

## **Ações do professor para promover discussões matemáticas produtivas em um contexto de modelagem e criptografia**

**Teacher's actions to promote productive mathematical discussions in a context of modeling and cryptography**

---

ANGELINA ALVARADO MONROY <sup>1</sup>

MARÍA DEL CARMEN OLVERA MARTÍNEZ <sup>2</sup>

### **Resumo**

*Considera-se a importância do desenho de uma sequência didática e o papel do professor como unidade para a construção do conhecimento de forma colaborativa. O objetivo é analisar e documentar as ações do professor para incentivar os alunos a construir, desenvolver e testar seus modelos matemáticos em atividades que envolvem proteção de informações. Essas atividades foram implementadas em um grupo de ensino médio, as produções foram analisadas e o processo seguido pelos alunos e as ações do professor foram descritas para promover a construção e refinamento da noção de conceito de função. Nas atividades, a criptografia foi considerada como um contexto propício para motivar os alunos e extrair significado a partir do conceito de função, bem como para o uso e articulação de suas diferentes representações.*

**Palavras-chave:** Modelagem, Criptografia, Função, Desenvolvimento de Ensino.

### **Abstract**

*We consider the existence of a relevant connection between the didactic sequence design and the teacher's role on knowledge construction (in a collaborative way) with the students. The research objective was to analyze and document how teacher's actions encourage students for building, developing and testing mathematical models. The proposed activities involved ciphering and deciphering information that were implemented in a middle school group. Students' productions and the processes they followed were analyzed. Also, we described the teacher's actions to promote the*

---

<sup>1</sup> Doctora en Educación Matemática por la Universidad de Salamanca en España, Profesora Investigadora de Tiempo Completo en la Universidad Juárez del Estado de Durango, Facultad de Ciencias Exactas–aalvarado@ujed.mx

<sup>2</sup> Doctora en Ciencias (Matemática Educativa) por el Cinvestav-IPN en México. Profesora Investigadora de Tiempo Completo en la Universidad Juárez del Estado de Durango, Facultad de Ciencias Exactas–carmen.olvera@ujed.mx

*construction and refinement of the function concept notion. In these activities, the cryptography was considered as a propitious context for student's motivation that helps making sense of function concept, as well as, promoting articulation of its different representations.*

**Keywords:** *Modeling, Cryptography, Function, Teacher Development.*

## **Introducción**

En México, los programas educativos (SEP, 2018) sugieren el diseño y la aplicación de actividades que promuevan el pensamiento matemático a través de la resolución de situaciones de la vida real, en las cuales los estudiantes se involucren en la formulación de conjeturas que posteriormente expliquen y justifiquen. En este sentido, surge la necesidad de introducir a los estudiantes en una actividad orientada a la modelización y a la aplicación más que a los contenidos matemáticos y con ello, se manifiesta la necesidad de problematizar teóricamente las acciones del profesor al proveer de un andamiaje a los estudiantes para favorecer el acto discursivo durante las tareas propuestas para la elaboración, el desarrollo y la evaluación de sus modelos. Es decir, investigar sobre las formas en las que el profesor puede favorecer la independencia del pensamiento del estudiante y la construcción de su aprendizaje durante la realización de actividades que promueven el desarrollo de diferentes maneras de resolver una situación real, en contraste con las que se centran en procedimientos rutinarios.

En este artículo, el aprendizaje es concebido como un proceso social y dinámico en el cual se construye conocimiento que constantemente se transforma a partir de las acciones que tienen lugar durante el proceso. En congruencia con tal concepción, se requiere del diseño de secuencias didácticas apropiadas, en las cuales las tareas, las representaciones de las situaciones y los diálogos entre el profesor y los alumnos, se encuentran entrelazados. En este sentido, el papel del profesor es provocar, de manera intencionada, que los estudiantes se enfoquen en las actividades, analicen y comuniquen sus resultados, promoviendo la generación de discusiones académicamente productivas.

Al respecto, diferentes investigadores se han centrado en documentar las acciones del docente para orquestrar una clase y refinar el conocimiento y el pensamiento del estudiante (SOHMER; MICHAELS; O'CONNOR; RESNICK, 2009; SMITH; STEIN, 2018; LAMPERT, 2010). Por su parte, Doerr y Ärlebäck (2015) comentan que es central apoyar al docente para que elabore prácticas de enseñanza y reflexione sobre sus acciones y el impacto que tienen para fortalecer la independencia de los estudiantes cuando resuelven o modelan situaciones de la vida real. Lo anterior, desde la planeación, las acciones y toma de decisiones pedagógicas del profesor en el momento de la instrucción.

En armonía con las ideas expuestas, en este trabajo se pretende documentar las acciones que lleva a cabo un profesor, durante la implementación de actividades de modelización que involucran el contexto de la criptografía, para motivar el estudio del concepto de función, así como su efecto en las respuestas de los estudiantes. Al ser actividades

centradas en el pensamiento de los estudiantes, están determinadas por desafíos que provocan una necesidad intelectual de proteger información mediante el uso de modelos concretos para abstraer conocimiento sobre la noción de función.

Esto es congruente con la historia de la criptografía, la cual, al inicio utilizaba materiales concretos que cada vez se han refinado en mecanismos matemáticos más sofisticados para la protección de información, garantizando su privacidad, integridad y autenticidad (CORTÉS; DÍAZ; TORRES; TAPIA; BASURTO, 2005). Dada la creciente demanda de expertos con conocimientos en esta área, cobra relevancia para la enseñanza con una visión que integra la matemática con otras disciplinas. En esta dirección, White (2009) presenta los resultados de una secuencia didáctica de cifrado y descifrado de información con el software *Code Breaker* para que estudiantes de educación secundaria pudieran cifrar sus mensajes variando los parámetros de una función polinomial y utilizando la frecuencia con que aparece una letra en un escrito, para que alguien que desconozca el proceso de cifrado pueda descifrar el mensaje. White (2009) sugiere que resolver problemas de matemáticas aplicadas, promoviendo múltiples representaciones, puede apoyar a los alumnos a ver de manera simultánea a las funciones como procesos y objetos. En esta investigación, se percibe valioso el contexto como analogía con el concepto de función y se presenta, a diferencia de la propuesta de White (2009), una secuencia didáctica con material concreto inspirado en los discos de cifrado de Julio César (CORTÉS; DÍAZ; TORRES; TAPIA; BASURTO, 2005) para responder a las necesidades de escuelas con acceso restringido a la tecnología y que será el escenario para observar las formas en las que el profesor puede favorecer el aprendizaje y la independencia de los estudiantes durante la realización de actividades que generen diferentes maneras de aproximarse a la solución de un problema.

En este estudio se busca documentar las acciones del profesor al aplicar actividades relacionadas con el concepto de función, desde experiencias de modelización de problemas realistas, articulando sus diferentes representaciones y promoviendo que generen y usen sus propios ejemplos. En esta última parte, se deben brindar oportunidades para que los alumnos propongan funciones que respondan con las situaciones planteadas y que tengan un significado personal. Por ejemplo, en este estudio, el profesor motiva para que los alumnos propongan formas de cifrar mensajes (su propia función) y otros tratan de descifrarlos, para lo cual necesitan encontrar la función inversa respectiva.

Para lograr que los estudiantes comprendan el concepto de función, por una parte, el profesor debe estar atento en cómo trabajan en el contexto de la criptografía para

matematizarlo y generar un modelo que les permita ver “el proceso de cifrado” como una entidad que acepta una entrada (número que representa a una letra tomada del alfabeto) y produce una salida (un número con desplazamiento que representa a otra letra del alfabeto), entendiendo que dos salidas distintas no pueden provenir de la misma entrada. Por otro lado, el profesor debe apoyar el reconocimiento de las representaciones asociadas a este concepto y atender las dificultades que se presenten en el proceso de articulación y tránsito entre ellas. De esta manera, el contexto aporta significado, las matemáticas persiguen trabajo interdisciplinario y disciplinario que envuelven momentos de contextualización y descontextualización (CAMARENA, 2017). Para Sierpinska (1992), una función puede definirse en notación formal simbólica; no obstante, cuando la noción es utilizada en algún contexto matematizado, el lenguaje informal surge y trae consigo significados que trascienden al lenguaje lógico simbólico.

En este estudio se presenta un ejemplo de una secuencia didáctica que se considera apropiada para analizar y documentar las acciones del profesor para propiciar que sean los estudiantes quienes construyan, desarrollen y prueben sus modelos matemáticos en actividades que impliquen proteger información. Así, se espera el surgimiento de modelos de cifrado y descifrado de mensajes que pueden representarse de distintas maneras (tablas, gráficas, concretas, operaciones aritméticas, etc.). Las actividades se implementaron en un grupo de secundaria, se analizaron sus producciones y se describió el proceso que siguieron los alumnos y las acciones del maestro en las discusiones grupales.

### **Marco Teórico**

Se presenta una secuencia didáctica diseñada desde la Perspectiva de Modelos y Modelación (PMM) propuesta por Lesh y Doerr (2003) como un vehículo para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en contextos interdisciplinarios. En la PPM, un modelo es un sistema conceptual que consiste de elementos, relaciones, operaciones, reglas y patrones, así como de sus interacciones. Éstos se expresan mediante sistemas de notación externa y se utilizan para construir, describir, o explicar el comportamiento de otro sistema. Por ello, los modelos son considerados herramientas para matematizar e interpretar situaciones relevantes de resolución de problemas. Para el desarrollo de modelos se proponen actividades que: revelen el pensamiento de los estudiantes o propicien la generación de modelos que representen las situaciones; permitan explorar sus modelos; y, los ayuden a adaptar los modelos generados para aplicarlos en otros contextos y/o para extender sus representaciones (DOERR, 2016), esto se extiende también a los modelos en la enseñanza. Lesh, Hoover, Hole, Kelly, y Post (2000) sugieren

que el diseño debe asegurar que la situación: permita un significado personal de la realidad, provoque la construcción de modelos, brinde oportunidades para la autoevaluación de los modelos, propicie la comunicación de los mismos y conduzca a generar otros modelos al extender los previos para resolver otras situaciones.

En la PMM, Schorr y Lesh (2003) consideran que siempre hay oportunidad para el desarrollo de modelos en la enseñanza, ya que no existe un estado fijo o definitivo de excelencia. Con modelos para la enseñanza se refieren a sistemas explicativos e interpretativos de la práctica docente. Los autores consideran que “si creemos que los estudiantes deben aprender a través de experiencias concretas de resolución de problemas, entonces, también es razonable considerar la idea de que los maestros deben aprender a través de experiencias personalmente significativas de resolución de problemas” (p. 144). Un problema significativo para los profesores puede ser cómo orquestar una clase que involucre problemas situados en un contexto real que den pie a la construcción, desarrollo e integración de modelos, propiciando la independencia de pensamiento de los estudiantes y el surgimiento de interacciones productivas.

En atención al problema antes descrito, Sohmer, Michaels, O’Connor y Resnick (2009), basados en estudios de profesores que han sido efectivos en sus prácticas usando la conversación para promover el aprendizaje, identifican un conjunto de 7 *intervenciones productivas en el discurso* (Tabla 1: A1-A7) que los profesores pueden utilizar para modelar y para lograr conversaciones académicamente productivas. Los autores definen tales intervenciones como un giro en la conversación que: 1) responde a lo que se ha dado antes; (2) añade elementos al discurso; y, (3) anticipa o establece lo que vendrá después. Por otro lado, Doerr y Ärlebäck (2015) identifican en el profesor *movimientos para preservar la independencia* de los estudiantes en el curso de su trabajo como desarrolladores de modelos. Un movimiento del profesor que provee a los estudiantes de una herramienta o estrategia que puede ser utilizada en una actividad futura es considerado un movimiento para preservar independencia, al igual que motivar la persistencia en los estudiantes (motivarlos a mantenerse pensando, hablando o trabajando sobre el modelo) y motivar el trabajo colaborativo (provocar que hablen con sus pares). Doerr y Ärlebäck (2015) identifican, *motivar movimientos de autoevaluación en los estudiantes* (Tabla 1: A8), como subcategoría de los movimientos para preservar la independencia de los estudiantes. Ejemplos de este tipo de movimientos son: que el profesor apoye la confianza de los estudiantes en sus soluciones (Tabla 1: A5); propicie que validen sus soluciones con un compañero (A2, A3 y A8, Tabla 1); solicite a los

estudiantes que den razones o justificaciones de por qué su solución puede ser correcta (Tabla 1: A8); y, que el profesor pida que los estudiantes piensen un poco más acerca de un resultado en particular, una representación, una relación, etc. (e.g. Tabla 1: A9).

También, Doerr y Ärlebäck (2015) consideran que un movimiento del profesor puede ser *neutral* (observar el trabajo de los estudiantes sin intervenir: A7 en Tabla 1) o un movimiento que *no-preserva la independencia* de los estudiantes (e.g. “puedes utilizar estas variables” u “organiza en una tabla estos valores”), y en consecuencia, tampoco genera discusiones productivas. En este estudio, se ha anticipado que el docente tenga en cuenta estas acciones para ponerlas en práctica en las discusiones orquestadas por él.

Tabla 1. Acciones generadoras de discusiones productivas que apoyan la independencia de pensamiento de los estudiantes.

Descripción de la acción	Formas prototípicas
A1 [Prof. rep.] Repetir las ideas expresadas por los estudiantes.	‘Déjame ver si entiendo correctamente. ¿Tú dices...?’ (con espacio para que el estudiante pueda seguirlo)
A2 [Prof. sol. rep. (ext.)] Solicitar a los estudiantes que repitan, a su manera, el razonamiento de otro.	‘Puedes repetir con tus propias palabras, lo que él dijo’
A3 [Prof. sol. raz. (ext.)] Pedir a los estudiantes que razonen sobre el razonamiento de alguien más.	‘¿Estás de acuerdo o en desacuerdo y por qué?’
A4 [Prof. motiv.] Motivar para una mayor participación.	‘¿Alguien quiere añadir algo más?’ ‘Digan más sobre esto’
A5 [Prof. sol. expl. (int.)] Solicitar a los estudiantes que expliquen su razonamiento y proporcionen evidencia.	‘¿Por qué piensas esto?’ ‘¿Cómo llegaste a esa respuesta?’ ‘¿Qué evidencia tienes?’ ‘Puedes darnos un ejemplo’
A6 [Prof. desaf.] Desafiar o proporcionar ejemplos o contraejemplos.	‘¿Funciona siempre así?’ ‘¿Qué hay acerca de...?’ ‘¿Por ejemplo?’
A7 [Prof. temp.] Dar tiempo para la reflexión de las ideas o la construcción de respuestas.	‘Toma tu tiempo’, observación del trabajo de los estudiantes sin intervenir.

A8 [Prof. sol. eval.] Propiciar la evaluación (personal, de otro o grupal) de las respuestas.	‘Analicemos esta respuesta... qué opinan’ ‘Piensa en lo que has dicho... parece que hay algo que aún no te convence’ ‘Es posible... ¿tendrá sentido?’ ‘¿Por qué crees que funciona bien tu respuesta?’
A9 [Prof. foc.] Enfocar la discusión.	‘Pensemos sólo en esta parte...’ ‘Revisemos este aspecto que mencionas’ ‘¿Qué pasa si ahora...?’

Fuente: Elaboración propia con información de Sohmer et al (2009) y Doerr y Ärlebäck (2015).

La elección de la PMM, se ha dado considerando que, tanto el contexto de criptografía como la noción de función que implica, permiten el diseño de actividades que incorporan el desarrollo de modelos matemáticos para describir una situación realista y motivan el uso de medios de representación para explicar y documentar los modelos de los alumnos, a la vez que se desarrollan modelos en el profesor para mejorar su enseñanza (LESH y DOERR, 2003). Además, las actividades generadoras y de exploración de modelos involucran a los estudiantes en describir, revisar y refinar su conocimiento (LESH; DOERR, 2003; LESH; HOOVER; HOLE; KELLY; POST, 2000), lo cual propicia múltiples interacciones en el aula. En este sentido, las acciones de la Tabla 1, apoyan al profesor para implementar actividades de modelización centradas en el pensamiento del estudiante y representan una herramienta que permite capturar la complejidad de las interacciones ocurridas en el aula y analizar el papel del profesor al provocar la construcción y la transformación del conocimiento base compartido por los estudiantes.

### **Metodología**

El énfasis se hace en la descripción del diseño de la secuencia didáctica y en el papel del profesor para promover, de manera intencionada, que sean los estudiantes quienes construyan y prueben sus respuestas a las situaciones planteadas. La evidencia fue obtenida desde la observación de las seis horas de trabajo en el aula, mediante informes escritos y las videograbaciones de las sesiones que fueron transcritas en su totalidad. Se codificaron los datos (Tabla 1) para identificar las acciones del profesor y los episodios en los cuales se notaba un logro de los estudiantes para avanzar en la noción de función. Para mostrar evidencias del impacto de las acciones del profesor en la construcción y desarrollo de los modelos de los alumnos (Grupo A) se vincularon y analizaron aquellas acciones del profesor que promovían discusiones matemáticas productivas y apoyaban la



construcción y exploración de los modelos generados (Tabla 1). Finalmente, se compararon las acciones del profesor y los logros de los alumnos en los grupos de intervención (Piloto y Grupo A). El concentrado del análisis se presenta en la Tabla 2 (Anexo B).

### **Participantes y contexto**

El profesor participante tiene una formación académica de Licenciado en Educación Secundaria con especialidad en Matemáticas otorgado por una Escuela Normal formadora de Profesores de Educación Básica. Al momento de la implementación tenía experiencia de 10 años frente a grupos de secundaria y su primer acercamiento con este tipo de actividades se dio en un taller de capacitación de profesores enfocado en actividades de modelación y conducido por los autores de este artículo.

El grupo en el cual se implementó la secuencia didáctica (Grupo A, Tabla 2 del Anexo B) era de un nivel socioeconómico bajo que iniciaba el tercer grado de secundaria, constaba de 16 alumnos de 14 años en promedio, organizados en 8 parejas. Previo a la implementación que aquí se reporta, el profesor llevó a cabo una aplicación piloto con otro de sus grupos de características similares (Anexo B). La escuela a la que pertenecían ambos grupos se encontraba ubicada en la zona periférica de la ciudad de Durango, México y un alto porcentaje de alumnos se insertan en esta escuela, luego de ser dados de baja de otras instituciones debido a su bajo desempeño y a sus actitudes disruptivas. Respecto a sus conocimientos previos acerca del concepto de función, se puede mencionar que en el grado anterior se abordaron ‘situaciones problemáticas del tipo valor faltante’ sin llegar a formalizar el concepto de función ni sus expresiones: ‘ $y=kx$ ’ y ‘ $y=mx+b$ ’. Cabe señalar que, aunque el programa de matemáticas vigente incluye contenidos relacionados con la función lineal y sus representaciones, esto no significa que los alumnos cuentan con las ideas básicas o nociones de éste. Es importante mencionar que la secuencia fue el primer acercamiento para propiciar la emergencia de modelos en los cuales la noción de función y sus diferentes representaciones cobran relevancia. Los aspectos descritos fueron determinantes para la selección del grupo y de las actividades.

### **Diseño propuesto**

La secuencia que se implementó con los estudiantes fue adaptada (de una primera versión presentada en un taller de capacitación para profesores) por el profesor participante para su implementación tomando como referencia el contexto de sus grupos.

La secuencia consta de las hojas de trabajo Privacidad de los Datos I y II (Anexo A) para guiar a los alumnos en el registro escrito de sus ideas. Para el diseño se tomaron en cuenta

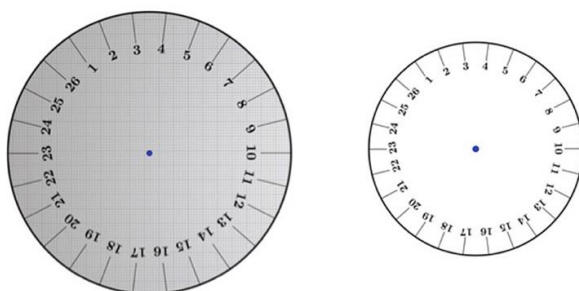
diversas representaciones del concepto de función, el objetivo didáctico y características como: partir de una situación problemática auténtica, actual y cercana a los estudiantes; uso de material concreto; formular preguntas que ayudaran a reflexionar sobre el problema o contenido; explorar, manipular y discutir para resolver la situación; plantear preguntas sobre los resultados en forma de retos; y, extraer conclusiones de la tarea.

### **Privacidad en los Datos I**

Se parte de la cuestión ¿cómo ‘disfrazar’ información para asegurar su privacidad? Se presenta un mensaje cifrado con números y se deja que los alumnos expresen sus formas de pensamiento al descifrar el mensaje y describir la forma en que éste se cifró. Posteriormente, el contexto se introduce destacando la necesidad actual de proteger la información y la importancia de la criptografía para responder con tal necesidad.

Enseguida, los participantes se involucran en la comprensión del funcionamiento del modelo de cifrado y descifrado de información del agente Mat. Éste incluye un cifrado simple con una correspondencia natural entre el alfabeto y los números naturales, y un cifrado de corrimiento utilizando rotores giratorios (Figura 1).

Figura 1 Rotores giratorios que se ensamblan para cifrar y descifrar mensajes.



Fuente: Elaboración propia.

Los alumnos ponen a prueba su comprensión acerca del método y, en parejas, practican el cifrado de mensajes, especificando la clave utilizada. Durante las interacciones, con frecuencia se requiere de la intervención del profesor para dar pie al surgimiento de una variedad de ideas matemáticas que, posteriormente, sean discutidas, revisadas, extendidas y formalizadas por los estudiantes con el apoyo del docente. Finalmente, se presenta una actividad de autorregulación para que cifren un mensaje, lo intercambien y el reto sea descifrar mensajes cifrados por otros sin conocer la clave.

### **Privacidad en los Datos II**

La pregunta guía de esta actividad de exploración de modelos es: ¿cómo mejorar el ‘modelo de los rotores’? Para introducir el contexto se presentan dos agentes compañeras de Mat, Ada y Emy, quienes proponen representaciones diferentes (tabular y gráfica) y

equivalentes al modelo de los rotores para cifrar y descifrar información. Los participantes deben utilizar tales representaciones para cifrar y descifrar mensajes transitando del uso de los rotores hacia la abstracción del significado de las acciones y a identificar el papel de los elementos del modelo en estas nuevas representaciones.

Una vez que los alumnos han interactuado con las representaciones y discutido en sus equipos, se procede a una discusión grupal para formalizar las ideas surgidas. Para tales discusiones el docente debe propiciar que los estudiantes comuniquen sus ideas y sean los protagonistas de la construcción del conocimiento.

## **Resultados**

Para analizar el impacto de las acciones del profesor en los resultados obtenidos con el Grupo A al implementar las actividades de modelización, se establecen las categorías de las construcciones de modelos y la exploración de sus diferentes representaciones: (1) Construcción de modelo de cifrado y descifrado mediante el uso de su representación concreta; (2) Representación algebraica de los modelos; (3) Representación tabular de los modelos; (4) Representación gráfica de los modelos; y, (5) Transición entre representaciones. Las acciones del profesor se analizan con base en la Tabla 1 para identificar cómo se propician diálogos académicamente productivos que promueven en los alumnos logros o acciones de construcción resaltados en letras negritas. Enseguida, se describe el proceso de desarrollo de modelos que propició tanto la secuencia como las formas de intervención del profesor en el Grupo A. Tales acciones fueron refinadas luego de que el profesor aplicó la secuencia con el Grupo Piloto reportado en el Anexo B, Tabla 2. En las transcripciones, al final de cada una de las participaciones del profesor, se indica el código del tipo de intervención involucrada. También, se describe cómo se fueron relacionando tales acciones con el resultado obtenido por los alumnos.

### **Construcción de modelos de cifrado y descifrado mediante el uso de su representación concreta.**

El docente inicia la sesión presentando un mensaje cifrado, mediante la asociación natural entre el abecedario y su número correspondiente en posición, para que sea descifrado por los alumnos a modo de reto.

*[1] P: Recibí un mensaje que no es claro [8] As: No, no es cantidad. Se pueden para mí y pensé que ustedes podían poner los números de acuerdo al orden. El ayudarme. No es claro porque el mensaje 0 es la A, el 1 la B, viene encriptado. Es decir, utilizaron una*

clave secreta para proteger la [9] P: Entonces, la primera palabra tiene confidencialidad [escribe el mensaje 22 letras ¿Existirá una palabra así? (A8 cifrado)]. ¿Dónde podemos encontrar [Prof. sol. eval.] situaciones en las que se requiera [10] As: No! [Trabajan] Puede ser por proteger datos? (A4 [Prof. motiv.] pares. El 01 sería la A. Tenemos una [2] As: En una computadora con una palabra de 7 letras (A7 [Prof. temp.]) clave, una USB puede tener contraseña. [11] P: Son buenas pistas. ¿Requieren de [3] P: Podemos ir incrementando la más datos para resolver esto? [asienten] confidencialidad de acuerdo a la (A4 [Prof. Motiv.]) importancia de los datos: en un banco, en [12] As: El 01 es la A, 02 la B. La primera palabra sería: BIENVENIDOS. el gobierno. Por ejemplo, en un conflicto [13] P: Muy bien, entonces este es el de guerra, ¿cómo harían ustedes para mensaje y la 'máquina' que me permite enviar un mensaje? (A4 [Prof. motiv.] codificarlo es esta asociación: La A con [4] As: Por medio de números [pide explicación]. Poniendo un número para 01, B con 02, C con 03, (A1 [Prof. rep.]) cada letra. [14] As: Utilizando el rotor, el mensaje es BIENVENIDOS A TERCERO. [5] P: A ver, este mensaje es el que necesito que me ayuden a traducir: [15] P: Sí, algo que podemos observar es que el rotor no tiene ceros, ¿qué tiene que 0209051422051409041519-01- ver esto? (A8 [Prof. sol. eval.]; A9 [Prof. 20051803051815. [Trabajan] ¿Ya lo descifraron? Alguna idea de ¿cómo foc.]) hacerlo? Imaginen que de esto dependen [16] As: Es que se le dan dos cifras porque deben ser pares para no confundir. Si no vidas, ¿cómo descifran? (A6 [Prof. estuvieran los ceros, cómo saber en 295 si es 2 o es 29. Sí, es para una división exacta, igual de números por letra. [Prof. desaf.]; A5 [Prof. sol. expl. (int.)]; A7 [Prof. temp.])

[6] As: ¿Sería dinero todo esto?

[7] P: ¿Es posible? si fuera dinero ¿tendría sentido iniciar en 0? (A8 [Prof. sol. eval.])

En el fragmento anterior el profesor se muestra inquisitivo para provocar que los estudiantes identifiquen patrones que los ayuden a intuir y conjeturar formas de cifrar mensajes que ponen a prueba hasta hacer explícito el proceso con la asociación natural entre alfabeto y números [12]. Esto es posible por las acciones del maestro. En [3] se

percibe que motiva una mayor participación (A4 [Prof. motv.]), en [5] propone a los estudiantes el reto de descifrar un mensaje (A6 [Prof. desaf.]), solicita explicación y evidencia de su solución (A5 [Prof. sol. expl. (int.)]), esperando el tiempo necesario para que puedan resolverlo y dar forma a sus explicaciones (A7 [Prof. temp.]). Luego, en [7] propicia la evaluación de la naturaleza del mensaje y, en [9], la posible extensión de una palabra en el idioma español (A8 [Prof. sol. eval.]). Cuando los alumnos logran resolver el reto [12], el docente, en [13], repite lo que han hecho para enfatizarlo al grupo (A1 [Prof. rep.]) e introducir la idea temprana de función como una entidad que acepta una entrada y produce una salida. Lo anterior, ayuda a que vinculen esta idea con el uso del material. Finalmente, en [15], propicia la evaluación del proceso de cifrado con el uso del rotor para lograr una identificación completa entre ambos modelos (A8 [Prof. sol. eval.]), además de enfocar la discusión en el punto crítico (A9 [Prof. foc.]): el uso de dos cifras en los números para uniformar e identificar una letra y que las primeras nueve letras se antecederan con un cero. El grupo continua con la tarea de descifrar un nuevo mensaje.

[17] P: *Veamos si pueden descifrar otro mensaje [escribe]: 082019–10242510–1920–010619–06–2120091023. Si seguimos trabajando con el mismo sistema, ¿qué diría en la primera palabra? ¿Tiene sentido?* (A6 [Prof. desaf.]; A8 [Prof. sol. eval.])

[18] As: *HTS, no tiene sentido.*

[19] P: *¿Seguramente algo pasó? Para el mensaje anterior necesitaban los dos rotores [no, contestan]. Entonces, ¿por qué tendrá dos círculos el rotor? Tendremos que hacer algo, manipular los rotores tal vez. [Trabajan] ¿Qué elementos necesitarían para poder descifrarlo? [exploran y tratan de descifrar el*

[22] As: *La regla sería que cada número avanzara el mismo número. Por decir que todos avancen 4. Hay que encontrar esta regla [clave], lo que debemos avanzar.*

[23] P: *¿Qué dice ahí? [mensaje] (A8 [Prof. sol. eval.])*

[24] As: *CON*

[25] P: *Así es, entonces que tienen que hacer para descifrar el mensaje, usen su rotor. (A9 [Prof. foc.])*

[26] As: *[Para descifrar] Se le resta 5 [al mensaje cifrado]*

[27] P: *Quiere decir que la C (el 03) está en el número 8 del rotor morado. Entonces a la E que le corresponde [mensaje cifrado] (A1 [Prof. rep.])*

[28] As: *El 10*

*mensaje]. (A5 [Prof. sol. expl. (int.)]; A7 [Prof. temp.]*

*[20] As: Si acomodo los rotores primero con la posición de las letras y después giro uno.*

*[21] P: El círculo blanco tiene números y letras. El morado sólo números, a ver, entonces, dicen que el giro me permite encriptar mensajes. Si giro un lugar la A ¿dónde queda? [en 2, responden]. ¿Qué valor le corresponde al 08 [palabra cifrada 082019]? ¿cuántos lugares se avanza para que tenga sentido el mensaje? (A1 [Prof. rep.]; A6 [Prof. desaf.]*

*[29] P: Entonces qué letra es esta [la correspondiente a 24] (A8 [Prof. sol. eval.]*

*[30] As: La S*

*[31] P: ¿Están siguiendo a su compañera? [asienten]. ¿Qué sigue? El 25, ¿qué letra es? (A3 [Prof. sol. raz. (ext.)])*

*[32] As: La T*

*[33] P: ¡Completen el mensaje, descifrenlo! (A4 [Prof. motv.]*

*[34] As: [Trabajan, risas] Dice: CON ESTE NO VAN A PODER*

Como puede leerse en lo anterior, se les propone un segundo mensaje cifrado con una clave [17]. No se ha cifrado con la correspondencia natural entre alfabeto y números, y el profesor apoya para que logren encontrar ‘la nueva regla’ [22]. Para ello, en [17], los desafía (A6 [Prof. desaf.]) a utilizar la forma natural de cifrado para que evalúen si tiene sentido la palabra obtenida (A8 [Prof. sol. eval.]). Esto provoca la necesidad de usar los rotores y pensar en los giros como clave de cifrado (A5 [Prof. sol. expl. (int.)]; A7 [Prof. temp.]). El docente interviene en [21] para enfatizar el logro (A1 [Prof. rep.]) y solicita que generen ejemplos con desafíos dirigidos (A6 [Prof. desaf.]) logrando con ello que construyan el proceso de cifrado [22] desde la manipulación y exploración de los rotores. El maestro, en [23], pide la evaluación de la respuesta (A8 [Prof. sol. eval.]) y que se enfoquen en el uso del rotor para una mejor comprensión (A9 [Prof. foc.], en [25]). Finalmente, en [27] repite lo que hicieron para mostrar su importancia y consolidar el conocimiento del modelo (A1 [Prof. rep.]), propicia la evaluación de las respuestas (A8 [Prof. sol. eval.]), pide que razonen sobre el pensamiento de alguien más (A3 [Prof. sol. raz. (ext.)], en [31]) y motiva a terminar la tarea (A4 [Prof. motv.]) en [33].

Enseguida, se muestra cómo los alumnos consolidan el uso del rotor:

[35] As: Ya profe este mensaje dice **OBJETIVO SUPERADO** [38] P: Muy bien, aquí la clave es 3, pero podemos elegir cualquier clave y la clave nos dice cuanto avanzar o girar (el rotor). Por rotor blanco [cifrado por ejemplo, si la clave fuera 4, ¿qué números le asociación natural]. Pero, luego corresponden a la A y a la M? (A1 [Prof. rep.]; aparece cifrado de otra manera, A6 [Prof. desaf.]) con una 'clave', ¿a qué se refiere [39] As: Quedan en el 5 y en el 17. esta clave? (A1 [Prof. rep.]; A5 [Prof. sol. expl. (int.)]) [40] P: Una vez que sabemos cómo funciona el método con el rotor, vamos a cifrar mensajes [monitorea]. (A4 [Prof. motiv.]; A7 [Prof. temp.]

[37] As: Avanza 3.

Inician la lectura sobre el estudio de la criptografía y contestan las preguntas planteadas. Se observa que las acciones mostradas en [35-40] consolidan el funcionamiento del modelo del rotor. Para ello, en [36 y 38], el profesor utiliza la repetición para tener presente lo hecho anteriormente (A1 [Prof. rep.]) y pide que formulen explicaciones (A5 [Prof. sol. expl. (int.)]) y que proporcionen ejemplos (A6 [Prof. desaf.]). Finaliza, solicitando que practiquen el modelo para cifrar y descifrar diferentes mensajes, motivando una mayor participación en la aplicación del conocimiento construido (A4 [Prof. motiv.]) y brindando el tiempo necesario para que lo realicen (A7 [Prof. temp.]). Enseguida, se presenta un fragmento que permite evaluar los logros con el dominio del modelo. En [41-57] describen el proceso de cifrado en términos del uso del material. Para cifrar, todos hacen referencia al movimiento del rotor y 4 equipos (la mitad) lograron establecer una relación aritmética en los procesos para cifrar y descifrar.

[41] P: Recordemos el proceso de [47] P: [Intercambia los mensajes] Ahora, cifrado ¿qué se hace? (A1 [Prof. rep.]) ¿cómo descifrar un mensaje si no conozco la clave? ¿De las 26 letras alguna aparece más? (A5 [Prof. sol. expl. (int.)]; A9 [Prof. foc.])

[42] As: A cada número le damos una letra. [48] As: La 'a',..., la 'e', bueno todas las vocales.

[43] P: Sí, asociamos el número correspondiente a cada letra del alfabeto. (A1 [Prof. rep.]) [49] P: ¿Qué necesitamos hacer? (A6 [Prof. desaf.])

[44] A: Sumamos la clave [50] As: Encontrar la clave

[45] P: *Muy bien, usamos la clave y ciframos. Bueno, por equipo, piensen en una palabra, usen su propia clave y cifren su mensaje. Me entregan los mensajes cifrados y yo los intercambio con otros equipos para que descifren su mensaje. [Trabajan en equipo e intercambian] (A1 [Prof. rep.]; A6 [Prof. desaf.]; A7 [Prof. temp.])*

[46] P: *[Supervisa] Sólo han realizado la parte de asociar el mensaje a un número, ¿ya tienen su clave? ¿Cómo la usan? (A7 [Prof. temp.]; A9 [Prof. foc.])*

[51] P: *Bueno esa sería la primera pista y ¿cuántos números le asociamos a cada letra? (A9 [Prof. foc.])*

[52] As: *Partimos en dos la palabra*

[53] P: *Muy bien y hay que buscar ¿qué clave le da sentido a ese mensaje? [ya descifrado] (A9 [Prof. foc.])*

[54] P: *[Trabajan] A ver, ¿alguien reconoce este papelito? (A8 [Prof. sol. eval.]; A7 [Prof. temp.])*

[55] As: *Sí, es nuestro*

[56] As: *La palabra de ellos que nos tocó, es INTERESANTE.*

[57] As: *La que nosotros desciframos fue HOLA*

Desde el análisis de lo anterior, se puede decir que el profesor, con la intención de evaluar, retoma lo realizado antes (A1 [Prof. rep.]) y así logra centrar a los alumnos en el proceso de cifrado y descifrado en [41, 43 y 45]. Luego, en [45] les pide que cada equipo cifre una palabra, la intercambie con otro y descifre el mensaje cifrado por ellos y viceversa (A6 [Prof. desaf.]). En esta actividad se dejan 8 minutos (A7 [Prof. temp.]), sólo un equipo mostró dificultad con el cifrado, ya que se quedaron en la primera parte del proceso y el docente los apoyó con preguntas para centrarlos respetando su ritmo (A9 [Prof. foc.]; A7 [Prof. temp.]) y con ello, los llevó a concretar la idea de sumar la clave. Los estudiantes lograron cifrar su mensaje y, para descifrar el de otros, ‘descubrieron la clave’ que hiciera que el mensaje tuviera sentido.

El profesor, al monitorear, se dio cuenta que esto lo hicieron al buscar ¿cuáles números, del mensaje a descifrar, tenían oportunidad de representar una vocal? y con ello, buscaron la clave para restar y descifrar. Con base en esta información, en [47] solicitó que los alumnos explicaran su proceder (A5 [Prof. sol. expl. (int.)]) y con pequeños retos (A6 [Prof. desaf.]), en [49], dirigió la discusión (A9 [Prof. foc.]) en el sentido de la pregunta anterior [47,51,53] y evaluó las respuestas (A8 [Prof. sol. eval.]) en [54]. Los mensajes que los estudiantes cifraron y que otros descifraron fueron: INTERESANTE y HOLA [56 Y 57], entre otros, usando claves de cifrado mayores de 5. Las claves utilizadas y la



evaluación propició que identificaran elementos para un pensamiento cíclico como se observa enseguida.

[58] P: A ver, si ahora quiero mover la T, [60] P: Pero, aquí no hay 32 [en el rotor], que corresponde al 20, con clave 12 (A6 [Prof. desaf.]) entonces, ¿qué pasó? (A8 [Prof. sol. eval.])

[59] As: Queda 32

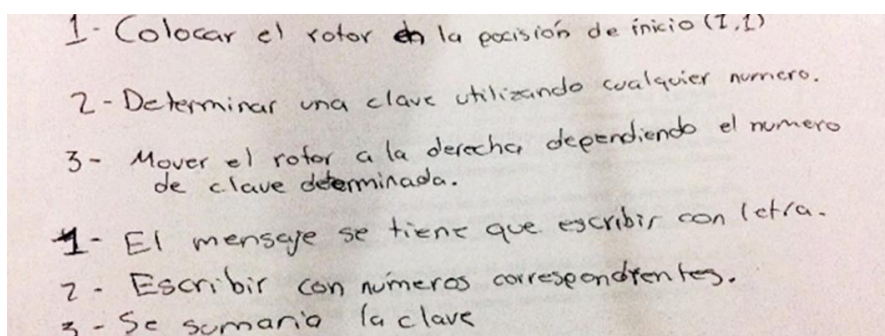
[61] As: Reinició después del 26 ... queda en el 6

Finalmente, 5 de los 8 equipos identificaron el ciclo del abecedario y propusieron procedimientos para dar continuidad con el cifrado una vez que el número inicial sumado a la clave superan los 26 dígitos que componen un ciclo. Para que esto se concretara, fue fundamental la intervención del profesor en la solicitud de construcción de ejemplos a los estudiantes (A6 [Prof. desaf.]) y la evaluación de estos (A8 [Prof. sol. eval.]).

### Representación algebraica de los modelos

Para construir esta representación se dejó que los equipos trabajaran desde su experiencia con el rotor. Aquí, 4 de 8 equipos lograron describir el proceso para cifrar y descifrar mensajes, sin embargo, escriben los pasos del procedimiento que hay que seguir al usar el rotor, sin llegar a establecer fórmulas ni asignar literales a las variables (Figura 2). Dos equipos más lograron describir el proceso representando simbólicamente algunas variables como:  $P$ =posición;  $C$ =clave; y,  $M_c$ =mensaje cifrado. El profesor pide que reflexionen y retoma la discusión en la siguiente sesión.

Figura 2 Descripción de los pasos para el cifrado.



Fuente: Producciones de los estudiantes.

[62] P: La clase anterior ciframos y [68] P: SECRETA ¿cómo queda en desciframos mensajes, primero con el números? (A8 [Prof. sol. eval.])

rotor. Para deshacernos de él se [69] As: 19, 05, 03, ..., 18, 05, 20, 01 [el profesor escribe seguidos los números]

- establecieron otras formas de hacerlo, un par de fórmulas, ¿cuáles fueron? (A1 [Prof. rep.]; A9 [Prof. foc.])
- [63] As: *Para cifrar un mensaje se usaba la posición inicial más la clave. [guían al profesor para que escriba la fórmula de cifrado  $M_C = P_1 + C$ ]*
- [64] P: *Recuerdan cómo descifrar. (A9 [Prof. foc.])*
- [65] As: *Lo contrario, ahora la posición final y restamos la clave. [Guían al profesor para que escriba  $M_D = P_F - C$ ]*
- [66] P: *De acuerdo a esto [las fórmulas para cifrar y descifrar], ¿cómo sería cifrar esta frase? [CLAVE SECRETA], usando la clave 7 ¿qué números van aquí? (A6 [Prof. desaf.])*
- [67] As: *03,12, 01, 21, 05 [el 21 lo corrigen]*
- [70] As: *Entonces en CLAVE no va el 21 es un 22 [el profesor corrige lo escrito] (A8 [Prof. sol. eval.])*
- [71] P: *Ahora ya tenemos el mensaje correspondiente asociando el alfabeto con números. No hemos usado la clave. (A9 [Prof. foc.])*
- [72] As: *[Dictan el mensaje cifrado sumando la clave 7] 1019080312 espacio 26121025120108.*
- [73] P: *[Aprovecha el dictado del espacio para otra actividad que refina el modelo] ¿Qué pasa si alguien encuentra estos números? Aunque no tenga rotores o la clave, ¿se dará cuenta que hay un mensaje escondido? (A8 [Prof. sol. eval.])*

De lo anterior, se puede extraer que el maestro en [62] retoma lo antes realizado (A1 [Prof. rep.]) y en [62 y 64] enfoca la discusión (A9 [Prof. foc.]) para provocar que los alumnos conformen el proceso de cifrado y descifrado y lo plasmen en una expresión algebraica. También, se muestra inquisitivo con desafíos (A6 [Prof. desaf.]) para que utilicen las fórmulas al cifrar mensajes y se evalúen (A8 [Prof. sol. eval.]) para detectar posibles errores y refinar el modelo. Por ejemplo, en [73] el profesor aprovecha la respuesta de los alumnos para el reconocimiento del ‘espacio’ entre palabras y cómo cifrarlo. La evaluación (A8 [Prof. sol. eval.]) propicia un refinamiento del modelo haciendo que sea más seguro al no revelar la separación entre palabras.

### **Representación tabular de los modelos**

Desde el inicio los alumnos reconocen la asociación letra-número como natural, y la tabla surge como iniciativa del grupo a partir de la necesidad de descifrar el primer mensaje [Fragmentos 1-34]. Una vez que conocen y manipulan el rotor, la tabla pasa a segundo

término y basan el cifrado y descifrado en el uso y exploración del material concreto. Luego, como se puede ver enseguida, regresan al modelo tabular.

[74] P: [Leen el modelo de Ada y llenan la tabla] Las letras son 26, [78] P: ¿Cuál letra corresponde al 19? (A8 [Prof. sol. eval.]

¿es correcto trabajar con 26 [79] As: La S [cifrado con clave 8]

elementos? (A8 [Prof. sol. eval.] [80] P: Entonces, ¿cómo quedaría el mensaje

[75] As: No, son 27 ahora con el 'espacio' [entre palabras] SOMOS AGENTES DE CAMBIO? (A6 [Prof. desaf.]

[76] P: Exactamente, tenemos un [81] As: [Dictan] 2722202227 y luego 09

lugar más. ¿El ciclo dónde termina? [82] P: ¿Seguros? (A8 [Prof. sol. eval.]

(A9 [Prof. foc.] [83] As: [Revisan] ¡Ah no! El espacio es 00 y con

[77] As: En el 27, porque se agrega la clave es 08. Sigue 080915132 ... No profe, tenemos errores [corrige]:

2723212327080915132201132708121308110921  
101723

Aunque tardan en desprenderse de los rotores, en [83], logran refinar el modelo tabular. Para esto, el profesor propicia la evaluación (A8 [Prof. sol. eval.]), en [73 y 74], de la incorporación del 00 como espacio y en [76] centra la discusión en tal incorporación (A9 [Prof. foc.]). Luego, evalúa las respuestas (A8 [Prof. sol. eval.]), solicita ejemplos (A6 [Prof. desaf.]) y vuelve a evaluar (A8 [Prof. sol. eval.]), en [78], [80] y [82], para explorar el refinamiento al hacer más seguro el cifrado de mensajes.

En sus producciones escritas todos completaron la tabla correctamente, considerando el 00 como espacio; previa intervención del docente, que enfatizó en revisar los elementos involucrados en el modelo tabular, un equipo al cifrar la frase SOMOS AGENTES DE CAMBIO utiliza comas para separar las palabras en lugar de 08 (espacio cifrado).

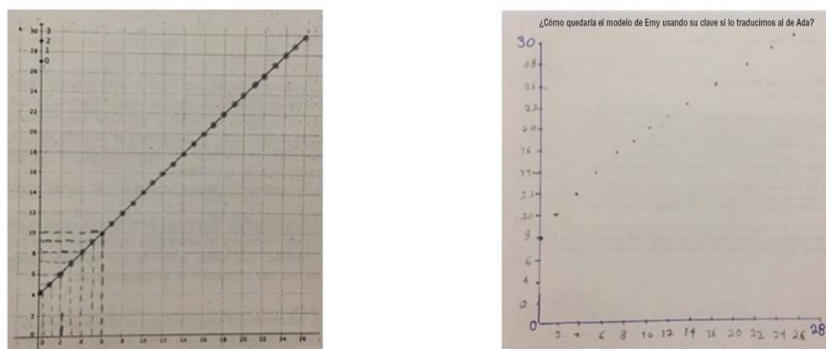
### Representación gráfica de los modelos

Esta representación de los modelos de cifrado y descifrado es interesante, dado que, surgen conceptos asociados tales como: variable discreta, pensamiento cíclico, contextualización de las coordenadas, identificación de la clave de cifrado con la ordenada en el origen, cifrar, etc.

Aquí, cada pareja discute para responder las preguntas de la Hoja de Trabajo (Anexo A). El docente monitorea e identifica que algunas parejas ya se han dado cuenta que si unen los puntos o pares ordenados se obtiene una recta, pero en el proceso de cifrado sólo

algunos puntos sobre ella son los que interesan: los puntos  $(M, M_c)$ . Es decir, identifican que se trata de una variable discreta al remarcar tales puntos (Figura 3).

Figura 3 Representación gráfica del modelo.



Fuente: Producción de los estudiantes.

Las interacciones que guían a los estudiantes para construir la representación gráfica del modelo se observan enseguida.

- [84] P: *Vean la gráfica y vamos a tratar de comprenderla [pide que recuerden el modelo tabular] (A9 [Prof. foc.])*
- [85] As: *Está usando la clave 4 [modelo de Emy]*
- [86] P: *¿Por qué? ¿Al cero que le corresponde? (A3 [Prof. sol. raz. (ext.)])*
- [87] As: *Donde inicia la gráfica, en la línea vertical*
- [88] P: *A ver, aquí [gráfica] ¿dónde estará el mensaje original? (A6 [Prof. desaf.])*
- [89] As: *El original está en la horizontal*
- [90] P: *Entonces el mensaje original está en el eje de las abscisas y el mensaje cifrado (I-1) [contestan que en el eje vertical] ¿qué valor le corresponde al 8? (A8 [Prof. sol. eval.])*
- [91] As: *12 [la clave es 4]*
- [93] As: *Representa al 'espacio' [entre palabras]*
- [94] P: *Sí, ¿y ya cifrado? (A8 [Prof. sol. eval.])*
- [95] As: *Al 4*
- [96] P: *El 1, ¿con quién se cifra? (A8 [Prof. sol. eval.])*
- [97] As: *El 1 va con el 5, el 2 con el 6 [el profesor dibuja los puntos]*
- [98] P: *Marquen sobre la recta del modelo de Emy todos los puntos que representan al mensaje original y al mensaje cifrado. (A6 [Prof. desaf.])*
- [99] As: *Como coordenadas todos los puntos del abecedario.*
- [100] P: *Sí [trabajan y monitorea, luego pasa a cada estudiante a representar en el pizarrón un punto  $(M_o, M_c)$ ] (A7 [Prof. temp.])*

[92] P: *Entonces, aquí está el punto correspondiente al valor cifrado* [101] P: *¿Qué pasa con el 1.5 del eje x? ¿Le agregamos un 4, la clave?* (A9 [Prof. *foc.*])

(A9 [Prof. *foc.*])

[102] As: *No, ese punto no existe aquí. No tenemos una letra entre la A (o sea el 1) y la B (el 2), sólo valen enteros.*

En la socialización, en [84], [86] y [88] el profesor centra a los alumnos en la observación de la gráfica (A9 [Prof. *foc.*]), pide que razonen sobre la respuesta que da una alumna (A3 [Prof. *sol. raz. (ext.)*]) y los desafía a ubicar elementos específicos (A6 [Prof. *desaf.*]) tales como la correspondencia con el eje de las abscisas. En [90], utiliza el recurso de repetir lo que han dicho antes para remarcar su relevancia (A1 [Prof. *rep.*]) y propicia la evaluación de la respuesta (A8 [Prof. *sol. eval.*]). Enseguida, en [92], [94] y [96], el profesor los enfoca en el papel del 00 para representar al espacio entre palabras (A9 [Prof. *foc.*]) y promueve su evaluación al solicitar que lo identifiquen cifrado (A8 [Prof. *sol. eval.*]), así como al 01 (A8 [Prof. *sol. eval.*]). En [98], los desafía para que realicen la representación geométrica del mensaje original y del mensaje cifrado (A6 [Prof. *desaf.*]), monitorea y espera el tiempo necesario (A7 [Prof. *temp.*]) para que lo logren [100]. Con la intención de que verbalicen su reconocimiento del caso discreto del modelo en juego, en [101], el docente los centra en un punto entre dos enteros y los cuestiona sobre la posibilidad de cifrarlo (A9 [Prof. *foc.*]). Esto propicia que los alumnos logren representar e interpretar una coordenada en este modelo para cifrar y, además, construir y comprender un ejemplo discreto [102], ejemplos poco estudiados en el contexto escolar (Figura 3).

En el registro escrito, sólo 2 equipos ubicaron los puntos en la gráfica cuando se les pidió representar el modelo para que cifraran la frase SOMOS AGENTES DE CAMBIO; el resto, graficó la recta completa. Por otra parte, 4 de los 8 equipos mostraron evidencia de interpretar las coordenadas como (posición inicial, posición cifrada) y los otros 4 exhibieron confusión en la interpretación de la pregunta ¿qué representa la primera coordenada de un punto sobre la recta?, ya que consideran como primera coordenada al punto (0,4), o bien, el (1,5) asociado a la letra 'A'.

Dos equipos lograron graficar un ciclo, es decir, el último punto representado es (22, 26). Cinco equipos mostraron otros puntos que indican que el 23, al aplicarle la clave de cifrado (4), se recorre al 27 que indica inicio de ciclo, esto es, se va a 0 y se representa como (23,0) y grafican hasta que se concluye un ciclo en el eje vertical quedándose hasta

el 27. Aunque algunos grafican más de un ciclo (Figura 3). Usualmente, en las gráficas para representar funciones se gradúan los ejes utilizando números de manera consecutiva. Aquí, los ejes se presentaron graduados con números pares; sin embargo, esta acción no representó problema, ellos comprendieron que la letra A sin cifrar es 1 y se representa en el eje de las abscisas a la mitad de 0 y 2. Finalmente, un equipo comenzó en la coordenada (0,8) ubicándola en el origen de manera errónea (Figura 3 derecha).

### **Transición entre representaciones**

Enseguida se aprecian las acciones del maestro que propician que los alumnos consoliden el conocimiento de los modelos tratados al interpretar correctamente sus elementos y sus formas de representación.

- [103] P: Repasemos, ¿qué significa el (2, 6)? (A9 [Prof. foc.])
- [104] As: Una coordenada de la gráfica ... que B se cifra en F. El número sin cifrar es 2 y el número cifrado es 6.
- [105] P: ¿Qué hay entre ellos?, ¿qué los relaciona? (A9 [Prof. foc.])
- [106] As: La clave, al primero le sumamos 4, que es la clave y llegamos al segundo, cifrado [continúan graficando].
- [107] P: [Con otros ejes] Si ahora la clave fuera 12 ¿cómo quedaría? Menos o más inclinada. (A6 [Prof. desaf.])
- [108] As: Más inclinada
- [109] P: Por ejemplo, el 2, ¿con quién iría? (A8 [Prof. sol. eval.])
- [110] As: Con el 18...No, con el 14. Sí el 14.
- [111] P: ¿En cuál hay mayor ángulo de inclinación? (A9 [Prof. foc.])
- [112] As: En la de clave 12.
- [113] P: Si representáramos la tabla del modelo de Ada, aquí en la gráfica ¿cómo quedaría? (A6 [Prof. desaf.])
- [114] As: Así como esa, empezando el 0 con 8 que era la clave [de Ada]
- [115] P: ¿Con qué otros valores? (A8 [Prof. sol. eval.])
- [116] As: (0, 8), (1, 9), (2, 10),
- [117] P: Si a la clave le llamamos C, piensen en una expresión que resuma toda la actividad (A9 [Prof. foc.])
- [118] As:  $x+c = y$
- [119] P: Esto propone Andrea, ¿qué significa? (A3[Prof. sol. raz. (ext.)])
- [120] As: Que a los números originales se les va a sumar una clave y se tendrán los cifrados. Esto representa la manera en la que encriptamos.

Los logros de los alumnos se pueden observar en [116, 118 y 120] cuando hacen explícita la transición y conexión entre las representaciones tratadas. Para ello, el maestro

intervino, primero enfocando la discusión (**A9 [Prof. foc.]**) mediante la reflexión sobre el significado de un par ordenado específico [103] y, posteriormente, sobre ‘la regla’ que los relaciona [105]. En [107] y [109] pidió construir ejemplos con otra clave de cifrado (**A6 [Prof. desaf.]**) y evaluó las respuestas (**A8 [Prof. sol. eval.]**). En [111], centró la discusión en visualizar el ángulo de inclinación (**A9 [Prof. foc.]**).

La sesión terminó de manera apresurada y eso puede explicar que el profesor, en [107], mostró una acción que provocó abordar la inclinación de la recta, en la cual están incluidos los puntos de cifrado, para explorar la familia de rectas paralelas al variar la clave e identificar que este parámetro mantiene invariante la pendiente de éstas. Pero, en [111] cuando vuelve a preguntar y se responde de manera errónea en [112], el profesor no corrige esta respuesta, aunque en el pizarrón se apreciaban las rectas paralelas. Luego, en [113] y [115], desafía a los alumnos a vincular los modelos tabular y gráfico (**A6 [Prof. desaf.]**) y pide la evaluación de las respuestas (**A8 [Prof. sol. eval.]**). Para finalizar, en [117] y [119], solicita que conecten los modelos anteriores con el algebraico (**A9 [Prof. foc.]**) y que analicen la respuesta de una compañera (**A3 [Prof. sol. raz. (ext.)]**).

### **Discusión de resultados**

La combinación de las herramientas teórico metodológicas sobre las intervenciones del profesor para generar discusiones productivas y preservar la independencia de los estudiantes (SOHMER; MICHAELS; O’CONNOR; RESNICK, 2009; DOERR; ÄRLEBÄCK, 2015) presentadas en la Tabla 1, permitió identificar y analizar patrones en las acciones del profesor y su impacto en los logros de los estudiantes. Se identificaron cadenas de acciones que guiaban a los estudiantes al logro del objetivo considerado en dos grupos (Anexo B, Tabla 2, Grupo A y Grupo Piloto). Aunque en este artículo se presentan las interacciones completas del grupo A, en la Tabla 2 (Anexo B), se pueden identificar patrones que dan cuenta del cambio e incremento en las acciones del profesor y, en consecuencia, en el logro de mejores resultados en el Grupo A.

En la Tabla 2 (Anexo B, Grupo A), es posible observar que el profesor inicia su clase con acciones de motivación (**A4 [Prof. motv.]**), relacionando el tema con actividades cotidianas y relevantes para los alumnos, genera un ambiente donde la búsqueda de métodos para descifrar un mensaje representa realmente un reto para el grupo. Enseguida, su intervención se centra en plantear desafíos continuamente (**A6 [Prof. desaf.]**) para incentivar la búsqueda de relaciones que los lleven a identificar el proceso de cifrado y descifrado de mensajes, a través de diferentes representaciones. Es importante señalar que, después de estos desafíos, el maestro interviene principalmente con el planteamiento

de preguntas para: evaluar las respuestas proporcionadas (A8 [Prof. sol. eval.]); o bien, guiar la discusión cuando las ideas se tornan dispersas (A9 [Prof. foc.]). Una característica relevante del maestro es el tiempo que les proporciona a los estudiantes (A7 [Prof. temp.]) para que exploren el material, analicen las preguntas planteadas y reflexionen sobre sus propias respuestas o las de otros.

Las acciones razonadas del docente propician la construcción, análisis y comprensión del modelo y sus componentes por parte de los alumnos lo que se puede contrastar con la manera tradicional de presentar un ejercicio y evaluarlo, donde el profesor muestra un procedimiento, los alumnos lo aplican y el maestro dice cuál respuesta es correcta.

Sin embargo, las acciones razonadas, como las que aquí exhibe el profesor, no surgen de manera inmediata. Éstas demandan una participación activa y compromiso para apropiarse de las actividades y adaptarlas al contexto y características del grupo. La frecuente implementación de este tipo de actividades, y su respectiva reflexión, desarrolla la experiencia y agencia en el profesor. Por ejemplo, esta secuencia fue implementada primero en un grupo piloto. Las cadenas de acciones que se generaron (Anexo B, Tabla 2, Grupo Piloto) muestran cómo el maestro plantea una gran cantidad de preguntas para enfocar la discusión (A9 [Prof. foc.]) debido a su necesidad de lograr, lo más rápido posible, el objetivo planteado (ALVARADO-MONROY; OLVERA-MARTÍNEZ, 2017). Por ejemplo, en el modelo algebraico, las preguntas que él planteó en el grupo piloto fueron: *¿cómo puedo explicar esto con una fórmula?*, *¿cómo quieren llamarle a la clave?* Estas preguntas llevaron a los alumnos a relacionar, de manera inmediata, la clave con  $x$ . Además, en el Grupo Piloto (Tabla 2 del Anexo B) no fomenta la transición entre modelos en contraste con los resultados mostrados en el Grupo A categoría de análisis (5) de la sección de resultados. Cuando el maestro analiza lo sucedido en esa sesión con el Grupo Piloto, toma la decisión de reformular las preguntas y ampliar la discusión, esto evidencia una transformación en la agencia del profesor, pues toma mayor control al razonar anticipadamente sus acciones, específicamente al plantear preguntas, repite las ideas relevantes y da tiempo a los alumnos para que reflexionen y evalúen sus respuestas.

### **Conclusiones**

Las acciones del profesor, la interpretación de las situaciones presentadas y el manejo del material permitieron que los estudiantes exploraran, analizaran y articularan diferentes representaciones de los modelos propuestos para resolver la situación, así como sus relaciones. Así, los mismos principios aplicados al aprendizaje de los estudiantes se aplican al aprendizaje de los profesores (LESH; DOERR, 2003) y a la par que los



estudiantes desarrollan modelos en situaciones de resolución de problemas, el profesor desarrolla modelos para entender, describir y explicar los resultados de su práctica docente (SCHORR; LESH, 2003). La socialización fue un espacio que favoreció el análisis, la confrontación y la reflexión de las ideas, incluso aquellas que conducían a un conocimiento erróneo, lo que permitió que los estudiantes refinaran sus modelos. Los alumnos tuvieron oportunidad de manipular el material y poner en práctica lo sugerido en las actividades y con ello, surgieron formas de pensamiento matemático conducentes a refinar el modelo para hacerlo ‘más seguro’ prescindiendo del rotor.

Con base en los resultados, es posible considerar a esta secuencia didáctica como una plataforma para extender el conocimiento de los estudiantes y llevarlos a la formalización desde un sustento en una estructura matemática que involucra los conceptos, procesos y representaciones asociadas a una función. A diferencia de las prácticas comunes, en las cuales primero se aprende acerca del concepto y, posteriormente, se aplican los aprendizajes en la resolución de problemas. El proponer situaciones que provoquen la construcción de conocimiento desde la necesidad de comprenderlas o resolverlas, compromete el pensamiento del estudiante y, con ello, se propicia el surgimiento del lenguaje informal que trae consigo significados que trascienden al lenguaje simbólico (SIERPINSKA, 1992) y se deriva un aprendizaje a largo plazo.

A partir de los resultados obtenidos en el Grupo Piloto y el Grupo A, fue posible identificar un cambio en las acciones del profesor. Mientras que en el primero las preguntas las dirigía centrado en su pensamiento y objetivo, en el Grupo A planteaba preguntas encaminadas a que el estudiante hiciera visible su pensamiento insistiendo y esperando por sus respuestas (Tabla 2, Anexo B). También, el docente fue capaz de refinar el diseño e implementación para explorar las formas de pensamiento de los estudiantes al proponer una tarea previa en el Grupo A (diferente a como se presentó en el Grupo Piloto) donde planteó una situación con un mensaje que requería descifrarse [1]. Para el uso del material concreto, en contraste con el Grupo Piloto, él dejó que los alumnos del Grupo A entendieran su funcionamiento [1-16] e identificaran sus debilidades [58-61] para generar la necesidad de refinar sus modelos [62-73].

La criptografía ha sido un contexto favorable para motivar a los estudiantes, dado que desde el inicio entendieron la necesidad actual de proteger información. Así, al presentarles retos para cifrar y descifrar, se provocó el surgimiento de sus propios modelos y el explorar el contexto, a través de múltiples representaciones, ayudó a elaborar entendimiento del concepto de función de manera simultánea como proceso y como

objeto que soporta la protección de información (WHITE, 2009). Además, en armonía con lo sugerido por Doerr (2016) este contexto propició que la situación fuera relevante para ellos y los motivara a involucrarse para mejorar, explorar y extender sus modelos de manera que fueran más seguros, desprendiéndose de los modelos concretos justo como históricamente se ha dado (CORTÉS, DÍAZ, TORRES, TAPIA, y BASURTO, 2005).

A través de las discusiones provocadas por la actividad y por las formas de interacción, los alumnos y el maestro constituyen una explicación que quizás no es posible construir de manera individual y se llega al conocimiento intercambiando ideas. Por ello, resulta importante que el diseño de secuencias didácticas y las acciones del profesor sean consideradas como una unidad. En esta investigación se cumple con el objetivo perseguido, dado que, se proporcionó un ejemplo de un diseño de secuencia didáctica y la manera en la cual el profesor desarrolló habilidades (al implementar primero con un Grupo Piloto y analizar sus logros para refinar sus acciones con el Grupo A) para propiciar que fueran los estudiantes quienes construyeran, desarrollaran y probaran sus modelos matemáticos para proteger y/o descifrar información.

En este sentido, esta investigación puede motivar otros estudios para profundizar en el tema y para considerar en la formación y actualización de profesores: el desarrollo de la práctica inquisitiva del profesor, en la construcción o refinamiento del conocimiento de sus estudiantes; y, en apoyar el desarrollo de competencias en el profesor para orquestar una clase encaminada a generar discusiones productivas.

### **Referencias**

ALVARADO-MONROY, A.; OLVERA-MARTÍNEZ, M.C. (2017). La Criptografía como Contexto para Introducir el Estudio del Concepto de Función en Educación Secundaria. En C. Cristóbal-Escalante, C. Olvera-Martínez y V. Vargas-Alejo (Drs.) *Acta Tomo II Tópicos Selectos de Educación en CITEM. Educación para la Interdisciplinariedad*. (pp. 19-43). Durango, México: ECORFAN.

CAMARENA, P. Didáctica de la matemática en contexto. *Educação Matemática Pesquisa*. 19 (2), 01-26. 2017. DOI: 10.23925/1983-3156.2017v19i2p1-26

CORTÉS, A.; DÍAZ, S.; TORRES, J.; TAPIA, H.; BASURTO, R. *Elementos de criptografía clásica*. Serie Matemática Aplicada y su Enseñanza. México: SMM-CIMAT. 2005.

DOERR, H. Designing Sequences of Model Development Tasks. En C. Hirsch y A. Roth, (Eds.), *Annual perspectives in Mathematics Education 2016: Mathematical Modeling and Modeling Mathematics* (p. 197-206). Reston, VA: NCTM. 2016

- DOERR, H.; ÄRLEBÄCK, J. Fostering Students' Independence in Modelling Activities. En K. Krainer. y N. Vondrova (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of European Research in Mathematics* (pp. 855-861). Praga: CERME. 2015.
- LAMPERT, M. Learning Teaching in, from, and for Practice: What Do We Mean? *Journal of Teacher Education*, 61 (1-2), 21-34. 2010. DOI: 10.1177/0022487109347321
- LESH, R.; DOERR, H. (Eds.) *Beyond constructivism: A models and modelling perspective on teaching, learning, and problem solving in mathematics education*. Mahwah, NJ: LEA. 2003.
- LESH, R.; HOOVER, M.; HOLE, B.; KELLY, A.; POST, T. Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (p. 591-646). Mahwah, NJ: LEA. 2000. DOI: 10.4324/9781410602725.ch21
- SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA (SEP). *Aprendizajes Clave para la Educación Integral. Plan y programas de estudio de la educación básica: Matemáticas*. México: SEP. 2018.
- SIERPINSKA, A. Theoretical perspectives for development of the function concept. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (p. 23-58). Washington: The MAA. 1992.
- SCHORR, R.; LESH, R. A modelling approach for providing teachers development. En R. Lesh y H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: A models and modelling perspective on teaching, learning, and problem solving in mathematics education* (141-158). Mahwah, NJ: LEA. 2003.
- SMITH M.; STEIN, M. *Five Practices for Orchestrating Productive Mathematical Discussion*. Reston VA: NCTM. 2018.
- SOHMER, R.; MICHAELS, S.; O'CONNOR, M. C.; RESNICK, L. Guided construction of knowledge in the classroom: the troika of talk, tasks and tools. En B. Schwartz, T. Dreyfus y R. Hershkowitz (Eds.) *Transformation of knowledge through classroom interaction* (p. 105-129). New York: Routledge. 2009
- WHITE, T. Encrypted objects and decryption processes: Problem-solving with functions in a learning environment based on cryptography. *Educational Studies in Mathematics*, 72, 17-3. 2009. DOI:10.1007/s10649-008-9180



## Anexo B

Tabla 2. Acciones del profesor y logros alcanzados por los estudiantes.

Modelo	Grupo A (Acciones/Logros)		Grupo Piloto (Acciones/Logros)	
<b>Concreto</b>	4,4,6,5,7,8,8,7,4	Descifran el mensaje.	4,9,9,9,5,8	Proporcionan ideas de cómo creen que se puede cifrar.
	1,8, 9	Identifican la necesidad de usar dos cifras para cada letra y evitar la confusión.	4,9,4	Reconocen la importancia de cifrar.
	6,8,5,7,1,6	En el segundo mensaje, identifican que hay una clave y deben “avanzar” para encontrar la clave.	6,8,3,8,9,6,3,8,8,6	Identifican la necesidad de que cada letra esté representada por un número de dos cifras.
	8, 9,1,8,3,4	Descifran mensaje con clave.	1,6	Descifran un mensaje.
	1,5,1,6,4,7	Socializan las ideas y concluyen el método de descifrado y cifrado.	6,9,3,6	Identifican el funcionamiento del rotor para cifrar con clave.
	1,1,1,6,7,7,9,5,9,6,9, 9,8,7	Cifran un mensaje. Encuentran la clave a partir de un mensaje cifrado por otro compañero.	3,9,6,7,6,8	Descubren el proceso para encontrar la clave.
	6,8	Identifican la presencia de un ciclo de 26 letras.	8,3,9	Encuentran claves.
			9,9,8	Reconocen el ciclo.
<b>Algebraico</b>	1,9	Establecen fórmula para cifrar $Mc = Pi + C$ .	8,6,9	Establecen la fórmula $y = x + b$ para cifrar un mensaje: $x$ , es contraseña; $b$ , es mensaje; $y$ , es mensaje oculto
	9	Establecen fórmula para descifrar $Mc = Pf - C$ .	5	Verbalizan el proceso de cifrado.
	6,8,8,9,8	Cifran con clave y discuten sobre la necesidad de cifrar el espacio.		
<b>Tabular</b>	8,9,8,6,8	Cifran con espacio y clave.	8,5,9,9,9,9,6,9, 9,9,6,8,8,1,8,3	Identifican el cero para indicar espacio, reconocen la existencia de un ciclo, usan la tabla para cifrar.
<b>Gráfico</b>	9,3,6,1,8,9,8,8,6,7	Identifican que cada punto tiene coordenadas $(Mo, Mc)$ .	6,5,9,7,8,9,9,5, 9,1,6,5,1,5,5,6	Interpretan las coordenadas como (mensaje, posición final). Por ejemplo, (2,6) es $(B, B + 4)$ .
	9	Reflexionan sobre la variable discreta (no tiene sentido 1.5)		
<b>Transición entre modelos</b>	9,9,6,8,9,6,8	(0,8); (1,9); (2,10) Interpretan las coordenadas como un mensaje con clave 8.		
	9,3	Interpretan $y = x + c$ como la forma de cifrado.		

Fuente: Elaboración propia.

Recebido: 14/02/2019  
Aprovado: 07/08/2019