ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i1p405-432

Os conceitos de perpendicularidade e de paralelismo mobilizados em uma atividade com o uso do báculo (1636) de Petrus Ramus

The concept of perpendicularity and parallelism mobilized in an activity with the use of the *baculum* (1636) of Petrus Ramus

ANA CAROLINA COSTA PEREIRA [1]

FUMIKAZU SAITO [2]

Resumo

Neste artigo apresentamos alguns resultados preliminares de uma atividade que envolveu o uso de um instrumento denominado "báculo", descrito por Petrus Ramus (1515-1572) em sua obra intitulada Via regia ad geometriam – The Way of Geometry, que fora traduzida para o inglês e publicada por William Bedwell (1561-1632) em 1636, em Londres. A proposta aqui delineada teve por objetivo construir uma interface entre história e ensino, valorizando condicionantes manipulativos, com vistas a elencar algumas potencialidades didáticas do báculo de Ramus. Para tanto, foi proposta uma atividade que buscou explorar algumas propriedades geométricas deste instrumento de modo a mapear um conjunto de ações implicado no processo de medição. A atividade, que foi realizada com um grupo de professores em formação inicial e continuada, revelou ações que fazem reconhecer e ressignificar conceitos matemáticos bem elementares, em particular, os de paralelismo e de perpendicularidade.

Palavras-Chave: *Báculo. Petrus Ramus. Ensino de geometria. História da matemática.*

Abstract

In this article we present some initial results of an activity that covered the use of an instrument called "baculum", published by Petrus Ramus (1515-1572) in his work titled Via regia ad geometriam – The Way of Geometry, which was translated into English and published by William Bedwell (1561-1632) in 1636, in London. The proposal here outlined had as an objective to build an interface between history and teaching, valuing manipulative conditions, aiming to list some of the didactic potentialities of the baculum of Ramus. In order to do so, it was proposed an activity that seeks to explore some geometric properties of this instrument in order to map a set of actions involved in the measurement process. The activity, which was carried out with a group of teachers in initial and continuous formation, revealed actions that make recognizing and re-meaning very simple mathematical concepts, in particular those of parallelism and perpendicularity.

Keywords: *Baculum. Petrus Ramus. Teaching geometry. History of mathematics.*

[1] Doutora em Educação pela UFRN, professora da Universidade Estadual do Ceará, carolina.pereira@uece.br.

[2] Doutor em História das Ciências pela PUCSP, professor do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUCSP e do Programa de Estudos Pós-Graduados em História da Ciência da PUCSP, fsaito@pucsp.br.

Introdução

Dentre as diversas formas de mobilizar conhecimentos matemáticos vinculados a educação básica, a história da matemática tem fornecido interessantes recursos que podem proporcionar a realização de atividades na interface entre história e ensino de matemática, conduzindo a um ensino contextualizado em consonância com as atuais tendências da educação matemática.[3]

Os resultados que aqui apresentamos estão ancorados numa proposta que visa aproximar duas áreas de conhecimento, a história da matemática e a educação matemática, com o propósito de construir interfaces entre história e ensino. Proposta essa que tem em vista propiciar a reflexão do processo histórico da formação do conceito matemático para elaborar ações (didáticas e/ou pedagógicas) e produtos que contribuam para o ensino de matemática.[4]

Nessa perspectiva, a incorporação de antigos instrumentos matemáticos na educação básica e na formação de professores afigura-se como uma alternativa interessante que ajuda a integrar aspectos teóricos e práticos da construção do conhecimento matemático, estreitamente relacionados à problemática intelectual de reorganização do saber. No ensino, esses aspectos práticos se desenvolvem a partir de situações que possibilitam criar modelos concretos, baseados em alguma teoria (didática ou matemática), ou por meio da aplicação do conhecimento matemático desenvolvido ao longo da história.

Dessa forma, esse artigo visa apresentar algumas discussões sobre os conhecimentos geométricos mobilizados em uma atividade envolvendo o uso de um instrumento denominado báculo, que foi descrito por Petrus Ramus (1515-1572). A atividade teve o intuito de mapear algumas potencialidades didáticas e/ou pedagógicas, que emergem do seu manuseio, a partir das ações que envolve o uso do báculo de Ramus. Cabe, entretanto, aqui observar que a atividade aqui proposta é um "piloto", e, portanto, consiste numa primeira tentativa de mapear as ações que ressignificam conceitos matemáticos bem elementares, utilizando antigos instrumentos matemáticos.

Para a atividade aqui desenvolvida, selecionamos excertos do tratado intitulado *Via regia ad geometriam – The Way of Geometry*, publicado em 1636, que trazem informações

[3]Há muitos estudos e propostas a esse respeito. Somente para listar alguns, vide, por exemplo: Fauvel e Van Maanen (2000); consulte também estudos de Brito (2007, 2016); D'Ambrosio (2013); Mendes (2009, 2012, 2013); Mendes; Fossa; Nápoles (2006); Miguel (1997); Miguel; Brito (1996); Miguel; Miorim (2005); Miguel et al. (2009); Pereira (2015); Santos, Muniz e Gaspar (2015); Pereira, Martins e Silva (2017); Saito e Pereira (2019); Batista (2018); e Silva (2018).

[4] A esse respeito, consulte estudos de Saito (2016); Saito e Dias (2013); Moraes (2017); Moraes e Dias (2017).

sobre a descrição das partes do instrumento e instruções de seu uso. Este tratado é a versão inglesa, traduzida por William Bedwell (1561–1632), da segunda parte da obra, dedicada à matemática, que fora publicada por Ramus em 1569 sob o título *Arithmeticae libri duo: geometriae septem et viginti*.

Este artigo encontra-se dividido em três partes. Na primeira, apresentamos o báculo de Ramus e alguns pressupostos que nortearam a elaboração da atividade. Na segunda, discorremos sobre o desenvolvimento da atividade, bem como descrevemos algumas das ações que consideramos interessantes. Na terceira, destacamos duas dessas ações que revelam, em conjunto com aquelas outras descritas na segunda parte, os conceitos geométricos mobilizados que foram ressignificados.

O báculo de Petrus Ramus

O báculo é um instrumento matemático que transitou por vários segmentos do saber e recebeu diferentes atributos ao longo dos séculos XV a XVII. Muitos praticantes e estudiosos de matemáticas, principalmente aqueles que se dedicavam à agrimensura, à arquitetura, à navegação e à astronomia, publicaram tratados a seu respeito. Cosimo Bartoli (1503-1572), por exemplo, o apresentou em seu tratado *Del modo di misurare* (1564); Leonard Digges (1515-1559), em *A boke named tectonicon* (1556); Egnatio Danti (1536-1586), em *Trattato del radio latino* (1586); Johann Miller Regiomontanus (1436-1476), em *Cometae magnitudine, longitudinecque, ac de loco eius vero Problemata XVI* (1531), e Petrus Ramus em seu tratado em 1569.[5]

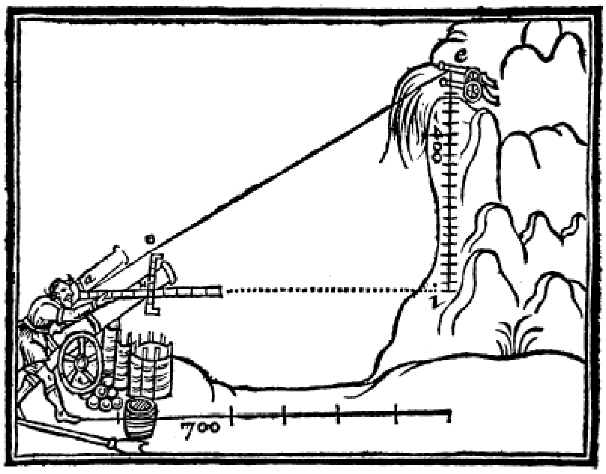
Não vamos aqui discorrer sobre a história deste instrumento, uma vez que já existem bons estudos a esse respeito.[6] Além disso, nosso objetivo neste artigo é apresentar e discutir alguns resultados de uma atividade, elaborada na interface entre história e ensino de matemática, que procurou valorizar condicionantes manipulativos que conduzissem os participantes a ressignificar alguns conceitos matemáticos bem elementares que são mobilizados no processo de medição.

O exemplar do báculo que aqui consideramos para a elaboração da atividade foi originalmente utilizado na agrimensura. Sua descrição e instruções sobre seu uso em diferentes situações foram descritas por Ramus no nono livro de *Via regia ad geometriam*. Este instrumento era comumente denominado, em língua inglesa por, “bastão do

[5] Vide estudos de Saito (2013, 2017), Castillo e Saito (2016); Castillo (2016); Beo (2015); Saito e Pereira (2019); Pereira e Saito (2018a); Pereira e Saito (2019).
[6] A esse respeito, consulte, por exemplo, estudos de Roche (1981) e Goldstein (2011).

topógrafo” (*cross-staff*) ou “do agrimensor”, e utilizado para obter medidas de distâncias (altura, comprimento, largura) inatingíveis, isto é, daquelas das quais não era necessário, ou se estava impedido de se aproximar (figura 1).

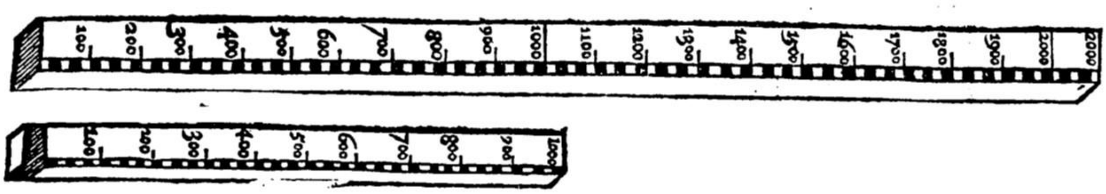
Figura 1 – O uso do báculo para se obter a medida de comprimento.



Fonte: Ramus (1636, p. 121).

Comparado a outros báculos, o de Ramus não é muito diferente. Ele é composto basicamente de duas hastes, uma maior e outra menor (figura 2), que são dispostos em forma de cruz.

Figura 2 – As duas hastes do báculo.

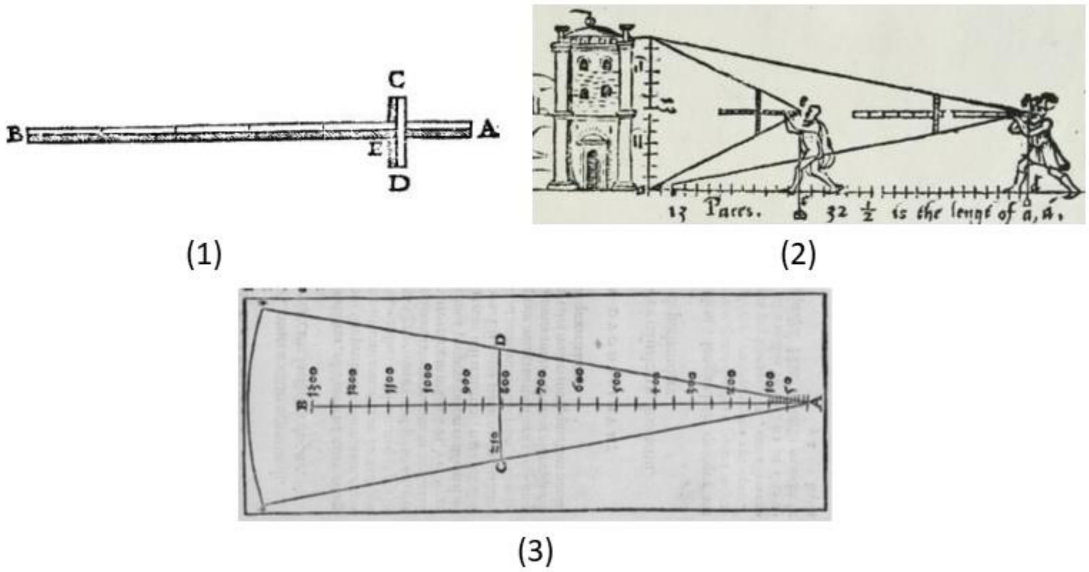


Fonte: Ramus (1636, p. 115).

A diferença deste instrumento em relação a outros, como aqueles descritos por Bartoli, Digges e Regiomontanus (figura 3), é a haste menor que, na versão apresentada por Ramus é móvel. A possibilidade de mover esta haste convenientemente para cima e para baixo é bastante útil para realizar medições e calcular a medida de distâncias e de alturas entre objetos, uma vez que mobiliza apenas propriedades de triângulos retângulos. Isso traz inovações em relação a sua possível utilização em sala de aula, visto que o báculo de

Ramus tem as duas hastes móveis, possibilitando discutir outros aspectos matemáticos além daqueles que foram publicados por Saito (2016) e seus colaboradores.

Figura 3 – Báculos de Bartoli, Digges e Regiomontanus.



Fonte: (1) Bartoli (1564, p. 10r), (2) Digges (1605, frontispício) e Schöner (1544, f. 35r).

Podemos dizer que este instrumento é simples em sua configuração material, porém muito rico no que diz respeito aos conhecimentos matemáticos nele incorporados. Tais conhecimentos, entretanto, não são revelados prontamente à primeira vista, uma vez que se requer que o instrumento seja manipulado para que os mesmos possam emergir. Isso porque, na interface entre história e ensino, consideramos que o báculo não é apenas um mero aparato que foi empregado para realizar medições em determinada época, mas é também um meio que propicia a veiculação de conhecimentos matemáticos que se encontram nele e que estavam presentes em determinada época.[7] Desse modo, como observa Saito (2018), a apreensão de diferentes conhecimentos incorporados no báculo tem em vista não só flagrar as "relações matemáticas implicadas nas partes de sua composição e no seu uso, mas também compreender por que razão cada uma dessas partes lá estão e é mobilizada ao utilizá-lo" (p. 924).

É por meio das diferentes ações orientadas para resolver um problema prático que as relações geométricas implícitas no báculo adquirem significado. Essas ações mobilizam diferentes conhecimentos matemáticos que, juntamente com outros de ordem prática,

[7] Vide estudos de Saito (2017), Saito e Dias (2013), Dias e Saito (2014), Castilho e Saito (2016).

proporciona uma compreensão maior dos conceitos matemáticos nele incorporados.[8] Desse modo, ao elaborarmos a atividade com o báculo, procuramos privilegiar os condicionantes manipulativos que pudessem promover ações que propiciassem ressignificar conceitos matemáticos que já se encontravam bastante sedimentados.

Essa proposta tem por pressuposto a ideia de que um instrumento revela elementos potencialmente didáticos e/ou pedagógicos na medida em que consideramos o seu processo de elaboração e utilização.[9] Foi a partir da análise contextualizada do tratado *Via regia ad geometriam*, que se refere à sua construção e ao seu uso, e do tratamento didático, que envolve diferentes ações, que desenvolvemos a atividade, aqui proposta, na interface entre história e ensino de matemática. Nesse particular, convém ainda observar que a proposta aqui delineada e desenvolvida privilegiou o processo e não o resultado da medição. Assim, a atividade proposta procurou valorizar a ação de medir e, por meio dela, identificar alguns elementos potencialmente didáticos e/ou pedagógicos. Para tanto, elaboramos uma situação-problema a partir de um dos casos de medição exposto por Ramus em seu tratado.

Desenvolvimento da Atividade

A situação-problema foi elaborada a partir de algumas questões de ordem matemática e epistemológica que emergiram de um estudo preliminar do nono livro de *Via regia ad geometriam.*[10] Este estudo, que consistiu inicialmente em reconstruir o báculo de Ramus, suscitou outras questões de ordem matemática que poderiam ser exploradas numa situação de medida, valorizando condicionantes manipulativos. Assim, procuramos desenvolver uma atividade que explorasse alguns aspectos do conhecimento matemático incorporado no báculo por meio de seu uso numa situação de medição.

Participaram da atividade doze participantes, dos quais oito lecionavam a disciplina Matemática e quatro estavam finalizando o curso de licenciatura Matemática. Todos participaram da atividade até o final, não havendo nenhuma desistência.

Dividimos a atividade em três etapas, que foram desenvolvidas em quatro encontros (organizados em forma de oficinas), de 16 a 19 de julho de 2018, no período matutino, com duração de aproximadamente cinco horas. Todos os encontros foram filmados e os

[8] A esse respeito, consulte: Saito e Dias (2013), Dias e Saito (2014).
9 Vide a esse respeito em Saito (2016, 2017), Castilho (2016).
[10] Pereira e Saito (2018b), Pereira e Saito (2019).

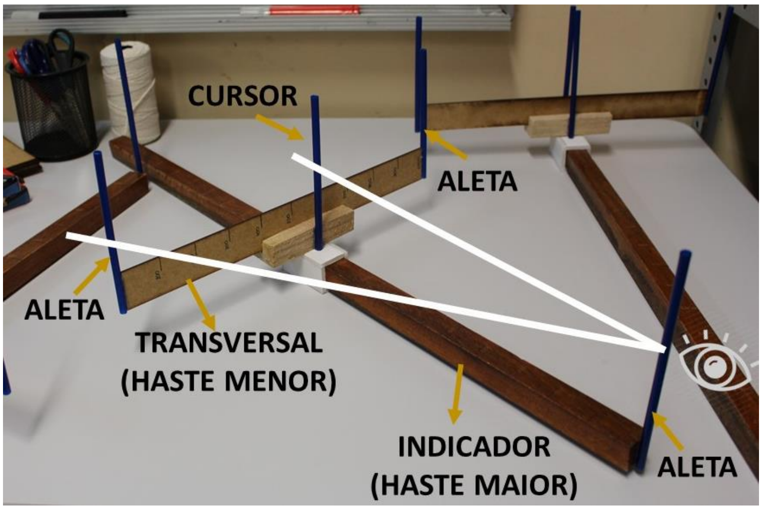
participantes entregaram, ao final de cada etapa um relatório, descrevendo suas impressões sobre o processo realizado e os ~~e~~ procedimentos executados.

Para a execução das três etapas da atividade, organizamos os participantes em trios. Cada trio recebeu um báculo e um material impresso contendo as instruções e excertos do texto de Ramus. Outros materiais como barbante, tesoura, fio de prumo, esquadros geométricos (45° e 60°) sem escalas, lápis, estavam dispostos em uma mesa para a necessidade dos participantes.

O primeiro encontro teve por objetivo contextualizar historicamente o báculo e o tratado *Via regia ad geometriam*. Para tanto, preparamos uma aula expositiva em que apresentamos o contexto histórico no qual se insere Ramus, bem como seu tratado e o instrumento no registro de conhecimentos ligados à geometria prática Quinhentista.

No segundo encontro realizamos a primeira etapa da atividade que tinha o intuito de estudar as partes do báculo a partir da leitura de sua descrição da construção fornecida por Ramus em seu tratado, de modo a reconhecer os conhecimentos matemáticos que foram mobilizados na sua elaboração. Para tanto, foi entregue a cada trio um báculo acompanhado de um pequeno texto, contendo excertos em que se encontra descrito o instrumento e suas partes. Distribuímos entre os trios, quatro báculos que foram previamente confeccionados, todos eles contendo as mesmas escalas, com o comprimento da haste maior medindo 63 cm e, a menor, 30cm (figura 4). As escalas nos instrumentos foram numeradas conforme a imagem fornecida por Ramus em seu tratado, tal como podemos observar na figura 4.

Figura 4 – Báculo utilizado nas atividades.



Fonte: Arquivo pessoal dos autores (2018).

Convém aqui observar que Ramus não fornece em seu tratado uma imagem completa do báculo. Ele apenas mostra a representação das escalas, dos tubos e do cursor, e o instrumento sendo utilizado em situações práticas de tal modo que o primeiro desafio foi compreender as suas partes e as razões pelas quais elas lá estão assim dispostas. Desse modo, tendo o instrumento em mãos, foi solicitado aos participantes que se familiarizassem com o instrumento de tal modo a compreender suas partes e seu funcionamento, acompanhando a descrição dada por Ramus (1636):

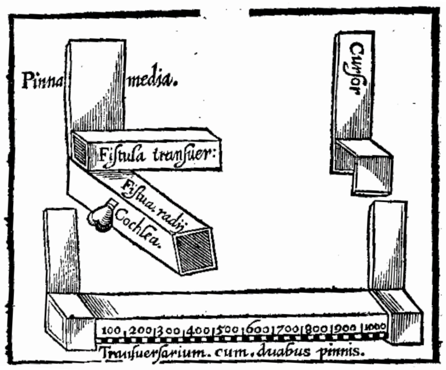
> **2. As hastes do bastão são o Indicador e a Transversal.**
> São duas as partes principais desse instrumento: o Indicador ou Bastão, que é a parte maior ou mais longa e a Transversal, que é a menor e a mais curta.
> **3. O Indicador é o dobro e um décimo da Transversal.**
> Ou seja, o [comprimento do] Indicador é o dobro [do] da transversal mais 1/10 de sua parte. Como aqui tu [podes] ver [na figura 1].
> **4. A Transversal é aquela [parte] que corre sobre o Indicador e [que] desliza para cima ou para baixo a seu gosto.**
> A Transversal deve ser movida sobre o Indicador, às vezes mais para o alto, às vezes, mais para baixo. A proporção [dos comprimentos] na definição e na construção das hastes do instrumento deve ser sempre considerada. Assim, por exemplo, se a Transversal tiver 10 partes, o Indicador deve ter 21 [partes]. Se [o Indicador] tiver 189, [a Transversal] terá 90, ou se [a Transversal] tiver 2000, [o Indicador] terá 4200. Como nem sequer se sabe quais sejam os números, então que esta seja a proporção [entre eles]. Além disso, quanto maior for o número [que está na escala], menores serão as divisões [das hastes], e melhor será para o uso. E como o Indicador deve sustentar a Transversal e está [ser sustentada por aquele], faça o Indicador mais grosso e a Transversal mais fina.
> Não há uma especificação de que matéria cada parte do bastão deva ser feita, se de latão ou de madeira. Mas [as hastes] devem ser firmes de modo que não se desgastem ou deformem [quando o instrumento for utilizado]. Contudo, a Transversal se moverá mais convenientemente, por si só, para cima e para baixo, em tubos de bronze e, sobre o Indicador, para o alto ou para baixo, em ângulo reto, tocando um ao outro de tal modo que a boca alternada de uma [das hastes] possa tocar o lado da outra [haste]. O terceiro tubo deve ser movido ou deslizado para cima e para baixo, de uma extremidade da Transversal para a outra, e, desse modo, pode ser chamado *Cursor*. O quarto e o quinto tubos, fixos e imóveis, são colocados nas extremidades da Transversal. [Esses tubos] são de igual altura ao terceiro e ao segundo [tubos] para a linha óptica[11] ser manuseada gentilmente quando for necessário, e, por assim dizer, com alguns pontos para defini-la na Transversal.
> Os três primeiros tubos podem, conforme a ocasião exigir, ser fixos ou presos com parafusos de bronze. Assim, com estes tubos, a Transversal pode ser feita tão grande quanto for necessário, como aqui tu vês [na figura].
> Até agora foi ensinado sobre a fabricação ou a maneira de fazer o instrumento, segue-se [agora] sobre o seu uso: para qual, em geral, é necessário: Primeiro, uma distância justa, pois a visão não é infinita.[12] Em segundo lugar, que um olho esteja fechado, pois a faculdade óptica transmitida por ambos os olhos em um [só olho] mira de modo mais certeiro; e o instrumento é mais apropriadamente aplicado e ajustado ao osso da bochecha do que em qualquer outro lugar [do rosto], pois aqui é como se o olho fosse o centro do círculo, em que a Traverssal está inscrita. Em terceiro lugar, as mãos devem estar firmes porque, se elas tremerem, a proporção da Geodésia[13] será certamente

[11] Por “linha óptica”, devemos entender a representação geométrica dos “raios visuais”.
[12] Por “visão”, devemos entender “raio visual”.
[13] Por “geodésia”, devemos entender a “medida de linhas retas”.

problemática e incerta. Por último, o lugar da posição [que deve estar o observador] é a do meio do pé (RAMUS, 1636, p. 115-117, tradução nossa).

Fornecemos também, junto com este texto, uma imagem (Figura 5) em que Ramus (1636) ilustra o cursor, os tubos e as aletas para que os participantes pudessem identificar no protótipo distribuído, suas partes.

Figura 5 – Cursores, tubos e aletas no tratado de Ramus (1636).



Fonte: Ramus (1636, p. 116).

No terceiro encontro, procedemos de forma similar ao segundo. Cada trio recebeu um báculo juntamente com um texto que, desta vez, fornecia instruções de como utilizá-lo para realizar uma medição. Este encontro, que corresponde à realização da segunda etapa da atividade, teve por objetivo mapear os conhecimentos matemáticos incorporado no instrumento. Como observa Saito (2014), cada parte do instrumento está lá por uma razão que só é entendida quando compreendemos como cada uma delas é mobilizada no processo de medição. Desse modo, solicitamos aos participantes que fizessem a leitura do texto para que compreendessem e reconhecessem os conhecimentos matemáticos mobilizados por Ramus para realizar a medição. Para tanto, fornecemos os seguintes excertos, correspondentes às seções 5, 6, 7 e 8, do tratado *Via regia ad geometriam*:

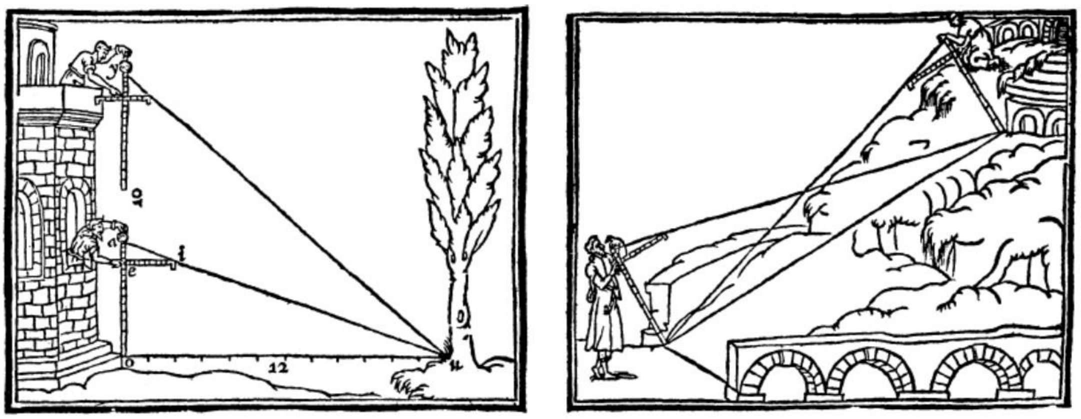
2. Se a visão passa do começo de uma haste, ela passa ao final da outra. E uma haste é perpendicular à grandeza a ser medida, [e] a outra [é a ela] paralela.
Essas coisas comuns e gerais são premissas, que a visão percorre do começo do Indicador até o final do transversal. Ou, ao contrário, do início da transversal até o final do Indicador. E que o Indicador é reto, isto é, perpendicular à linha a ser medida e, a transversal, [a ela] paralela. Ou, ao contrário. Nesse caso, a perpendicularidade do Indicador, em medidas de comprimentos, pode ser realizada por um prumo de chumbo pendurado. Mas em [medidas de] alturas e de larguras, deve-se fiar no olho, embora uma pequena variação do prumo não cause nenhum erro sensível. Perceba que, ao final da transversal, o que é

feito pela linha visual, esteja ela mais ao extremo, ou esteja o Cursor em qualquer outro lugar.
3. O comprimento e a Altura têm uma medida tripla. O primeiro e o segundo tipo de medida requerem apenas uma distância e esta admitindo uma extensão) de um deles para a terceira proporcional. O terceiro [tipo requer] duas distâncias, e tal é a extensão da largura.
A Geodésia das linhas retas é dupla: de uma distância, ou de duas. A Geodésia de uma distância é aquela em que o medidor, para encontrar a extensão desejada, não muda o lugar ou posição dele. A Geodésia de duas distâncias é aquela em que o medidor, por causa de algum impedimento situado no caminho entre ele e a grandeza a ser medida, é obrigado a mudar de lugar e obter uma dupla posição.
Observa aqui que o comprimento e a altura podem ser medidos em conjunto, ambos com uma e com dupla posição. Mas a largura não pode ser medida senão com duas [posições].
4. Se a visão, a partir do início do Indicador, estiver em ângulo reto ou a prumo com o comprimento e com o extremo do mesmo [comprimento], [então] assim como o segmento do Indicador está para o segmento da transversal, assim a altura do medidor está para o comprimento.
Seja, portanto, o segmento do Indicador a partir do topo; eu quero dizer até a transversal, 6 partes. O segmento da transversal, a saber, a partir do Indicador até a linha ótica 18 [partes]. O Indicador, que aqui é a altura do medidor, marca 4 pés. O comprimento, pela regra de três, será 12 pés. De acordo com a figura, visto que ***ae*** está para ***ei***, então ***ao*** está para ***ou,*** pela [sessão] 12 do [Livro] vii. Porque eles são triângulos semelhantes [e] porque ***aei*** e ***aou*** são ângulos retos: e aquilo que está em ***a*** é comum a ambos: Portanto, o restante é igual ao restante, pela [sessão] 4 do [Livro] vii.
A mesma maneira de medir deve ser usada de um lugar mais alto; como por ***y***. O segmento do Indicador tem 5 partes, o segmento da transvesal tem 6, e a é 10 pés; o mesmo comprimento encontrado será 12 pés.
Não importa de forma alguma se, [o que é medido], é o comprimento numa planície ou num baixo plano horizontal, ou numa subida ou descida de uma montanha, como decscrita na figura.
5. Se a visão, a partir do início do indicador, estiver paralela ao comprimento a ser medido, [então], assim como o segmento da transversal está para o segmento do indicador, assim a altura dada estará para o comprimento.
Se o segmento da Transversal tiver 120 partes, a altura dada, 400 pés [e] o segmento do Indicador, 210 partes: O comprimento, pela regra de três, será 700 pés. A figura é assim. [ver figura 2] E a demonstração é como a primeira, ou na verdade mais fácil, pois os triângulos são "equiangulares"[14], como antes. Portanto, como ***ou*** está para ***ua***, assim ***ei*** está para ***ia***.
Este é o primeiro e segundo tipo de medição de uma Longitude, por uma única distância ou posição. O terceiro, que é feito por uma dupla distância, segue agora. Aqui [neste caso], a transversal, se houver espaço suficiente para o medidor ir suficientemente para trás[15], deve ser colocado mais baixo, na segunda distância (RAMUS, 1636, p. 117-121).

Fornecemos também, juntamente com este texto, duas imagens (Figura 6), extraídas do documento original, para auxiliar na compreensão do funcionamento do instrumento.

[14] A ideia de "ângulos congruentes", aqui denominadas "equiângulares", entre o triângulo retângulo maior (formado pelo raio visual) e o triângulo retângulo menor (formado no instrumento entre a transversal e o indicador).
[15] Isto é, se o medidor tiver espaço suficiente para se afastar.

Figura 6 – Utilização do báculo expostas em Ramus (1636)



Fonte: Ramus (1636, p. 219)

Nas seções 5 e 6, Ramus orienta o leitor a respeito do posicionamento do observador, bem como da disposição do instrumento para se obter uma medida. Nas seções 7 e 8, ele fornece instruções para se obter a medida do comprimento de uma distância entre dois pontos no solo. Notemos aqui que essas situações se referem ao caso de encontrar a distância entre dois pontos no solo. Para tanto, Ramus (1636) instrui, a partir do triângulo retângulo formado pelo adequado posicionamento do báculo, buscar a medida desta distância por meio de semelhança entre triângulos retângulos.

Assim, uma vez compreendida a função de cada parte do instrumento, sua utilização e os procedimentos para a obtenção das medidas, propusemos uma situação problema que consistia em medir a altura de um objeto, utilizando os mesmos conhecimentos mobilizados para medir a distância entre dois pontos no solo.

Desse modo, no quarto encontro, propusemos aos participantes que medissem a altura de uma janela, utilizando os conhecimentos matemáticos mobilizados por Ramus em suas orientações. Para esta terceira etapa da atividade, os participantes deveriam expressar a altura da janela por meio do comprimento do barbante e depois, a sua medida, atribuindo-lhe um número. Este procedimento segue as orientações de Saito (2017) que busca promover a discussão e a reflexão sobre as noções de número, grandeza e medida. Assim, ao final da medição, os participantes compararam quanto sua medida era maior, menor, ou igual ao gabarito, e em seguida discutiram os resultados. A seguir, apresentamos com mais detalhes o desenvolvimento da proposta de atividade nesse quarto encontro, enfocando dois momentos observados: as condições básicas de medição e o cálculo da medida da altura da janela.

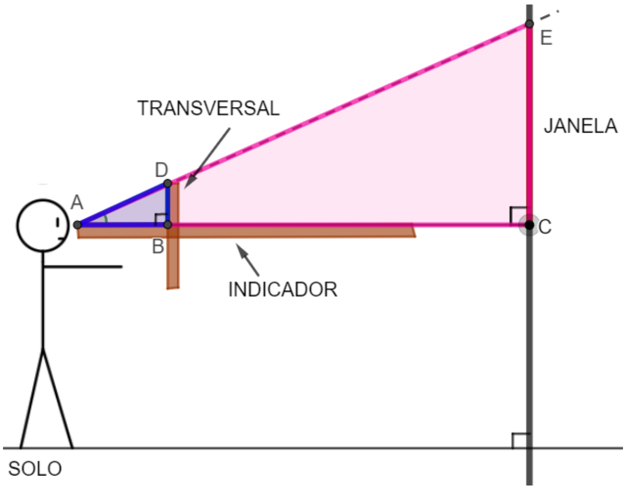
Depois de disponibilizar os textos e os materiais para efetuar a medição, observamos que cada trio designou, entre seus membros, papéis para desenvolver a atividade: (1) um era responsável pelo manejo do instrumento, (2) outro pela medição, e (3) o terceiro registrava os cálculos das medidas no caderno, como podemos notar na figura 7. Os participantes relataram que, diferentemente dos atuais instrumentos em que a medida é dada no instrumento, de tal forma que uma só pessoa seria suficiente para obtê-la, o báculo requisitava o auxílio de outras pessoas.

Figura 7 – Divisão de tarefas nos grupos.

Fonte: Arquivo pessoal dos autores (2018).

Em relação as condições básicas de medição, dois elementos são importantes e devem ser observados: a postura do medidor e o posicionamento do instrumento, tanto em relação à altura da janela, quanto ao observador. Como vimos anteriormente, as duas hastes do báculo (figura 4) são dispostas perpendicularmente. O indicador é a haste maior e fixa sobre a qual desliza a transversal (haste menor), que realiza dois movimentos, para frente e para trás, ao longo do indicador, e para cima e para baixo, de tal modo a propiciar a formação de um triângulo retângulo (figura 8). Dessa forma, o observador deve se posicionar em pé ou de joelhos, com uma postura "reta" e, com o olho de mira na haste da extremidade da haste do indicador, para abarcar as extremidades inferior e superior da janela (Figura 8). Esse conjunto de ações se torna necessário para garantir a formação de um triângulo retângulo.

Figura 8 – “Campo visual” na medição da janela.



Fonte: Elaborada pelos autores (2018).

Embora os participantes da atividade tenham compreendido pelas instruções que lhes foram fornecidas de que o instrumento deveria estar disposto dessa maneira, tiveram algumas dificuldades para posicionar o indicador da forma correta. Inicialmente todos os membros dos trios procuraram se posicionar em pé, conforme orientado no excerto do texto, entretanto, um trio preferiu ficar de joelhos, enquanto outro, decidiu apoiar o braço do observador sobre uma cadeira. Esses dois trios procederam desta maneira para manter o instrumento na posição correta de modo a manter-se em equilíbrio. Contudo, um dos trios acabou retomando a posição original, isto é, ficando de pé para a realizar a medição. Entendemos que essas ações foram decorrentes da necessidade de os trios se posicionaram de tal modo que o indicador ficasse perpendicular à parede e a visão abarcasse toda a altura da janela. Para abarcar a altura da janela, os participantes posicionaram o báculo verticalmente (isto é, posicionando a transversal na vertical) e procuraram se aproximar e se afastar da janela, movendo a transversal para cima e para baixo, bem como para a frente e a para trás do indicador.

Embora essas duas ações nos tivessem revelado que os trios tinham compreendido a razão pela qual a transversal no báculo era móvel, notamos, entretanto, que muitos participantes não estavam pensando matematicamente, mas apenas seguindo as instruções que foram dadas e, dessa maneira, não perceberam que essas condições, que deveriam ser satisfeitas, eram geométricas. Ou seja, não perceberam imediatamente que a posição da haste maior (o indicador) e a conveniente disposição da haste menor (transversal) tinha por objetivo situar o observador num lugar em que favorecesse a formação de um triângulo retângulo em que o olho do observador era o vértice e a janela o cateto oposto. Assim, embora a figura que fornecemos ilustrasse a formação desse triângulo, os participantes não compreenderam de imediato de que maneira o observador deveria se posicionar com o instrumento. Entretanto, na medida em que os participantes começaram a manusear e a posicionar o báculo de diferentes maneiras, aproximando-se e afastando-se da janela, todos começaram a notar que a disposição perpendicular das duas hastes tinha o propósito de colocar o observador na posição de medida. Isso é notório no registro de um dos trios que observou que: “ao realizar as medições, o indicador e a transversal juntos tem a função de estudar a razão e proporção de triângulos retângulos semelhantes” (TRIO 2, 2018).

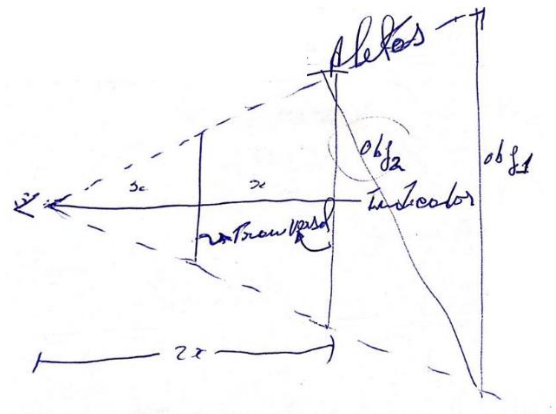
Notemos que a condição principal que aqui deve ser satisfeita é o posicionamento correto do indicador, que deve apontar perpendicularmente para a extremidade inferior da janela (ou seja, perpendicular à parede em que está a janela). Para tanto, basta apenas que o fio de prumo esteja paralelo à haste menor, isto é, a transversal. No entanto, outros trios, embora tivessem utilizado o fio de prumo para certificarem-se de que estavam posicionados corretamente, fizeram-no por razões equivocadas, como veremos mais adiante. Cabe aqui ainda observar que outros trios preferiram utilizar barbantes e esquadros para aferir o correto posicionamento correto do indicador.

Figura 9 – Triângulo retângulos formados com o instrumento

Fonte: Arquivo pessoal dos autores (TRIO 3, 2018).

Podemos aqui dizer que o manejo com o prumo foi um complicador nessa etapa da atividade, sendo necessário o auxílio da docente para dar instruções de como proceder com sua utilização. Mas, apesar das dificuldades, percebemos que a maioria deles, ao posicionar o indicador perpendicularmente à parede, conseguiu visualizar os triângulos retângulos (Figura 9) e apenas um trio não conseguiu realizar o procedimento, relatando que:

> Nós colocamos o objeto a ser medido nas extremidades da transversal [aletas], em que o cursor só servia para manter o plano, com isso encontramos triângulos semelhantes quaisquer (figura 7). Após alguns questionamentos, percebemos que bastava uma das extremidades da transversal e o cursor para 'encaixar' o objeto, encontrando triângulos retângulos semelhantes. Foi um erro de interpretação nossa do documento.



(TRIO 4, 2018).

Notemos que, neste caso, os participantes não compreenderam por que razão a transversal se movia para cima e para baixo e, desse modo, a posicionaram fixada no seu centro e procuraram abarcar as exterminadas superior e inferior da janela, obtendo, assim, um triângulo isósceles, que poderiam ser decompostos em dois triângulos retângulos. Mas esse trio logo corrigiu a sua posição, visto que percebeu que o triângulo retângulo desejado deveria ser obtido de tal modo a posicionar o indicador perpendicularmente à janela na sua extremidade inferior, abarcando a sua altura por meio do posicionamento conveniente da transversal (Figura 8).

Uma vez satisfeitas essas condições, os participantes se mobilizaram para calcular a medida da altura da janela. Para tanto, logo notaram que para obtê-la era necessário conhecer a distância entre o observador e a janela. Para encontrar essa distância, todos estenderam um barbante entre o "pé da parede" e o "pé do observador", uma vez que a medição foi realizada num plano horizontal, sem desnível.

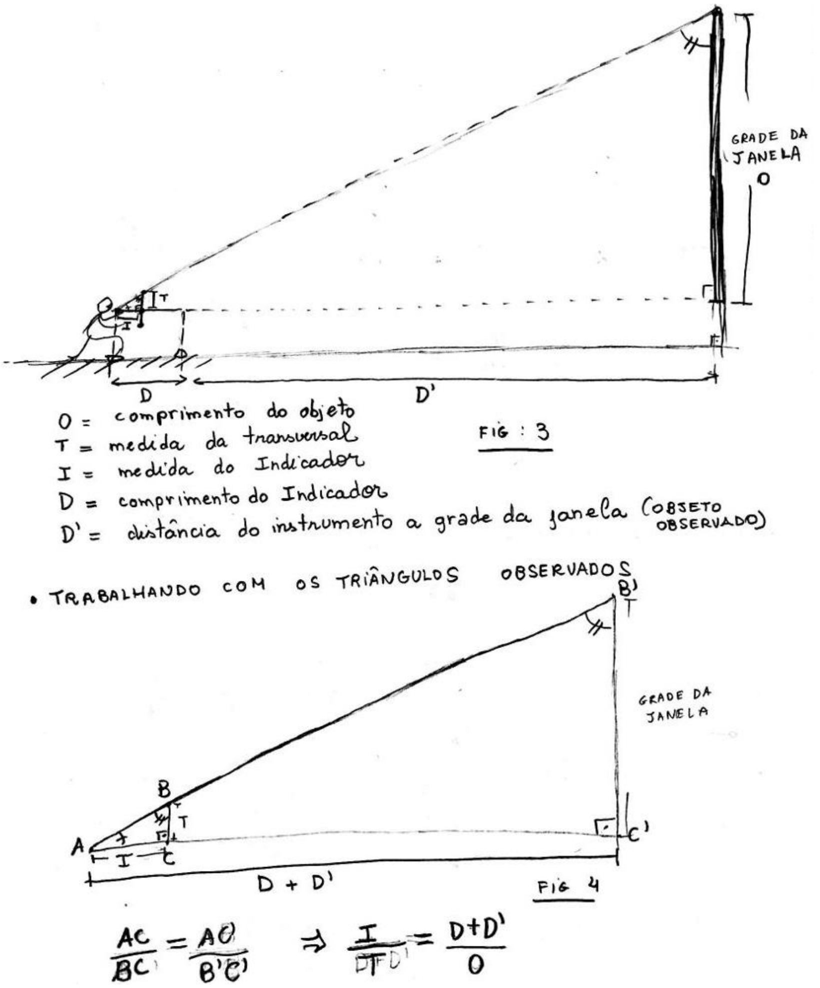
O comprimento do barbante deveria ser expresso numericamente por meio da unidade de medida do instrumento. E, para tanto, foi necessário retomar o instrumento e encontrar nele a unidade de medida que, como vimos anteriormente, corresponde ao comprimento da transversal. Com exceção de um dos trios, todos expressaram a medida desta distância corretamente. Um único trio, entretanto, utilizou o indicador como unidade de medida ao invés da transversal (Figura 10), e quando indagado sobre tal escolha responderam da seguinte forma: “devido o indicador ser maior que a transversal, assim, diminui nosso trabalho quando formos contar quantas partes tem o barbante” (TRIO 4, 2018). Cabe aqui observar que este trio não se deu conta de que o comprimento do indicador era o dobro e mais um décimo do da transversal. Assim, quando questionado a esse respeito, corrigiu o valor do comprimento da distância entre a parede e o pé do observador.

Figura 10 – Indicador usado como unidade de medida.

Fonte: Arquivo dos autores (TRIO 4, 2018).

Obtidos, assim, o comprimento da distância entre o observador e a janela, os participantes recorreram ao lápis e ao papel para calcular a medida da altura da janela (Figura 11).

Figura 11 – Representação “matemática” da medição da janela do Trio 3.



Fonte: Arquivo dos autores (TRIO 3, 2018).

Dessa forma, o Trio 3 (2018) observou que os triângulos ΔABC e ΔAB’C’ (figura 11) são semelhantes e relatou que

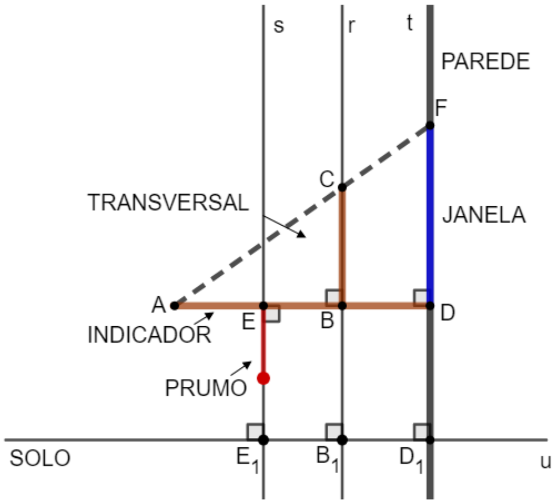
> (...) podemos achar a razão das medidas e encontrar o valor procurado (no caso o tamanho da janela). E pelo teorema: dados dois triângulos, ΔABC e ΔAB’C’ da figura, se Â é comum aos dois triângulos e $\widehat{B} = \widehat{B'}$ os triângulos são semelhantes, logo vale a relação: $\frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}}$. Daí, recorre outras relações: $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{B'C'}}$ (TRIO 3, 2018).

Ao final da atividade, cada trio comparou seus resultados com outros trios, estabelecendo um rico diálogo sobre o valor das medidas. Essa discussão levou em consideração não só o resultado, mas também outras questões de ordem matemática que permearam todo o processo de medição, das quais destacaremos algumas delas a seguir.

Discussões dos Resultados

Durante a execução dos procedimentos para se obter a medida da altura da janela, notamos uma série de ações que ressignificaram algumas noções geométricas bem elementares. Vamos aqui nos referir apenas a duas delas. Uma dessas noções foi a de perpendicularidade e a outra a de paralelismo entre retas. Vale aqui lembrar que, para se obter a medida da altura da janela por meio deste báculo, o indicador deve estar orientado perpendicularmente à parede (Figura 12).

Figura 12 - visão geométrica lateral do báculo.

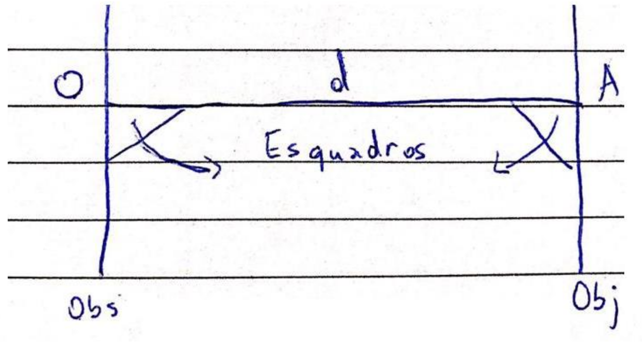


Fonte: Elaborado pelos autores (2018).

Observando a Figura 12, que nos dá um esquema visual dos conhecimentos geométricos mobilizados para realizar a medida da altura da janela, o fio de prumo encontra-se posicionado paralelamente à transversal e à parede e, dessa maneira, é perpendicular ao indicador. Como a parede é perpendicular ao solo, logo, toda reta paralela a ela também será. Dessa forma, as retas r, s e t são paralelas entre si e perpendiculares em relação ao solo.

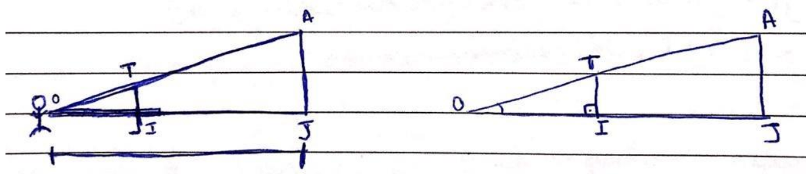
Para assegurar que o indicador estivesse perpendicular em relação à parede os participantes recorreram a duas diferentes estratégias. Um dos trios utilizou esquadro (figura 13) e os outros, o fio de prumo (figura 7).

Figura 13 – Esboço da utilização do esquadro.



Fonte: Arquivo dos autores (TRIO 4, 2018).

Podemos dizer que, ao recorrer a essas duas estratégias, os participantes ressignificam o conceito de perpendicularidade, uma vez que compreendem a razão pela qual o indicador deve estar posicionado perpendicularmente à parede, dando, assim, significado ao conceito no processo de medição. Mas esse mesmo significado foi dado a partir de outro conceito, revelando um movimento do pensamento na apropriação do conceito de perpendicular.[16] Ou seja, embora todos os participantes soubessem que o indicador deveria estar orientado perpendicularmente à parede em que estava a janela, se preocuparam em verificar se o indicador estava paralelo ao chão. Desse modo, alguns trios não utilizaram o fio de prumo para se certificarem de que o indicador se encontrava perpendicular à parede, mas para verificar se estava paralelo ao chão. Isso é notório no relato de um dos trios que observou que: “usamos o fio de prumo para garantir que o instrumento estivesse paralelo com o chão, ou seja, perpendicular à janela (altura a ser medida)” (TRIO 3, 2018). Esse trio ainda relatou que:

> Para garantir que $\overline{TI}$ seja perpendicular a $\overline{OJ}$, utilizamos o fio de prumo que garante que o báculo está paralelo ao chão ($\overline{OJ}$). Assim, pelo postulado das paralelas, quando duas retas são paralelas ($\overline{OI}//\overline{OJ}$) e uma transversal intercepta as duas, essa transversal é perpendicular a ambas ($\overline{TI}\perp\overline{OI}$ e $\overline{TI}\perp\overline{OJ}$).
>
> 
>
>
> (TRIO 3, 2018).

O trio que utilizou o esquadro também procedeu similarmente. Para garantir que o indicador estivesse perpendicular à parede, os participantes desse trio estenderam um

[16] Sobre o movimento do pensamento, consulte Saito e Dias (2011, 2013); vide também Kopnin (1978).

barbante (distância *d*) e orientaram o indicador para a parede utilizando esquadros (Figura 13).

Podemos aqui dizer que essas ações indicam que os participantes compreendem que se uma das retas, entre duas retas paralelas, é perpendicular a uma terceira, esta será perpendicular à outra. Em outros termos, a noção de perpendicularidade parece que aqui foi compreendida a partir do conceito de paralelismo de retas. Isso provavelmente ocorreu porque a relação entre esses dois conceitos é bem elementar e familiar a todos eles, uma vez que tal relação é comum em qualquer livro-texto ou material didático. E aqui percebemos que essa mesma situação pode desencadear outras questões que são potencialmente didáticas para reforçar a relação entre esses mesmos dois conceitos. Com efeito, numa situação concreta como a que propusemos, em nenhum momento, os participantes questionaram que estavam a medir numa condição muito particular, isto é, em que o nível do solo era perpendicular à parede. Embora tenhamos fornecido uma imagem em que é ilustrada uma situação em que a medida é realizada num solo em declive (figura 6), nenhum dos participantes percebeu, e sequer questionou, que o indicador estava paralelo ao solo em decorrência de ele estar orientado perpendicularmente à parede. Isso sugere que conceitos matemáticos bem elementares são apenas mobilizados e compreensíveis quando utilizados de forma abstrata no papel e perdem significado quando transportados para uma situação física concreta e prática.

Em outros termos, aqueles conhecimentos matemáticos que são mobilizados de forma gráfica, em que é utilizada uma linguagem simbólica, mediada por representações e sinais (que pressupõem uma sintaxe que é independente daquela que é dada pelos movimentos físicos, ostensivos e transitórios), se perdem no processo em que requer que esses mesmos conhecimentos abstratos e conceituais sejam mobilizados numa situação prática de medida em que o instrumento é utilizado. E é precisamente neste aspecto, como observa Castillo e Saito (2016), em que os participantes não percebem, à primeira vista, que, embora qualquer situação possa ser resolvida graficamente numa folha de papel, aplicando conhecimentos geométricos bem elementares, essa mesma situação, entretanto, requisita ampliar o significado dos conceitos mobilizados para resolvê-la de forma concreta, manuseando o instrumento.[17]

[17] Vide também a esse respeito em Bussi (2000).

Assim, no que diz respeito aos conceitos de paralelismo e perpendicularidade, a atividade agregou significados e ampliou os conhecimentos dos participantes. Um dos trios mencionou que a atividade foi interessante porque ela possibilita:

> (...) você ver o que é o paralelismo e a perpendicularidade em situações práticas, além do plano construído no papel. E vê que historicamente o uso desse conceito já era implicitamente utilizado e por razões totalmente práticas, e **ainda articulando com as peças do instrumento** (TRIO 3, 2018, grifo nosso).

Ou seja, ao reconhecerem a perpendicular e a paralela, e a mobilizarem para resolver uma situação concreta, os participantes compreenderam as funções das partes do instrumento e a razão pela qual as duas hastes encontram-se dispostas perpendicularmente. Perceberam que as peças do báculo estão ali para serem mobilizadas de tal forma a satisfazer as condições geométricas necessárias para que a medição possa ser realizada a contento, não de forma gráfica, mas física e concretamente. Isso é notório também no relato de outro trio que observou que:

> (...) no momento em que vimos disponíveis para os grupos o fio de prumo e o esquadro, pensamos que eles poderiam nos ajudar em algo, mas no primeiro momento não sabíamos para que. Foi no processo medição que ficou claro a necessidade de utilização deles, pois passamos a usá-los como forma de verificar se tal reta estava realmente paralela a soalha ou perpendicular à parede, para que o processo de medição obtivesse êxito. Desta forma, **saindo um pouco do conceito abstrato que é ensinado na Educação Básica** (TRIO 2, 2018, grifo nosso).

Nesse relato, o trio percebeu que a solução de um problema de ordem prática implica em considerar outras questões de ordem material e física. Assim, podemos dizer que, esses dois relatos anteriores parecem revelar que os participantes, ao se engajarem numa situação prática de medição, valorizaram os condicionantes manipulativos que conduzem a compreender conhecimentos geométricos que se encontravam bem sedimentados, como podemos observar no seguinte relato:

> O curso mostrou na prática como utilizar os conhecimentos de perpendicularidade e paralelismo. Por exemplo, para garantir as medições com os instrumentos, precisávamos provar que o báculo estava paralelo ao chão. Também foi necessário recordar o postulado das paralelas e utilizá-lo para provar essas medições. Além disso, pudemos perceber que durante o curso, utilizamos esses saberes sem pensar nas definições e proposições que havíamos aprendido anteriormente. Ao manusear o báculo, acreditávamos que ele estava paralelo ao chão, mas não nos preocupávamos em provar isso, o que modificava e variava os resultados das medições. Apenas após a verificação com os conhecimentos sobre paralelismos e perpendicularidade, chegamos à um resultado bastante aproximado da medição correta (TRIO 2, 2018).

Ao mobilizarem os conceitos de perpendicular e de paralelismo entre retas para resolver uma situação concreta de medição, os participantes ampliaram seus significados, uma vez que atribuíram a ele uma finalidade prática. Ao perceberem que, embora na folha de papel seja fácil visualizar e traçar os triângulos retângulos, as condições físicas muitas vezes impedem de realizar aquilo que, do ponto de vista conceitual e abstrato, parece bem elementar e fácil. Desse modo, os participantes parecem ter compreendido não só os conhecimentos que se encontram incorporados no instrumento, como também a sua relação com os procedimentos de medição, dissolvendo a ideia muito disseminada de que a obtenção de uma medida nada mais é do que aplicação de conceitos matemáticos abstratos. Por outras palavras, passaram a compreender que o instrumento não é uma peça materializada de conhecimento matemático.[18] Nesse sentido, a dificuldade de se posicionar, de orientar o indicador perpendicularmente, de compreender que a relação entre a perpendicularidade e o paralelismo dependem das condições físicas e materiais para que a medição possa ser executada a contento ampliaram o significado desses dois conceitos e de sua relação. Isso pode ser visualizado no relato do Trio 3 (2018):

> (...) percebemos no instrumento a reprodução dos conceitos relativos ao paralelismo e a perpendicularidade ao analisar a construção, os componentes do báculo e a forma como eles estavam relacionados entre si. Na utilização do instrumento, surgiu a dificuldade de garantir a perpendicularidade e o paralelismo entre o objeto em medição e o báculo, para assegurar estas características seria necessário que ambos estivesse em um único plano, este só sendo garantido quando utilizamos o esquadro e/ou o prumo. Portanto, modificaram a percepção da forma como a aplicação destes princípios eram realizados na prática e como eles são omitidos nos livros didáticos atuais.

Nesse relato, percebemos que os participantes relacionaram dois conceitos (a perpendicularidade e o paralelismo), buscando relacioná-los por meio de outros recursos (o fio de prumo e o esquadro). Esse procedimento, isto é, "de garantir a perpendicularidade e o paralelismo", amplia a compreensão do significado desses dois conceitos na medida em que, nas condições de medição concretas e física dadas, os participantes perceberam que o indicador é perpendicular à parede e paralela ao nível do chão porque o nível do chão é perpendicular à parede. E que numa situação em que o nível do chão é perpendicular à parede, o fio de prumo e o esquadro seriam os únicos recursos que poderiam ser utilizados para garantir as condições de medição numa situação concreta e física.

[18] A esse respeito, consulte: Saito (2009, 2011, 2014).

Considerações Finais

Na atividade proposta, percebemos que os participantes tiveram em diferentes momentos dificuldades em mobilizar o conhecimento necessário para resolver situações bem concretas. O uso do fio de prumo, do esquadro e de outros recursos para realizarem a medição revela que todos eles têm conhecimentos de conceitos geométricos bem estabelecidos. Contudo, grande parte dos participantes não questionam, nem compreendem por que razão tais conceitos são mobilizados na situação de medição.

Embora as noções de perpendicularidade e de paralelismo, por exemplo, façam parte do repertório de conhecimentos dos participantes, não são compreendidas em termos práticos, mas apenas em sua feição abstrata, garantida por uma definição. Nesse sentido, o uso do fio de prumo e do esquadro, por exemplo, esteve condicionado à ideia de que este recurso garante que as retas, que formam os catetos do triângulo retângulo, são perpendiculares, visto que formam entre elas um ângulo reto. Porém, os participantes não parecem compreender que a relação geométrica assim encontrada é resultado de uma ação e não de simples aferição.

Dentre os conhecimentos que foram mobilizados pelos participantes direcionado ao manuseio do báculo, proposto na atividade, percebemos que, ao utilizar o fio de prumo como um instrumento que "garante a perpendicularidade", eles estão reelaborando esses mesmos conhecimentos, agregando a eles novos significados além daqueles aprendidos no cotidiano escolar. A ressignificação desses conhecimentos, propiciada por um conjunto de ações, amplia o significado do conceito e possibilita repensar o paralelismo e a perpendicularidade entre retas de forma conectada, rompendo as barreiras de um saber que se constrói apenas na relação entre figuras geométricas bidimensionais (isto é, aquelas em que é esquematizada em folha de papel).

Cabe, entretanto, futuramente, aprofundar outras questões de ordem prática. Notamos durante o desenvolvimento da atividade que os participantes perdem sua orientação espacial e não percebem que eles próprios fazem parte da própria medição. Acostumados a resolver situações de medição por meio de figuras geométricas, muitos participantes perdem de vista a ação de medir e, nesse contexto, não percebem se estão construindo conhecimento ou meramente aplicando-o a uma situação concreta. Esta reflexão e outros aspectos que, em última instância implica em discutirmos as fontes do conhecimento matemático, emergem no processo do saber-fazer matemático.

Além disso, a partir das conclusões aqui obtidas, mesmo que parciais, podemos refletir e direcionar nossas iniciativas para a construção de interfaces entre história e ensino de matemática, considerando outros conhecimentos que ainda podem ser estudados por meio da manipulação do báculo de Ramus (1636). O propósito, futuramente, é voltarmos nossa atenção para a elaboração de atividades orientadas para o ensino e refletir sobre os processos de ensino e de aprendizagem de matemática.

Referências

BARTOLI, C. *Cosimo Bartoli gentil'huomo, et accademico fiorentino, del modo di misurare le distantie, le superficie, i corpi, le piante, le province, le prospettive*. Venetia: Francesco Franceschi Sanese, 1564.

BATISTA, A. N. de S. *Um estudo sobre os conhecimentos matemáticos incorporados e mobilizados na construção e no uso da balhestilha, inserida no documento Chronographia, Reportorio dos Tempos..., aplicado na formação de professores.* 2018. 114 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2018.

BEO, N. D. *O estudo do Trattato del Radio Latino: possíveis contribuições para a articulação entre História da Matemática e Ensino*. 2015. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.

BRITO, A. J. Uma abordagem alternativa para o ensino de logaritmos: relações com PA e PG. In: BELTRAN, M. H. R.; SAITO, F.; TRINDADE, L. S. P. (Org.). *História da ciência*: tópicos atuais 4. São Paulo: Livraria da Física, 2016. p. 11-32.

_____. História da matemática e a da educação matemática na formação de professores. *Educação Matemática em Revista*, v. 22, p. 11-15, 2007.

BUSSI, M. G. B. Ancient instruments in the modern classroom. In: FAUVEL, J.; VAN MAANEN J. (eds.). *History in mathematics education*: an ICMI study. Dordrecht: Kluwer, 2000. p. 343-350.

CASTILLO, A. R. M. *Um estudo sobre os conhecimentos matemáticos incorporados e mobilizados na construção e no uso do báculo (*cross-staff*) em* A Boke Named Tectonicon *de Leonard Digges*. 2016. Tese (Doutorado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

CASTILLO, A. R. M.; SAITO, F. Algumas considerações sobre o uso do báculo (*baculum*) na elaboração de atividades que articulam história e ensino de matemática. In: Flores Salazar, J.; UGARTE GUERRA, F. (eds.). *Investigaciones en Educación Matemática*. Lima: Fondo Editorial PUCP, 2016. p. 237-251.

D'AMBROSIO, U. Por que e como ensinar história da matemática. *REMATEC*, v. 12, p. 7-21, 2013.

DANTI, E**.** *Trattato del radio latino: istrumento giustissimo & facile più d'ogni altro per prendere qual si voglia misura, & positione di luogo, tanto in cielo como in terra: il quale, oltre alle operationi proprie sue, fà anco tutte quelle della gran Regola di C. Tolomeo, & del antico Radio Astronomico*... Roma: Marc'Antonio Moretti & Iacomo Brianzi, 1586.

DIAS, M. S.; SAITO, F. Interface entre história da matemática e ensino: uma aproximação entre historiografia e perspectiva lógico-histórica. In: IV SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, *Anais*...**,** 2009, Brasília, SBEM. p. G05.

DIAS, M. S.; SAITO, F. Algumas potencialidades didáticas do "setor trigonal" na interface entre história e ensino de matemática. *Educação Matemática Pesquisa, v.* 16, n. 4, pp. 1227-1253, 2014.

DIGGES, L. *A boke named tectonicon: briefelye shewynge the exacte, and speady reckenynge all manner lande, squared tymber, stone, steaples, pyllers, globes, etc...* London: Iohn Daye for Thomas Gemini, 1556.

DUARTE, N. *A Relação entre o lógico e o histórico no ensino da matemática elementar*. 1987. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 1987.

FAUVEL, J.; VAN MAANEN J. (eds.). *History in mathematics education*: an ICMI study. Dordrecht: Kluwer, 2000.

GIARDINETTO, J. R. B. A relação entre o lógico e o histórico: categoria subsidiadora da investigação histórica para elaboração de procedimentos de ensino da matemática. In: HPM HISTÓRIA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1996, Braga, *Actas*..., 1996. v. II. p. 265-268.

GOLDSTEIN, B. R. Levi ben Gerson and the Cross Staff Revisited. *Aleph*, v. 11, n. 2, pp. 365-383, 2011.

KOPNIN, P. V. *A dialética como lógica e teoria do conhecimento*. Rio de Janeiro: Ed. Civilização Brasileira, 1978.

MENDES, I. A. História no ensino da matemática: trajetórias de uma epistemologia didática**.** *REMATEC*, v. 12, p. 66-85, 2013.

______. *Investigação histórica no ensino da matemática*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

______. Tendências da pesquisa em história da matemática no Brasil: a propósito das dissertações e teses (1990-2010). *Educação Matemática Pesquisa*, v. 14, n. 3, p. 465-480, 2012.

MENDES, I. A.; FOSSA, J. A.; NÁPOLES, J. E. *A história como um agente de cognição na educação matemática.* Porto Alegre: Sulinas, 2006.

MIGUEL, A. As potencialidades da história da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. *Zetekiké,* v. 5, n. 8, p. 73-105, 1997.

MIGUEL, A.; BRITO, A. J. A história da matemática na formação do professor de matemática. *Caderno Cedes*, v. 40, p. 47-61, 1996.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. *História na educação matemática*: propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

MIGUEL, A. et. al. *História da matemática em atividades didáticas*. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

MORAES, M. de S. *Setor trigonal*: Contribuições de uma atividade didática na formação de conceitos matemáticos na interface entre história e ensino de matemática. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional) – UNESP, Bauru, 2017.

_____.; DIAS, M. S. *Contribuições para o ensino de triângulos com o uso do tratado The Trigonal Sector e o instrumento setor trigonal*. Bauru: UNESP, 2017.

PEREIRA, A. C. C. *Aspectos históricos da régua de cálculo para construção de conceitos matemáticos*. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

PEREIRA, A. C. C.; MARTINS, E. B.; SILVA, I. C. da. *Evolução histórica da multiplicação do século X ao XVI:* Construindo interfaces para o ensino. Belém: SBEM/SBEM-PA, 2017 (Col. Educação Matemática na Amazônia, n. 5).

PEREIRA, A. C. C.; SAITO, F. A reconstrução do báculo de Petrus Ramus na interface entre história e ensino de matemática. *Revista Cocar*, v. 13, n. 25, pp. 342-372, 2019.

_____. Algumas breves considerações sobre o *Radius Astronomicus* na interface entre história e ensino de matemática In: SOUSA, A. C. G. de; SANTANA, L. E. de L.; BARRETO, M. C. (orgs.). *As múltiplas linguagens da educação matemática na formação e nas práticas docentes*. Fortaleza : EDUECE, 2018a; v.1, p. 699-714.

_____. A organização do saber geométrico em *Via Regia ad Geometriam* (1636) de Petrus Ramus: uma reflexão sobre a definição de ângulo reto e de perpendicular. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura*, v. 13, n. 27, p.24-38, 2018b.

RAMUS, P. *Arithmeticae libri duo***:** geometriae septem et vinti. Francofurti: Andreae Wecheli Heredes, Claudium Marninum & Ioannem Aubrium, 1599.

_____. *Via Regia ad Geometriam***:** The way to geometry. London: Thomas Cotes, 1636.

REGIOMUNTANUS, J. M. *Cometae magnitudine, longitudinecque, ac de loco eius vero Problemata XVI.* Nürnberg: Fridericum Peypus, 1531.

ROCHE, J. J. The Radius Astronomicus in England. *Annals of Science*, v. 38, pp. 1-32, 1981.

RODRIGUES NETO, G. Euclides e a geometria do raio visual. *Sci. stud.*, v. 11, n. 4, p. 873-892, 2013.

SAITO, F. Algumas considerações historiográficas para a história dos instrumentos e aparatos científicos: o telescópio na magia natural. In: ALFONSO-GOLDFARB, A. M. et al. (eds.). *Centenário Simão Mathias*: documentos, métodos e identidade da história da ciência (seleção de trabalhos). São Paulo: PUCSP, 2009. p. 103-122.

_____. *O telescópio na magia natural de Giambattista della Porta*. São Paulo: Ed. Livraria da Física/Educ/FAPESP, 2011.

_____. Instrumentos e o "saber-fazer" matemático no século XVI. *Revista Tecnologia e Sociedade*, v. 9, n. 18, pp. 101-112, 2013.

_____. Instrumentos matemáticos dos séculos XVI e XVII na articulação entre história, ensino e aprendizagem de matemática. *REMATEC*. v. 9, n. 16, pp. 25-47, 2014.

_____. História e Ensino de Matemática: Construindo Interfaces. IN: FLORES SALAZAR, J.; UGARTE GUERRA, F. (eds.). *Investigaciones en Educación Matemática*. Lima: PUCP, 2016. p. 253-291.

_____. Número e grandeza: discutindo sobre a noção de medida por meio de um instrumento matemático do século XVI. *Ciência & Educação*, v. 23, n. 4, pp. 917-940, 2017.

SAITO, F.; DIAS, M. S. *Articulação de entes matemáticos na construção e utilização de instrumento de medida do século XVI*. Natal: Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2011.

_____. Interface entre história da matemática e ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. *Ciência & Educação*, v. 19, n. 1, p.89-111, 2013.

SAITO, F.; PEREIRA, A. C. C. *A elaboração de atividades com um antigo instrumento matemático na interface entre história e ensino.* Fortaleza: SBHMat, 2019 (no prelo).

SANTOS, E. S. C. dos; MUNIZ, C. A.; GASPAR, M .T. J. *A construção do conceito de área a partir de atividades fundamentas na história da Matemática***.** São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2015.

SCHÖNER, Johannes. *Scripta Clarissimi Mathematici.* M. Ioannis Regiomontani, De Torqueto, Astrolabio armillari, Regula magna Ptolemaica, Baculoque Astronomico, Obseruationibus Cometarum, aucta necessarijs, Ioannis Schoneri Carolostadij additionibus; Item. Obseruationes motuum Solis, ac Stellarum tam fixarum, quam erraticarum; Libellus M. Georgii Purbachii de Quadrato Geometrico. Nürnberg: Johann Montanus & Ulrich Neuber 1544.

SILVA, I. C. da. *Um estudo da incorporação de textos originais para a educação matemática: buscando critérios na articulação entre história e ensino.* 2018. 93 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e

Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2018.

Texto recebido: 05/02/2019
Texto aprovado: 18/03/2019