemplating problems taken from the history of limits as a way to improve students' understanding of the limit concept. Thesis - Universiteit van Amsterdam, Amsterdam, 2011.

SILVA, A.J. Noção de limite de funções reais e geogebra: um estudo em epistemologia genética. Tese (Doutorado) – Programa de Pós- Graduação em Informática na Educação do Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação, UFRGS, Porto Alegre, 2017.

STEWART, J. Cálculo. São Paulo, SP: Cengage Learning, 2013.

STRUIK, D. História concisa das Matemáticas. (3ª edição). Lisboa: Gradiva, 1997.

TALL, D. O.; SCHWARZENBERGER, R.L.E. Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits. Mathematics Teaching, 82, p. 44-49, 1978.

THOMAS, G.B. Cálculo. São Paulo. Editora Pearson. v.1, 2002.

TRUNG, L.T.B.T. Étude didactique des relations entre notion de limite et decimalisation des nombres réels dans un environnement « calculatrice » une étude de cas dans l'enseignement mathématique secondaire au Viêt-Nam. Tese (Doutorado em Didática da Matemática). Université Joseph Fourier, Grenoble, 2007.

UTFPR-PB-EL. Plano de Ensino – Engenharia Elétrica, 2016. Disponível em: http://www.utfpr.edu.br/patobranco/estrutura-universitaria/diretorias/dirgrad/cursos/coelt/grade-e-corpo-docente/grade-e-corpo-docente. Acesso: 21/08/2018

UTFPR-PB-CV. Plano de Ensino – Engenharia Civil, 2016. Disponível em: http://www.utfpr.edu.br/patobranco/estrutura-universitaria/diretorias/dirgrad/cursos/coeci/grade-e-corpo-docente/disciplinas-e-corpo-docente. Acesso: 21/08/2018

UTFPR-PB-QB. Plano de Ensino – Bacharelado e Licenciatura em Química, 2016. Disponível em: https://docs.wixstatic.com/ugd/8290ad_58471dda5f5f45afb551f99de3feaedd.pdf. Acesso: 21/08/2018

VIGOTSKI, L.S. Imaginação e criação na infância: ensaio psicológico: livro para professores. São Paulo: Ática, 2009.

ZUCHI , I. A abordagem do conceito de limite via sequência didáIItica: do ambiente lápis papel ao ambiente computacional. Tese (Doutorado). Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, UFSC, Florianópolis, 2005.