

Um diálogo sobre a Teoria Antropológica do Didático – TAD intermediado por um curso introdutório sobre os vetores

A dialogue on the Anthropological Theory of Didactics - ATD intermediated by an introductory course on the vectors

JANY SANTOS SOUZA GOULART¹

LUIZ MÁRCIO SANTOS FARIAS²

Resumo

Neste artigo propõe-se revelar alguns elementos e características próprias da Teoria Antropológica do Didático – TAD através de um Curso introdutório sobre Vetores. Neste texto, apresentamos um recorte de uma pesquisa de maior magnitude, com ênfase nas possíveis interlocuções entre o ensino-aprendizagem de vetores, idealizada nos moldes da TAD. Assim, empreendemos algumas interpretações por meio de uma leitura das produções dos discentes de um Curso de Licenciatura em Matemática, utilizando a lente de apreciação da referida teoria, na qual foram evidenciados aspectos ligados às organizações matemáticas e didáticas. Em termos metodológicos, este estudo servirá para compor parte das análises prévias e apresentar alguns ingredientes de um ensaio experimental que se integrará a um Percurso de Estudo e Pesquisa – PEP.

Palavras-chave: Teoria Antropológica do Didático, vetores, ensino, aprendizagem.

Abstract

This article presents as a proposal to reveal some elements and characteristics specific to the Anthropological Theory of Didactics - ATD by means of an Introductory Course on the Vectors. In this text, we present a cut of a larger research, with emphasis on the possible interlocutions between the teaching and learning of vectors, idealized in the mold of the ATD. Thus, we undertake some interpretations through a reading of the productions of the students of a Course of Degree in Mathematics, using the lens of appreciation of said theory, in which aspects related to mathematical and didactic organizations were evidenced. In methodological terms, this study will serve to compose part of the previous analyzes and present some ingredients of an experimental test that will be integrated into a Study and Research Path - SRP.

Keywords: Anthropological Theory of Didactics, vectors, teaching, learning.

¹ Professora Assistente B do Departamento de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS) - BA. Mestre em Desenho Cultura e interatividade – UEFS. Doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências (PPGEFHC) - UEFS/ UFBA. E-mail: jany.uefs@gmail.com

² Professor Adjunto, do Instituto de Humanidades, Artes e Ciências Prof. Milton Santos (IHAC), da Universidade Federal da Bahia-UFBA. Doutor em Didática da Matemática. Université de Montpellier II, UM2, França. Professor permanente do Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências da UFBA/UEFS. E-mail: lmsfarias@ufba.br

Introdução

O Curso Introdutório sobre Vetores foi idealizado com o intuito de realizarmos uma maior imersão junto ao objeto de estudo em pauta: *O ensino e a aprendizagem dos vetores em um Curso de Licenciatura em Matemática*. Diante do desejo de mergulharmos neste universo, apresentamos a proposta de realização de um curso que abordasse a álgebra vetorial ao coordenador do Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática - CCLM, de uma Instituição de Ensino Superior – IES, na qual estamos desenvolvendo a nossa pesquisa, que prontamente acolheu a ideia, visto que os índices de retenção na componente curricular que possui em sua ementa este tema são bastante significativos.

O cenário da nossa investigação comunga com os dados apresentados em estudos como os de Di Pinto (2000), Passos et al (2007) e Silva et al (2016), que evidenciaram a existência de lacunas apontadas pelos índices de reprovação – a exemplo das universidades UNICAMP e USP, em que o nível de reprovação em Geometria Analítica chega a 35%. Richit (2005) também pontuou que em muitas Instituições de Ensino Superior – IES esta disciplina é caracterizada como um fator problema. Outro exemplo citado por Richit (2005) é a UNESP – RC, que apresentou média percentual de reprovação na disciplina referida em torno de 39% em 2004.

As grandezas vetoriais são protagonistas em cursos vinculados às ciências exatas e tecnológicas. Geralmente, compõem a ementa de disciplinas em que o cerne é a Geometria Analítica, adquirindo um formato sequencial e recorrente em componentes ligadas à Álgebra Linear, Física e Cálculo. No ensino médio e nos cursos básicos universitários, o primeiro contato com os vetores reporta a uma representação em que tais elementos são associados às grandezas que necessitam de módulo, direção e sentido para serem plenamente caracterizadas – como em exemplos clássicos de deslocamento, velocidade, aceleração e força, dentre outros. O trânsito dos vetores entre diversas disciplinas e a abrangência institucional justificam a escolha nesta proposta por estes objetos matemáticos. Dessa forma, no minicurso em questão abordamos a álgebra vetorial, assunto constituinte da ementa de componentes curriculares que abarcam a Geometria Analítica e a Álgebra Linear.

Outro elemento que merece destaque e que permitirá ao leitor compreender a estruturação do presente trabalho com os vetores, refere-se à cronologia do curso, com carga-horária de 20 horas, que ocorreu em um horário no qual os estudantes não tinham aulas. Diante do apoio dado pelo CCLM, também nos foi disponibilizado o espaço do Laboratório de

Ensino de Matemática – LEMA, onde ocorreu a maior parte dos encontros, com exceção dos dois últimos, que aconteceram no Laboratório de Informática – LABMAT, pois no planejamento empregado também foram contempladas atividades envolvendo o software GeoGebra.

A partir deste escopo preliminar, objetiva-se proceder um diálogo sobre a Teoria Antropológica do Didático – TAD (CHEVALLARD, 1996; 1998; 1999; 2001; 2006). Desta maneira, na análise aqui empreendida busca-se desvendar, a partir dos registros das produções dos discentes realizadas no curso, intercambiar tais resultados com os pressupostos teóricos da TAD, almejando contribuir para o desenho da estrutura organizacional do objeto matemático em foco. Nesse diapasão, direciona-se a análise para como o estudo dos vetores se configura em forma de tarefas, técnicas, tecnologias e teoria por meio do postulado de base da TAD, o qual foi denominado por Chevallard (1999) de praxeologia.

Em termo metodológicos, os registros das produções dos participantes irão compor, a priori, as análises prévias das praxeologias de investigação, o que permitirá identificar uma possível infraestrutura didática que revelará condições e restrições de ensino no âmbito vetorial. Nesta perspectiva, a nossa proposta é descrever como alguns discentes de um Curso de Licenciatura em Matemática trabalham em um meio híbrido de aprendizagem vetorial³, ambiente este que integrará o Percorso de Estudo e Pesquisa - PEP⁴ (CHEVALLARD, 2009) na tese de doutorado.

O escopo de um curso introdutório sobre vetores

A proposta de um Curso Introdutório sobre Vetores surgiu a partir de dois aspectos. O primeiro refere-se à empregabilidade em diversas disciplinas e relevância institucional, que, em termos ecológicos,⁵ vinculam-se à razão de ser (BOSCH; GASCÓN, 2010) deste objeto matemático que transita por diversos conteúdos de Geometria Analítica e se propaga por componentes curriculares como Cálculo e Física, conforme elencado anteriormente. O segundo fator, por sua vez, está relacionado aos entraves detectados no âmbito didático, repercutindo e contribuindo para reforçar limitações no âmbito do ensino e aprendizagem deste ente matemático. A partir destas constatações, propusemos a

³ Será abordado com mais detalhes no decorrer do texto.

⁴ Em francês *Parcours d'Étude et de Recherche* – PER.

⁵ Termo vinculado à ecologia dos saberes que indica as funções que o objeto de saber exerce em interação com outros objetos (CHEVALLARD, 1996).

elaboração de um curso, alicerçado na Teoria Antropológica do Didático – TAD (CHEVALLARD, 1999), que contemple uma abordagem flexível (DREYFUS, 1991) em contraposição à rigidez matemática (LUCAS et al, 2014), tendo como um dos objetivos promover um meio exploratório que gere oportunidades para que os discentes se envolvam com tarefas vetoriais investigativas e assumam uma postura indagadora na busca por respostas para os seus questionamentos, comungando com os pressupostos do paradigma de Questionamento do Mundo (CHEVALLARD, 2012).

Nesta perspectiva, Chevallard (2006) apresenta a Dialética Mídia Meio, a qual estabelece íntimas relações com outras teorias chevallardianas, como a Teoria da Transposição Didática – TTD e a Teoria Antropológica do Didático – TAD.

Os alunos – todos nós, na verdade – estamos cercados pelos meios de comunicação (mídias), uma palavra que uso aqui no sentido generalizado, chamado “médium” ou qualquer sistema social que objetiva informar algum segmento da população ou determinado grupo de pessoas sobre o mundo natural ou social. Nesse abrangente ponto de vista, um ciclo de palestras, por exemplo, é um meio, como também é um textbook, o mesmo pode ser dito de lendas urbanas transmitidas de boca em boca... (CHEVALLARD, 2006, p. 26, tradução nossa).

O autor também esclarece que:

o “meio” é qualquer sistema desprovido de intenções e, portanto, se comporta como um fragmento da natureza – uma estrutura que não pretende agradar nem desagradar. Em matemática as provas constituem o meio, pois o sistema dedutivo não tenta cumprir o desejo do matemático (CHEVALLARD, 2006, p. 29, tradução nossa).

Neste direcionamento, projetamos propiciar um meio híbrido (Figura 1) que caracterizamos como um espaço constituído por uma variedade de recursos didáticos disponibilizados aos discentes, o que permitirá o encontro com novas situações, as quais poderão ser utilizadas como alavanca para desconstrução e reconstrução das obras. Em termos mais simplistas, parafraseando Brousseau (2002), parte-se da premissa básica de que uma situação envolve três dimensões: o sujeito, as circunstâncias nas quais ele se encontra e as relações que o unem ao meio.

Figura 1 - Um cenário Híbrido de Aprendizagem.



Fonte: acervo dos autores

Diante do exposto, trabalhamos as noções preliminares de vetores intercambiando com diferenciadas formas de abordagem, recorrendo também às funções semiótica e instrumental dos ostensivos associados à representação dos objetos não ostensivos (BOSCH; CHEVALLARD, 1999). Articulações estas que permitiram o desenvolvimento de atividades no âmbito vetorial.

Seguindo os direcionamentos de Bosch (2018), quando esta autora declara que “mais perguntas, mais respostas que geram uma dinâmica de estudo”, pensamos numa programação estruturada em forma de questões, que compartilha com o que pontua Chevallard (1987, p. 3, tradução nossa): “O sentimento ilusório de que o mundo não deve ser questionado nos é imposto pela educação cotidiana. Mas é de grande importância histórica, filosófica e científica que o mundo possa de fato ser questionado”. Ainda segundo este autor, todas as “crises” com as quais a matemática tem sido historicamente confrontada gravitam em torno de questões como: O que é um número? O que é continuidade? O que é um conjunto? Aspecto este que contrasta com o formato curricular presente nas instituições de ensino. Assim, comungando com esta disparidade, apresentamos a programação aos participantes do curso, como apresentada no quadro 1.

Quadro 1: Programação Preliminar do Curso Introdutório sobre Vetores.

Programação	
24/08	Qual a origem dos vetores? Por que e para que estudar vetores? Quais são as características dos vetores? Como podemos identificá-las? Qual a diferença entre segmentos orientados e vetores? E segmento nulo e vetor nulo, em que diferem? Quais associações práticas podem constituir elementos para representá-los?
31/08	Como trabalhar com as operações de adição e diferença entre vetores? Elaboração de material manipulável que contribua para o entendimento destes conceitos. O que podemos dizer sobre a soma de um ponto com um vetor? E a multiplicação de um número real por um vetor? E o que é o módulo de um vetor? Qual a diferença e a semelhança entre o módulo de um vetor e o módulo de um número?
14/09	Vetores no plano e no espaço, pontos no plano e no espaço, o que há de semelhante? E como podemos diferenciá-los? Utilizar as noções do plano de projeções por meio dos conceitos de diedros e épura (Geometria Descritiva) para representação dos vetores no plano e no espaço.
21/09	Análise das condições e restrições do recurso didático elaborado na aula anterior. É possível trabalhar com vetores definidos por dois pontos, ponto médio, paralelismo e perpendicularismo entre vetores utilizando o material elaborado na aula anterior?
28/09	Entendendo a conceituação dos produtos vetoriais (escalar, vetorial e misto). Como os discentes interpretam as representações ostensivas destes elementos? O que pode ser realizado para minimizar os entraves decorrentes deste fato? O que sugerem?
05/10	Trabalho direcionado ao GeoGebra. Como trabalhar com os temas elencados acima utilizando este software livre.
19/10	Continuação do estudo dos vetores usando o GeoGebra e encerramento das atividades.

Fonte: acervo dos autores (2018)

Para elaborarmos o referido planejamento, consultamos alguns dos livros textos que, geralmente, subsidiam o aporte bibliográfico básico da disciplina Geometria Analítica – a exemplo de Lima (2001), Conde (2004), Camargo e Boulos (2005), Corrêa (2006), Steinbruch e Winterle (1987), Mello e Watanabe (2001), Winterle (2014), Venturi (2015) e Miranda (2015), dentre outros.

A intenção didática contida na expressão “programação preliminar” consistiu em abrir espaços para que os discentes pudessem imprimir suas contribuições e direcionamentos na construção do curso; os estudantes, porém, não usufruíram de tal prerrogativa. Outro desígnio do plano de trabalho sugerido refere-se a um convite aos questionamentos no intuito de direcionar os discentes do Curso de Licenciatura em Matemática a indagar sobre o objeto de estudo, e, conseqüentemente, remetendo suas concepções a uma apreciação de cunho ecológico que os induz à análise das razões de ser⁶ (BOSCH; GASCÓN, 2010) do tema, além de abrir caminhos para instauração dos pressupostos do Paradigma de Questionamento do Mundo idealizado por Chevallard (2012).

⁶ Verifica se a razão de ser dos tipos de tarefas está sustentada por um discurso didático tecnológico-teórico capaz de descrever, justificar, interpretar e desenvolver a práxis.

Interligações entre a Teoria Antropológica do Didático – TAD e a Teoria da Transposição Didática – TTD

O conceito de transposição didática foi introduzido por Michel Verret (1975), em seu trabalho *O tempo dos estudos*;⁷ posteriormente assumido por Yves Chevallard, no âmbito da didática da matemática, conforme evidenciou, ao afirmar que: “eu introduzi o tema da transposição didática na comunidade francesa da didática matemática no início dos anos 80” (CHEVALLARD, 1994, p. 1, tradução nossa)⁸. Os pilares teóricos da transposição didática assentam-se no estudo das transformações que um determinado saber sofre para que possa ser ensinado. Nestes termos, Chevallard (1994, p. 4) assinala a existência de lacunas entre a matemática ensinada e a matemática apreendida:

O conceito de transposição didática, somente por isso, refere-se à passagem do saber acadêmico para o saber ensinado, portanto, a eventual distância obrigatória que os separa, testemunha a necessidade de questionamento, enquanto que ao mesmo tempo é a primeira ferramenta. Para o didático, é uma ferramenta que lhe permite dar um passo atrás, questionar as evidências, erodir ideias simples, retirar-se da familiaridade enganosa de seu objeto de estudo, em suma, exercer sua vigilância epistemológica (CHEVALLARD, 1982, p. 3, tradução nossa).⁹

Questionar o distanciamento do conjunto de transformações adaptativas entre o saber científico e o saber ensinado é o mesmo que questionar as deformações que este saber sofreu ao longo de uma cadeia transpositiva, aspecto este que rompe com a nuance inquestionável da matemática, o que demonstra a necessidade de acompanhamentos (vinculados ao âmbito teórico no qual reside a razão de ser dos objetos matemáticos) e de uma análise epistemológica das hipóteses de aprendizagem e do contexto social. Brousseau (1996, p. 36) também revelou sua concepção acerca da transposição didática ao asseverar que:

Ela mascara o verdadeiro funcionamento da ciência, impossível de comunicar e de descrever fielmente a partir de fora, para colocar no seu lugar uma gênese (sic) fictícia. Para tornar mais fácil o seu ensino, isola determinadas noções e propriedades do tecido de atividades em que elas tiveram a sua origem, o seu sentido, a sua motivação e a sua utilização transpondo-as para o contexto escolar.

⁷ Le temps des études.

⁸ “J’ai introduit le thème de la transposition didactique dans la communauté française des didacticiens des mathématiques au tout début des années 1980”.

⁹ “Le concept de transposition didactique, par cela seulement qu’il renvoie au passage du savoir savant au savoir enseigné, donc à l’éventuelle, à l’obligatoire distance qui les sépare, témoigne de ce questionnement nécessaire, en même temps qu’il en est l’outil premier. Pour le didacticien, c’est un outil qui permet de prendre du recul, d’interroger les évidences, d’éroder les idées simples, de se déprendre de la familiarité trompeuse de son objet d’étude, bref, d’exercer sa vigilance épistémologique”.

A crítica empreendida por Brousseau (1996), nos leva a inquirir sobre a forma fragmentada com que o saber é difundido e decomposto com o intento de torná-lo acessível aos membros do contexto escolar. Diante do exposto, ao concentrarmos a atenção no saber na esfera institucional das salas de aula, nos deparamos com as inferências e interpretações do professor perante o saber que está institucionalmente posto sob a vigilância da noosfera,¹⁰ conforme ressaltou Almouloud (2011, p. 196):

O professor não transforma por iniciativa própria o saber sábio em objeto de ensino. A escolha dos objetos a ensinar é definida institucionalmente por meio de propostas curriculares, e é controlada de alguma forma pela sociedade (autoridades locais, pais de alunos, autoridades administrativas da educação).

Nestes termos, Chevallard (1982, p. 3, tradução nossa)¹¹ destacou que “para o professor, as coisas são diferentes. Em primeiro lugar, pelo menos, o reconhecimento da transposição didática prejudica sua feliz participação no trabalho didático”. Assim, deve ficar claro que há diferenças entre o saber designado para ser ensinado e o que efetivamente é ensinado, o que significa inferir que a cada esfera institucional o saber se adequa e se molda aos condicionantes da instituição em foco. Frisa-se, nesse contexto, que não se deve perder de vista a legitimidade e consistência do conhecimento em questão. Bosch e Gascón (2006, p. 55, tradução nossa)¹² enfatizam que “[...] não é possível interpretar adequadamente a matemática escolar sem levar em conta os fenômenos relacionados à reconstrução escolar da matemática, cuja origem deve ser encontrada nas instituições que produzem conhecimento matemático.”.

Num direcionamento semelhante, Chacón (2008, p. 51, tradução nossa)¹³ ressalta que “o processo de transposição didática sublinha, portanto, a relatividade institucional do conhecimento”, dando origem às submissões ou aos assujeitamentos institucionais, a exemplo do uso regular de um livro didático para o ensino de uma Organização Matemática (OM). A figura 2 sintetiza o processo transpositivo e vincula-o à Teoria Antropológica do Didático – TAD.

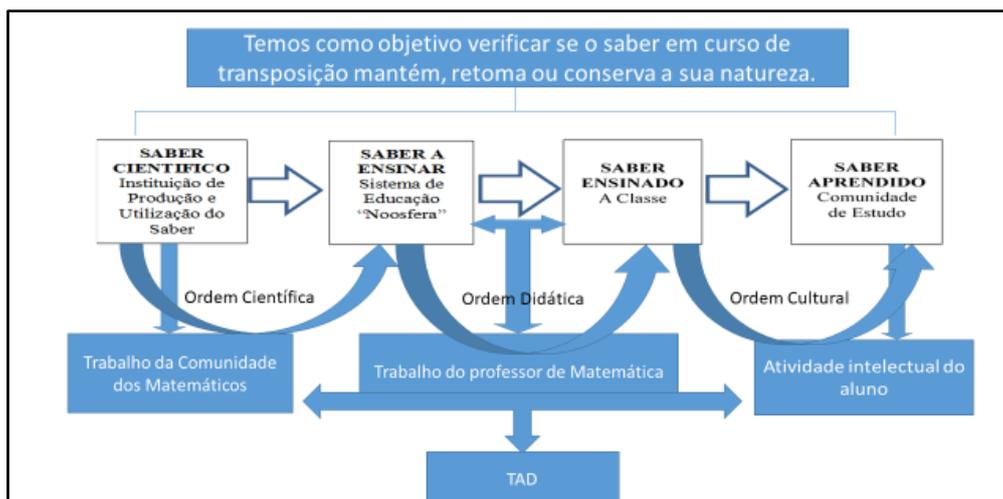
¹⁰ A noosfera viabilizaria a manutenção da compatibilidade entre o sistema didático e o seu entorno social, no “plano do saber” (CHEVALLARD, 1999, p. 26).

¹¹ “Mais pour l’enseignant, les choses vont autrement. En un premier temps au moins, la reconnaissance de la transposition didactique vient ébranler sa participation heureuse au fonctionnement didactique”.

¹² “[...] it is not possible to interpret school mathematics properly without taking into account the phenomena related to the school reconstruction of mathematics, whose origin has to be found in the institutions that produce mathematical knowledge”.

¹³ “Le processus de transposition didactique souligne donc la relativité institutionnelle des savoirs”.

Figura 2 – Esquema Representativo das Interligações entre a TTD e a TAD



Fonte: acervo dos autores

O esquema retrata como identificamos interligações entre os dois campos teóricos que dialogam e possibilitam interligações de ordem científica, didática e cultural, aspectos estes que se encontram no âmago da TAD, a qual trataremos com mais especificidade no decorrer do texto.

O nível do saber ensinado sofre intervenções do professor, que empreende suas interpretações tomando como referencial o livro didático, suas práticas, dentre outros, o que pode ser resumido nas considerações de Almouloud (2011, p. 197): “O texto do saber a ensinar não está completamente escrito em lugar algum. É indispensável examinar se a distância, a deformação entre o objeto de saber e o objeto de ensino não é, na pior das hipóteses, uma linguagem pseudocientífica”. Aspecto este que dialoga com o que declaram Farras, Bosch e Gascón (2013), quando situam o problema didático e a modelização matemática no âmbito da TAD, considerando que o problema docente é pré-científico.

Denominamos “problemas docentes” a los que se plantea el profesor como tal profesor cuando tiene que enseñar un tema matemático a sus alumnos. Los problemas docentes se formulan utilizando las nociones disponibles en la cultura escolar importadas habitualmente de los documentos curriculares (como, por ejemplo, las nociones de motivación, aprendizaje significativo, individualización de la enseñanza, adquisición de un concepto, abstracción, competencia, etc.). Los problemas docentes se formulan, normalmente, asumiendo y sin cuestionar no sólo las nociones sino también las ideas dominantes en la citada cultura escolar. En particular, en la formulación de un problema docente se suele asumir de manera acrítica la forma como se interpreta en la cultura escolar la matemática involucrada en el problema en cuestión (FARRAS; BOSCH; GASCÓN, 2013, p. 3).

A partir desses entendimentos, emerge a relevância da vigilância epistemológica no processo transpositivo, pois, segundo Chevallard (1991), existe uma distância, muitas

vezes imensa, entre o conhecimento científico, o conhecimento a ensinar e, conseqüentemente, o conhecimento ensinado.

Os estudos de Chevallard (1991; 1994) seguiram em direção ao aumento e à generalização da TTD, como assevera o autor: “Nesta perspectiva, a primeira teoria da transposição didática não serve apenas como ponto de partida, mas como ponto de apoio e orientação. Ou seja, um conhecimento sobre o qual um certo número de instituições reconhece que ele mora dentro deles” (CHEVALLARD, 1994, p. 22, tradução nossa)¹⁴. Atualmente, os pressupostos da transposição didática encontram-se inseridos no estudo da ecologia dos saberes – que se interessa pelas condições e restrições sob as quais um determinado saber vive em determinada instituição –, que é parte constituinte da Teoria Antropológica do Didático (TAD) e sobre a qual discorreremos a seguir acerca de alguns pontos.

Diante destas ponderações, inferimos que, possivelmente, existem lacunas que precisam ser analisadas através de um arcabouço teórico que contemple a estrutura organizacional do saber em pauta. No caso do estudo em questão, a estrutura organizacional concentra-se no seio da TAD.

Por se tratar de uma teoria densa, arrazoaremos apenas a respeito de alguns elementos, a saber, aqueles que servirão de aporte para fundamentar e modelar a leitura de algumas produções dos participantes do Curso Introdutório sobre os Vetores, o qual abordaremos neste artigo. Como mencionado anteriormente, a Teoria Antropológica do Didático – TAD surgiu como um alargamento da Teoria da Transposição Didática – TTD, propiciando uma ampliação dos ecossistemas¹⁵ e das inter-relações entre objetos de ensino e indivíduos membros de uma determinada instituição. A partir desta estrutura primeira, Chevallard (1999) admitiu três conceitos como primitivos: os objetos O, as pessoas X e as instituições I, sublinhando a condição de existência de que tudo é objeto; conseqüentemente, os objetos O passam a ocupar uma posição privilegiada em detrimento dos outros conceitos, constituindo o material de base desta construção teórica.

Contudo, a condição de existência de todo objeto estará condicionada ao reconhecimento deste, ou seja, ele passará a existir no momento em que for reconhecido por uma pessoa X ou instituição I. Com isso, aparecerão as relações “pessoal” e “institucional” denotadas

¹⁴ “Dans cette perspective, la première théorie de la transposition didactique sert, non seulement de point de départ, mais de point d’appui et de guide. Soit un savoir S dont un certain nombre d’institutions reconnaissent qu’il vit en leur sein”.

¹⁵ Entendemos ecossistema como sendo o local onde se desenvolve um determinado sistema que possui uma ecologia própria, no caso em estudo, o sistema didático (ARTAUD, 1998).

por $R(X,O)$ e $R(I,O)$, respectivamente, o que torna perceptivos os aspectos de interdependência entre esses elementos.

Do ponto de vista da «semântica» da teoria, qualquer coisa pode ser um objeto. Um objeto existe a partir do momento em que uma pessoa X ou uma instituição I o reconhece como existente (para ela). Mais precisamente, podemos dizer que o objeto O existe para X (respectivamente, para I) se existir um objeto, que denotarei por $R(X, O)$ (resp. $RI(O)$), a que chamarei de relação pessoal de X com O (resp. relação institucional de I com O) (CHEVALLARD, 1998, p. 93, grifos nossos).

O autor ora referido prosseguiu, a cada trabalho, detalhando os elementos que ainda se apresentavam um tanto obscuros para os estudiosos e interessados no arcabouço teórico aludido. Chevallard (2006) acrescentou que a TAD tem como sustentação e pressuposto as atividades humanas, que podem ser apreciadas sob estruturas de ação, denominadas pelo teórico de tarefas desenvolvidas dentro de instituições. Chevallard (2006) havia também, apresentado como premissa básica da TAD a afirmação de que qualquer atividade humana regularmente realizada pode ser integrada a um único modelo, que é sintetizado pela palavra praxeologia (CHEVALLARD, 1998). Segundo esse viés, o autor estruturou a organização praxeológica:

[...] em torno de um tipo de tarefas T , que encontramos em princípio, um triplete formado de uma técnica (pelo menos), τ , de uma tecnologia de τ , θ e uma teoria de θ , Θ . O conjunto, denotado $[T / \tau / \theta / \Theta]$, constitui uma praxeologia específica, este qualificador significa que se trata de uma praxeologia relacionada a um único tipo de tarefas, T . Essa praxeologia - ou organização praxeológica - portanto, consiste em um bloco técnico prático, $[T / \tau]$, e um bloco tecnológico-teórico, $[\theta / \Theta]$ (CHEVALLARD, 1998, p. 5, tradução nossa).¹⁶

A partir deste olhar praxeológico, e de suas múltiplas interligações, infere-se que devemos aprender ou ensinar matemática enquanto ação humana, admitindo-se que toda atividade humana pode ser modelada praxeologicamente, ou seja, em termos mais simplórios: consiste em realizar uma tarefa t de um determinado tipo T , cumprida por uma dada técnica τ , fundamentada por uma tecnologia θ , legitimada por meio de uma teoria Θ . Essa estrutura é simbolicamente representada por $\wp = [T, \tau, \theta, \Theta]$ e significa um conjunto de técnicas no bojo de uma tecnologia e de uma teoria organizadas para um tipo de tarefa, cuja denominação é Organização Praxeológica (OP) pontual, por envolver apenas um tipo

¹⁶ “Autour d’un type de tâches T , on trouve ainsi, en principe, un triplet formé d’une technique (au moins), τ , d’une technologie de τ , θ , et d’une théorie de θ , Θ . Le tout, noté $[T/\tau/\theta/\Theta]$, constitue une praxéologie ponctuelle, ce qualificatif signifiant qu’il s’agit d’une praxéologie relative à un unique type de tâches, T . Une telle praxéologie – ou organisation praxéologique – est donc constituée d’un bloc pratico-technique, $[T/\tau]$, et d’un bloc technologique-théorique, $[\theta/\Theta]$ ”.

de tarefa T. Ressalta-se que a OP preza pela inseparabilidade entre os blocos práticos $[T, \tau]$ e teóricos $[\theta, \Theta]$, intrínsecos às atividades matemáticas.

Vale evidenciar que se abrimos o bloco prático constituído por um tipo de tarefa T, subsidiado e manipulado por técnicas τ , constata-se a preeminência dos usos de *objetos ostensivos*, designados por Bosch e Chevallard (1999) como objetos que possuem uma natureza sensível, uma certa materialidade, isto é, que têm para o sujeito uma realidade perceptível e que assumem um caráter relativamente concreto. Neste segmento, emerge um aspecto dual entre a natureza dos objetos matemáticos. No entanto, sublinhamos que neste texto não faremos alusão, de forma explícita, às dimensões ostensivas e não ostensivas vinculadas aos vetores, porém consideramos pertinente sinalizar a necessidade de estudos que contemplem, em seu cerne, tal abordagem.

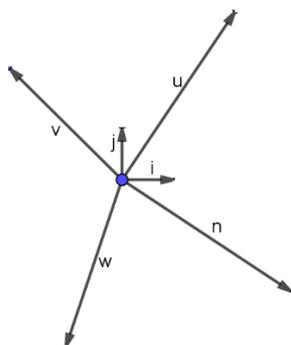
Incidência de elementos da TAD em um curso introdutório sobre vetores

Revelamos anteriormente alguns elementos que expõem características do curso sobre os vetores. Contudo, neste tópico nossa atenção se deterá nos diálogos que podem ser estabelecidos por meio de interconexões com a Teoria Antropológica do Didático – TAD. O primeiro aspecto vincula-se ao Sistema Didático – SD, realçado por Chevallard (2011) em um curso proferido na Universidade Bandeirante de São Paulo – UNIBAN: “encontre-se no coração da TAD”, e sua diversidade que nem sempre é notada, pois geralmente focamos nosso olhar para os Sistemas Didáticos Principais – SDP (CHEVALLARD, 2011, não paginado) configurado por um grupo de estudantes (X), professores (Y) e determinada obra ou objeto de estudo (O), representado por $S(X, Y, O)$ no ecossistema de salas de aulas. Entretanto, concebemos que também devemos nos dedicar aos Sistemas Didáticos Auxiliares – SDA (CHEVALLARD, 2011), como por exemplo: $S(X, \emptyset, O)$ ou $S(x_1, x_2, \emptyset, O)$ dentre outras configurações que orbitam em torno do SDP.

Aspecto este, demonstrado por intermédio de uma tarefa proposta, a qual deveria ser resolvida por Sistema Didático com a configuração $S(x_1, x_2, \emptyset, Q)$ em que $X = \{x_1, x_2\}$ significa dupla de participantes do curso, \emptyset tem a conotação de não participação ou intervenção do professor e Q é um tipo de tarefa T ou atividade (como no exemplo da figura 3) recomendada para resolução.

Figura 3 - Uma das atividades propostas no Curso

Fixe dois vetores \vec{i} e \vec{j} unitários e ortogonais e considere \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} e \vec{n} os vetores indicados abaixo.



Usando os materiais manipuláveis disponíveis, construa a figura acima. Escreva os vetores \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} e \vec{n} em função dos vetores \vec{i} e \vec{j} , isto é, usando as operações com vetores estudadas (adição, subtração e multiplicação por escalar), escreva cada um deles na forma vetores $x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$, onde x, y são números reais.

Fonte: acervo dos autores

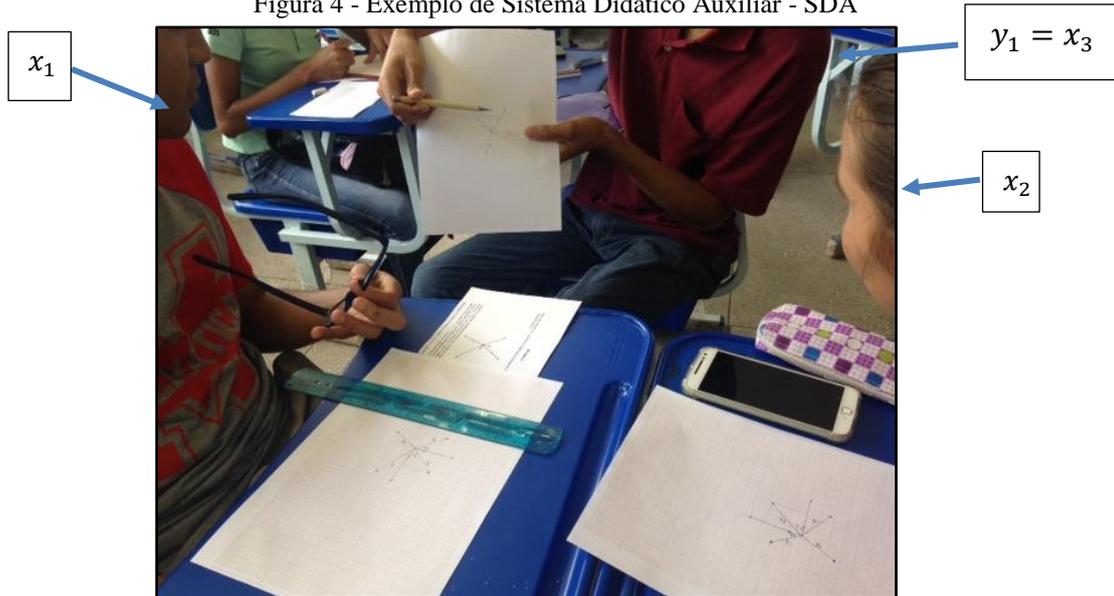
Nesta perspectiva, o presente trabalho sobre vetores nos forneceu diferentes configurações de Sistemas Didáticos furtivos; apresentaremos um dos registros que retratam a referida heterogeneidade. Observem na figura 4, a seguir, que um estudante de outro grupo assume a posição de \emptyset e o novo cenário didático que se constitui, mesmo que momentaneamente, é: $S(x_1, x_2, y_1, Q)$ em que $y_1 = x_3$, revelando movimentações no “topos” do discente, um dos elementos indispensáveis para a análise didática proposta pela TAD (CHEVALLARD, 2011), que, em termos didáticos, situa-se na topogênese, como esclarecem Llanos e Otero (2015, p. 251, tradução nossa):¹⁷

A topogênese é a função que liga como os espaços são ocupados pelo grupo de alunos X e o professor $\{e\}$. As modificações na topogênese andam de mãos dadas com as mudanças na mesogênese, uma vez que as mudanças de papéis também afetam os resultados que podem ser obtidos no meio didático; considerando que as modificações no meio são dadas dentro da classe $[X; e]$ e não apenas a responsabilidade de y . O topos do aluno e o topos do professor referem-se à posição dos alunos e do professor em relação à OM construída ou em processo de construção durante o desenvolvimento de estudo no meio.

Neste âmbito, a nova configuração que se desenha em termos do SD é:

¹⁷ La topogénesis es la función que vincula cómo se ocupan los espacios del grupo de alumnos X y el profesor $\{y\}$. Las modificaciones en la topogénesis van a la par de los cambios en la mesogénesis dado que los cambios de roles afectan también a los resultados que puedan obtenerse en el medio didático; teniendo en cuenta que las modificaciones en el medio se dan al interior de la clase $[X; y]$ y no sólo son responsabilidad de y . El topos del alumno y el topos del profesor hacen referencia a la posición de los alumnos y el profesor en relación con las OM construidas o en proceso de construcción durante el proceso de estudio en el medio.

Figura 4 - Exemplo de Sistema Didático Auxiliar - SDA



Fonte: acervo dos autores

Em mesmo sentido, Chevallard (2011) sinaliza acerca da efemeridade dos SD, pois, a cada momento que se modifica a obra O em estudo, o Sistema Didático se dissolve dando lugar a outro SD, ressaltando que: “o didático não deve ser enclausurado em um único Sistema Didático” (CHEVALLARD, 2011). Ao partilhar desta concepção, destacamos que desenvolvemos a maior parte do nosso estudo acerca dos vetores com a participação coadjuvante do professor $Y = \{y\}$; no entanto, não podemos negar que y estava eivado de intenções didáticas, porém o trabalho de protagonismo pertenceu ao conjunto de estudantes X , que, por meio de variados tipos de tarefas T , empregaram diferentes técnicas τ para resolver tais tarefas, provocando, conseqüentemente, alterações no meio construído em classe a partir dos diversos materiais disponibilizados aos estudantes, com a finalidade de desencadear mudanças nas relações pessoais com o objeto vetores. Este contexto desenhado acima nos aproxima de uma possível integração da noção de Praxeologia Pessoal (CROSET; CHAACHOUA, 2016).

No que tange às intenções didáticas, Chevallard (1996, p. 133) destaca que:

a intenção didática se manifesta através da formação de instituições a que chamo, genericamente, sistemas didáticos. Um sistema didático (SD) comporta um ou vários sujeitos de I , que nele ocupam uma posição de professor P , um ou vários sujeitos de I que nele ocupam uma posição de aluno a , e finalmente um objeto O , pertencente a $PI(a)$, que é o conjunto de investimentos didáticos para I .

O que foi descrito, até o momento, sobre alguns aspectos da aula, caracteriza um sistema didático – SD, que nunca existe sozinho e explicita dependências entre professor, alunos e investimentos didáticos, designado por Brousseau (1996) como uma espécie de sistema de ação concreto, ou seja, o direcionamento empreendido pelo educador define, dá sentido

e gera condições para que o aluno interaja com o conhecimento. Entretanto, Chevallard (1996) também salienta que não basta existir, é fundamental que o SD funcione; para que o sistema referido opere, é minimamente necessário que exista, ou que se construa, um meio que possa ser modificado através de provocações e desestabilizações de alguns de seus elementos. Assim, o foco de interesse passa a ser os estímulos e instabilidades que surgirão no desenvolvimento dos discursos.

Aditado a isto, é relevante sinalizar também a orientação de alguns estudos de Chevallard (2009; 2010; 2012), os quais apontam para a emergência de um novo Paradigma de Questionamento do Mundo, que se opõe ao “Paradigma de Visitação de Obras”, propondo:

Uma visão prospectiva sobre a dimensão didática em nossas sociedades que desejo explicitar, pode ser encapsulado num fato histórico crucial: o antigo paradigma didático que ainda floresce em tantas instituições escolares é obrigado a dar lugar a um novo paradigma ainda na infância. Para tornar uma longa história em curta, eu defino um paradigma didático como um conjunto de regras que prescrevem, ainda que implicitamente, o que deve ser estudado, quais são as apostas didáticas e quais são as formas de estudá-los (CHEVALLARD, 2012, p. 2).

Por intermédio da concepção chevallardiana, o aluno assume um papel protagonista na aquisição da aprendizagem, provocando rupturas com a postura estática e coadjuvante imposta no modelo tradicional de ensino subsidiado pelo Paradigma de Visitas a Obras ou Visitas aos Monumentos, que, na acepção de Chevallard (2012), resume-se a ouvir um relato ou narrativa recitada pelo professor acerca do monumento visitado. Em outras palavras, significa afirmar que devemos deixar o mundo “encantado e enganoso do turismo matemático para chegarmos ao universo de uma engenharia de precisão” (CHEVALLARD, 2011, não paginado).

Em termos da modelação praxeológica, revelam-se, na atividade apresentada no quadro 2, tipos de tarefas T que promovem interligações entre o tratamento algébrico e geométrico da álgebra vetorial. A atividade mencionada pode ser decomposta em:

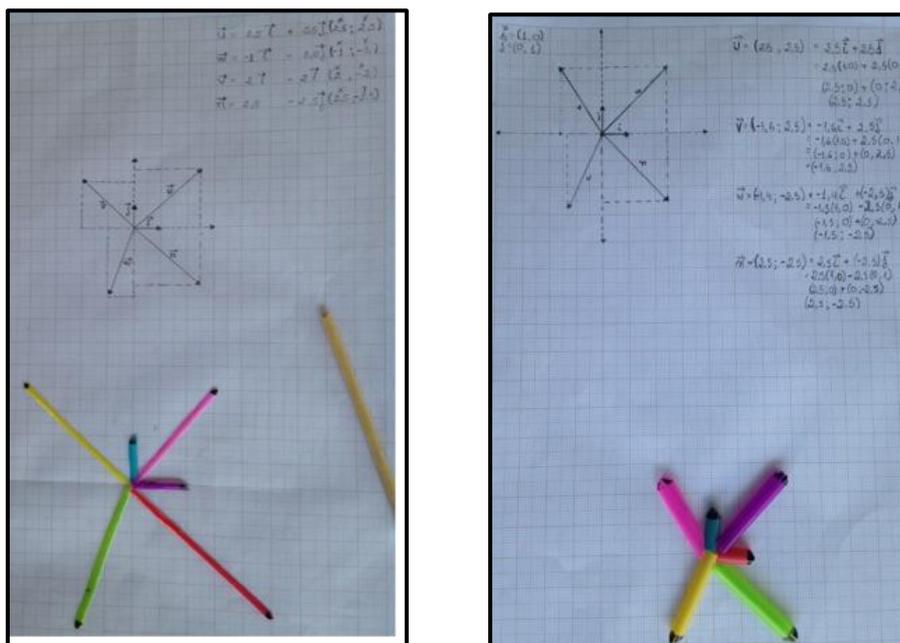
Quadro 2: Decomposição da atividade em tipos de tarefas T

- | |
|---|
| <p>T₁: Fixar dois vetores \vec{i} e \vec{j} unitários e ortogonais;</p> <p>T₂: Considerar \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} e \vec{n} os vetores indicados na figura;</p> <p>T₃: Usar os materiais manipuláveis disponíveis para construção da figura mencionada na questão;</p> <p>T₄: Escrever os vetores \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} e \vec{n} em função dos vetores \vec{i} e \vec{j};</p> <p>T₅: Utilizar as operações com vetores estudadas (adição, subtração e multiplicação por escalar);</p> <p>T₆: Escrever cada um deles na forma vetores $x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$, onde x, y são números reais.</p> |
|---|

Fonte: acervo dos autores

Os verbos em destaque exprimem ações, e para clarificar as suas completudes fazem-se necessários complementos nominais. Sem embargo, na concepção de Chevallard (2006), uma estrutura de ação constitui, no seio das Organizações Matemáticas – OM, um tipo de *tarefa* peculiar às atividades humanas. Para contemplar-se a demanda de cada tarefa, é preciso empregar o uso de técnicas específicas. Retratamos alguns dos registros (Figura 5) nos quais podemos identificar as técnicas utilizadas pelos estudantes.

Figura 5 - Trabalho com a técnica τ de duas duplas de discentes



Fonte: acervo dos autores (2018)

Com sutis diferenças, os dois grupos contemplam o que foi solicitado na atividade. Na foto situada do lado esquerdo, a qual denominaremos como dupla 1, as caracterizações dos vetores apresentam diferenciações da foto situada no lado direito (dupla 2). Assim como existe um maior detalhamento na resolução algébrica da dupla 2. Fato este, que nos conduz a estudos mais aprofundados no que tange às praxeologias pessoais (CROSET; CHAACHOUA, 2016). Contudo, não abordaremos o item ora citado neste texto, devido à limitação de espaço. Outro aspecto que merece evidência refere-se ao instrumento disponibilizado para os participantes do curso: canudos, palitos de churrasco, papéis milimétricos, régua, par de esquadros, cola, canetas permanentes, tesouras, dentre outros; o que possibilitou as referidas construções, revelando nuances de um ambiente híbrido de aprendizagem, caracterizado por nós como um espaço constituído por uma variedade de recursos didáticos disponíveis aos estudantes, o que permitirá o encontro

com novas situações, as quais poderão ser utilizadas como alavanca para desconstrução e reconstrução das obras.

Ao olharmos para o discurso que justifica e fundamenta as técnicas empregadas na resolução da atividade, este se situa no bloco teórico $[\theta, \Theta]$, que geralmente não aparece de forma evidente e encontra-se na fronteira entre álgebra e geometria presente na gênese da álgebra vetorial.

A tarefa apresentada revela elementos que integram a passagem do aspecto geométrico para uma configuração algébrica. Mais precisamente, é estabelecido uma correspondência biunívoca entre o conjunto de vetores paralelos a um dado plano Π e o conjunto de pares ordenados $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{R}\}$. Para atingir este objetivo, é fixada uma base ortonormal $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ em Π . Em seguida, dado qualquer vetor \vec{v} em Π , utiliza-se das noções geométricas de adição entre vetores e multiplicação de um vetor por um escalar para escrever \vec{v} como combinação linear de \vec{i} e \vec{j} , isto é, obtêm-se (únicos) números reais x e y tais que qualquer $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$. A estes números denomina-se coordenadas de \vec{v} em relação a $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ e denota-se por $\vec{v} = (x, y)$.

Esta situação limítrofe estabelece associações históricas e epistemológicas com os estudos de Sir William Rowan Hamilton (1805-1865), os *quaternions* (generalização dos números complexos):

(...) para uma linha reta com direção no espaço, e com x, y, z para suas componentes retangulares, ou projeções sobre os três eixos retangulares, ele tem sido induzido a chamar a expressão trinomial, assim como a linha que representa, um VETOR. Um quaternion deve consistir assim de uma parte real e um vetor. ... (CROWE, 1994, p. 31).

Sinalizamos que para tratar melhor sobre os elementos teóricos que justificam os cálculos vetoriais, será oportuna a produção de um novo artigo.

Em síntese, supomos que a razão de ser dos objetos matemáticos, em especial os vetores, assenta-se no caráter inerente da Organização Praxeológica (OP), o que em termos simplórios significa dizer que o saber fazer estará sempre atrelado a uma fundamentação tecnológica teórica, que segundo o nosso olhar constitui o cerne para potencializar os índices de aprovações, pois ao promover um trabalho que contemplem atividades estruturadas praxeologicamente a aprendizagem constituirá uma consequência do processo.

Algumas Considerações

O mapeamento das resoluções de uma das tarefas que foram trabalhadas no curso em questão, possibilitou análises mais aprofundadas no âmbito do ensino e aprendizagem dos vetores, permitindo identificar elementos próprios da Teoria Antropológica do Didático – TAD. Verificamos que, apesar de alguns entraves conceituais, os participantes do curso conseguiram integrar um ambiente híbrido de aprendizagem à construção dos procedimentos para obtenção de uma resposta satisfatória para cada questão trabalhada. Outro ponto que merece destaque neste estudo refere-se à imersão dos Sistemas Didáticos Auxiliares – SDA que orbitam em torno de Sistemas Didáticos Principais – SDP. Ao direcionarmos a atenção para os SDA, é possível produzir análises diferenciadas no âmbito didático.

A proposta de uma programação estruturada em forma de questões, também constituiu um diferencial, fator este que subsidiou caminhos para que os estudantes abandonassem posturas retro-cognitivas e assumissem um comportamento pró-cognitivo, levando-os ao enfrentamento de questões e problemas conduzindo a emergência de um currículo definido em termo de perguntas (CHEVALLARD, 2012).

É relevante destacar que, após a realização do curso tivemos acesso às avaliações que contemplaram o tema álgebra vetorial. E no que tange ao desempenho dos discentes participantes e não participantes do curso, foi possível perceber, por meio de uma análise prévia comparativa, que os primeiros obtiveram uma melhor performance em questões cujo o cerne eram os vetores. Fato este que, nos fornece mais elementos para construção e elaboração de um Percorso de Estudo e Pesquisa - PEP (CHEVALLARD, 2009) no intuito de apresentar direções que promovam avanços no âmbito da aprendizagem.

Agrega-se ao que foi elencado até o momento, que a partir da apreciação de um curso que versou sobre os vetores e empregou aportes da TAD, foi possível apresentar caminhos que servirão de suporte para futuros estudos no campo da Didática da Matemática. Dentre estes, salientamos a necessidade de estudos que contemplem as dimensões ostensivas e não ostensivas vinculadas à álgebra vetorial, pois identificamos um aspecto parcimonioso no que tange ao tema proposto. Abordagem esta, que será contemplada no trabalho de tese.

Referências

ALMOULOU, S. A. As transformações do saber científico ao saber ensinado: o caso do logaritmo. *Educar em Revista*, Curitiba, número Especial, p. 191-210, 1/2011. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/er/nse1/13.pdf>>. Acesso em: 13 dez. 2017.

ARTAUD, M. **Introduction à L’Aproche écologique Du didactique**, L’écologie dès organization mathématiques ET didactique. *Actes... de La neuvième École d’été de didactique dès Mathématiques*. Hougate, Bailleul, p. 101-139. 1998

BOSCH, M. *Los Recorridos de Estudio e Investigación en la Enseñanza y en la Formación del Profesorado*. In: SEMINÁRIOS DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NA PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA - PUC-SP, 2018. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=wUws77BwQ4&fbclid=IwAR3tqQHK7O5Mmq8TmdDOFmT9j1A7zXrtTO3KUIPwwPpmrwuDsRS09KEvA-U>>. Acesso em: 15 out. 2018.

BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y. Ostensifs et sensibilité aux ostensifs dans l’activité mathématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1999. p. 77-124. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Sensibilite_aux_ostensifs.pdf>. Acesso em: 17 set. 2017.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. 25 years of the didactic transposition. *ICMI Bulletin*, n. 58, p. 51-65, 2006. Disponível em: <<https://isis.ku.dk/kurser/blob.aspx?feltid=233272>>. Acesso em: 15 out. 2017.

_____. Fundamentación antropológica e las organizaciones didácticas: de los “talleres de prácticas matemáticas” a los “recorridos de estudio e investigación”. In: BRONNER, Alain et al. *Apports de la théorie anthropologique du didactique: diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d’action*. IUFM de l’académie de Montpellier, 2010. p. 55-90.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e Métodos da Didática da Matemática. In: BRUN, Jean. *Didática das Matemáticas*. Tradução Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

_____. *La Théorie des Situations Didactiques*. 2002. Disponível em: <<http://perso.wanadoo.fr/daest/Pages%20perso/Brousseau.htm#ligne>>. Acesso em: 10 mar. 2018.

CAMARGO, I. de; BOULOS, P. *Geometria Analítica*. 3. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

CHACÓN, A. M. A. *La gestion de la mémoire didactique par le professeur dans l’enseignement secondaire des mathématiques: Etude du micro-cadre institutionnel en France et au Costa Rica*. 2008. 360f. Tese (Doutorado em Didactique des Disciplines Scientifiques et Technologiques Spécialité: Didactique Des Mathématiques) –

L'université De Toulouse Délivré par l'Université Toulouse III – Paul Sabatier, Toulouse, 2008. Disponível em:
<<http://repositorio.conicit.go.cr:8080/xmlui/bitstream/handle/123456789/195/Th%C3%A8se%20ARAYA%20-CHACON.pdf?sequence=1&isAllowed=y>>. Acesso em: 09 de nov. 2017.

CHEVALLARD, Y. **Pourquoi la Transposition Didactique?** In: SÉMINAIRE DE DIDACTIQUE ET DE PÉDAGOGIE DES MATHÉMATIQUES DE L'IMAG, Université Scientifique et Médicale de Grenoble. *Actes de L'année 1982*. Disponível em:
<http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Pourquoi_la_transposition_didactique.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2017.

_____. *A Theoretical Approach to Curricula, International Seminar on Comparative Studies of Mathematical Curricula in Different Countries*. Frascati (Italy), 1987. Disponível em:
<http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/A_Theoretical_Approach_to_Curricula.pdf>. Acesso: 29 jul. 2018.

_____. *La transposition didactique*. Du savoir savant au savoir enseigné. 2. ed. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1991.

_____. Les Processus de Transposition Didactique et leur Theorisation Contribution à l'ouvrage dirigé par G. Arsac, Y. Chevallard, J.-L. Martinand, Andrée Tiberghien (éds), *La transposition didactique à l'épreuve*. La Pensée sauvage, Grenoble, p. 135-180, 1994. Disponível em:
<http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=114>. Acesso em: 11 nov. 2017. Revista?

_____. Conceitos Fundamentais da Didática: as perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica. In: BRUN, Jean. *Didática das Matemáticas*. Tradução Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

_____. **Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique**. In: L'UNIVERSITE D'ETE, 1998, p. 91-118. *Actes de l'Université d'été La Rochelle*. Clermont-Ferrand, France: IREM, 1998. Disponível em:
<http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Analyse_des_pratiques_enseignantes.pdf>. Acesso em: 25 out. 2017.

_____. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble, La Pensée Sauvage Éditions, v. 19, n. 2, p. 221-226, 1999. Disponível em:
<http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Analyse_des_pratiques_enseignantes.pdf>. Acesso em: 02 set. 2017

_____ et al. *Estudar Matemática: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem*. Tradução Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artes Médicas, 2001.

_____. *Organiser l'étude: Ecologie & régulation, Cours donné à la XIe école d'été de didactique des mathématiques*. Paru dans les actes correspondants, La Pensée

Sauvage, Grenoble, p. 41-56, 2002. Disponível em:
<http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=53>. Acesso em: 17 fev. 2018.

_____. *La théorie anthropologique des faits didactiques devant l'enseignement de l'altérité culturelle et linguistique*. Le point de vue d'un outsider. Conférence plénière donnée le 24 mars 2006 au colloque CONSTRUCTION IDENTITAIRE ET ALTÉRITÉ: CRÉATIONS CURRICULAIRES ET DIDACTIQUE DES LANGUES, Université de Cergy-Pontoise, 2006. Disponível em:
<http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_TAD_devant_l_alterite_culturelle_et_linguistique.pdf>. Acesso em: 13 out. 2017.

_____. *La notion de PER: problèmes et avancées*, 2009, Disponível em:
<http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_notion_de_PER_problems_et_ava_nces.pdf>. Acesso: 19 de dez. 2018.

_____. Enquêter pour connaître. L'émergence d'un nouveau paradigme scolaire et culturel à l'âge de l'Internet. Communication à la journée de réflexion sur le thème «*Une approche anthropologique du didactique*» tenue le 15 octobre 2010 à l'Institut de mathématiques de l'université de Liège, Belgique. Disponível em:
<http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=178>. Acesso em: 02 set. 2017.

_____. *Condições*. In: Curso da Escola de Altos Estudos – EAE. Universidade Bandeirante de São Paulo – UNIBAN, 2011. Disponível em:
<<https://www.youtube.com/watch?v=gwf5xCetWTM>>. Acesso em: 08 jul. 2018.

_____. Quel program pour l'avenir de la recherche en TAD? In: BOSCH, M. et al. (Ed.). *Contribuições da teoria antropológica da didática*. Um panorama do TAD. v. 1. Catalunha, Espanha: Centro de Pesquisa Matemática, 2011. p. 23-32. Disponível em:
<<http://yves.chevallard.free.fr/>>. Acesso em: 03 nov. 2018.

_____. *Teaching Mathematics in Tomorrow's Society: a Case for an Oncoming Counterparadigm*. In: 12TH INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 2012, COEX, Seoul, Korea. Disponível em:
<https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F978-3-319-12688-3_13.pdf>. Acesso em: 10 out. 2017.

CONDE, A. *Geometria Analítica*. São Paulo: Atlas, 2004.

CORRÊA, P. S. Q. *Álgebra Linear e Geometria*. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

CROSET, M. C.; CHAACHOUA, H. Une réponse à la prise en compte de l'apprenant dans la TAD: la praxéologie personnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 36-2. Grenoble: La Pensée Sauvage, 2016. Livro ou revista?

CROWER, M. J. *A History of Vector Analysis*. New York: Dover Publishers, Inc., 1994.

DI PINTO, M. A. **Ensino e Aprendizagem da Geometria Analítica: As pesquisas Brasileiras da década de 90**. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2000.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, D. (Ed.). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer, 1991. p. 25-41.

FARRAS, B. B.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. *Educación Matemática Pesquisa*, v. 15, n. 1, 2013. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/12757>>. Acesso em: 08 jul. 2018.

LIMA, E. L. *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 2001.

LLANOS, Viviana Carolina; OTERO, María Rita. La incidencia de las funciones didácticas topogénesis, mesogénesis y cronogénesis en un Recorrido de Estudio y de Investigación: el caso de las funciones polinómicas de segundo grado. *Relime*, México, v. 18, n. 2, p. 245-275, 2015. Disponível em: <http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362015000200005&lng=es&nrm=iso>. Acesso em: 03 nov. 2018.

LUCAS, C. et al. O Fenômeno Didático Institucional da Rigidez e a Atomização das Organizações Matemáticas Escolares. *Boletim de Educação Matemática*, 2014, 28. Disponível em: <<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291232906017>>. Acesso em: 4 nov. 2018.

MELLO, D.; WATANABE, G. R. *Vetores e uma Iniciação à Geometria Analítica*. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2011.

MIRANDA, D.; GRISI, R.; LODOVICI, S. *Geometria Analítica e Vetorial*. Santo André – SP: Universidade Federal do ABC, 2015. Disponível em: <<http://gradmat.ufabc.edu.br/disciplinas/listas/ga/notasdeaulas/geometriaanaliticaevetorial-SGD.pdf>>. Acesso em: 20 mar. 2018.

PASSOS, F. G. dos, et. al. *Análise dos Índices de Reprovações nas Disciplinas Cálculo I e Geometria Analítica nos Cursos de Engenharia da UNIVASF*. XXXV CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA – COBENGE 2007. Disponível em: <<http://www.abenge.org.br/cobenge/arquivos/12/artigos/199Fabiana%20dos%20Passos.pdf>>. Acesso em: 02 out. 2018.

RICHIT, A. *Projetos em Geometria Analítica usando software de Geometria Dinâmica*: repensando a formação inicial docente em matemática. 2005. 171f. Dissertação (Mestrado em ?) – Universidade Estadual de Rio Claro, SP, 2005.

SANTOS, A. T. C. dos. *O estado da Arte das pesquisas brasileiras sobre geometria analítica no período de 1991 a 2014*. 2016. 277f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática,

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC, São Paulo, 2016. Disponível em: <<https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/19047/3/Adriana%20Tiago%20Castro%20dos%20Santos.pdf>>. Acesso em: 02 mar. 2017.

SENA, R. M.; DORNELES, B. V. Ensino de Geometria: Rumos da Pesquisa (1991-2011). **Revemat**: Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v. 8, n. 1, p. 138-155, jul. 2013. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/26905>>. Acesso em: 02 mar. 2017.

SILVA, A. C. et al. *Análise dos Índices de Reprovação nas Disciplinas de Cálculo I e AVGA do Curso de Engenharia Elétrica do Instituto Federal da Bahia de Vitória da Conquista*. XIV INTERNATIONAL CONFERENCE ON ENGINEERING AND TECHNOLOGY EDUCATION. 2016, Salvador, Brasil. Disponível em: <<http://copec.eu/intertech2016/proc/works/55.pdf>>. Acesso em: 02 out. 2018.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Geometria Analítica*. 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

VENTURI, J. *Álgebra Vetorial e Geometria Analítica*. 10. ed. Curitiba: editora, 2015. Disponível em: <www.geometriaanaltica.com.br>. Acesso em: 20 mar. 2018.

VERRET, M. *Le temps des études*. Paris: Honoré Champion, 1975.

WINTERLE, P. *Vetores e Geometria Analítica*. 2. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2014.