ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i1p*512-531*

Competencia algebraica de profesores de matemáticas

Algebraic competence in teacher of mathematics

LILIA P. AKÉ [1]
VICTOR LARIOS OSORIO [2]

Resumen

El presente artículo tiene por objetivo exponer una caracterización de competencia algebraica articulada en niveles e indicadores de desarrollo. Dicha caracterización fue utilizada para el análisis de la práctica matemática realizada por profesores de matemáticas en servicio. De esta manera, a través de un estudio cualitativo de tipo exploratorio se indaga y describe la competencia algebraica manifestada por estos profesores que inciden en el nivel bachillerato mexicano (que atiende a estudiantes de entre 16 y 19 años). Los resultados sugieren que los docentes presentan inconsistencias al resolver tareas que demandan un nivel tres de competencia algebraica por lo que la articulación de programas formativos basadas en esta propuesta contribuirá al desarrollo de competencias algebraicas en los docentes de matemáticas.

Palabras clave: *competencia algebraica, algebrización, profesor en servicio.*

Abstract

The objective of this paper is to present a characterization of algebraic competence articulated in levels and development indicators. This characterization was used to analize the mathematical practice of inservice teachers of mathematics. Through a qualitative and exploratory research design, the algebraic competence in the teachers on high school (with students between 16 and 19 years old) is investigated and described. The results suggest that teachers present inconsistencies when solving tasks that demand a level three of algebraic competence, so the articulation of training programs based on this proposal will contribute to the development of algebraic competences in teachers of mathematics.

Keywords: *Algebraic competence, algebraization, inservice teacher.*

---

[1] Doctora en Didáctica de la Matemática, Investigador Posdoctoral en la Maestría en Didáctica de las Matemáticas, Universidad Autónoma de Querétaro, México - lake86@gmail.com
[2] Doctor en Ciencias con la especialidad en Matemática Educativa, Profesor e Investigador en la Maestría en Didáctica de las Matemáticas, Universidad Autónoma de Querétaro, México - vil@uaq.mx

Introducción

El álgebra escolar es un punto de interés para la educación matemática debido a su importancia dentro del conocimiento matemático, pero sobre todo por el difícil acceso conceptual que tienen la mayoría de los estudiantes sobre su contenido. Esto queda revelado en diversas pesquisas (KIERAN, 2007; FILLOY; PUIG; ROJANO, 2008; CUESTA; ESCALANTE; MÉNDEZ, 2013) que evidencian que aun después de cursar álgebra durante varios años los errores persisten y, aunque los estudiantes muestran mayor flexibilidad para el trabajo con las expresiones algebraicas debido a su contacto con matemáticas avanzadas, su competencia algebraica no se desarrolla como se esperaría. Esta incomprensión permanece desde la escuela secundaria hasta los estudios universitarios (CUESTA; ESCALANTE; MÉNDEZ, 2013). Es por esta razón que la formación inicial y continua del profesor de matemáticas adquiere relevancia, dado los efectos de sus competencias docentes en el desempeño de sus estudiantes. Así lo reportan las diferentes pesquisas que se han centrado desde la perspectiva de la disciplina y desde la formación del profesorado de matemáticas, particularizándose en determinar los conocimiento y competencias que requiere un profesor de cualquier nivel, para afrontar la enseñanza de las matemáticas (PONTE; CHAPMAN, 2016; SOWDER, 2007). Por lo tanto, profundizar en estos estudios centrándose en el álgebra resulta sustancial porque los profesores de matemáticas precisan tener conocimientos sobre este tópico y sobre lo que implica su enseñanza. La finalidad es que los profesores sean capaces de movilizar la creación de situaciones que promuevan en los alumnos un razonamiento algebraico que implique una compresión profunda de los conceptos del álgebra y la capacidad de aplicarla a una amplia gama de temas; lo que idealmente sería desarrollar una competencia algebraica en ellos (HUMBERSTONE; REEVE, 2008; OLDENBURG, 2010).

Con objeto de indagar sobre la competencia algebraica de profesores de matemáticas se utilizaron dos actividades que involucran la búsqueda de relaciones funcionales y entre variables. De esta manera, como antesala, en el apartado dos se expone la sinergia entre los términos comprensión, conocimiento y competencia. En el apartado tres se utiliza el constructo de los niveles de algebrización, procesos matemáticos y complejidad de las tareas matemáticas, como orientadores de la competencia algebraica. En el apartado cuatro se describe la metodología, la muestra y se justifica la selección de las tareas utilizadas. En el quinto apartado se expone la caracterización de la competencia algebraica de los profesores involucrados. Finalmente, en el último apartado se apuntan algunas de las conclusiones.

Competencia matemática desde el Enfoque Ontosemiótico

Particularmente desde el Enfoque Ontosemiótico (EOS), Godino y colaboradores (GODINO; GIACOMONE; BATANERO; FONT, 2017; GODINO; RIVAS; CASTRO; KONIC, 2012; PINO-FAN, GODINO; FONT, 2011) han venido desarrollando un modelo de conocimiento y competencia didáctico-matemáticos (CCDM). En este modelo el conocimiento del profesor se articula en tres dimensiones. La primera dimensión es el conocimiento del contenido matemático *per-se*, en el cual los autores distinguen el conocimiento común del ampliado. La segunda dimensión es el conocimiento didáctico-matemático que articula seis facetas: epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica. Finalmente, la tercera dimensión es la meta didáctica-matemática que refiere al conocimiento necesario para reflexionar sobre la propia práctica, así como para detectar y valorar las mejoras potenciales de la práctica docente y el proceso de instrucción.

Por otro lado, la competencia en el modelo CCDM se entiende desde la perspectiva de la acción competente, considerándola como el conjunto de conocimientos que permite el desempeño eficaz en los contextos propios de la profesión. Se trata de una potencialidad que se actualiza en el desempeño de acciones eficaces (FONT, 2018); es decir, se toma como indicador de competencia "una acción eficaz realizada en un determinado contexto con una determinada finalidad" (FONT, 2011, p. 18). De esta manera en el marco del EOS las nociones de conocimiento y competencia se relacionan, teniendo en cuenta las conexiones entre práctica y objeto. Tal como Godino et al. (2017, p. 95) señalan

> La práctica, como acción orientada al fin de resolver un problema o realizar una tarea, conlleva una competencia por parte del sujeto que la realiza. Pero la realización competente de una práctica implica la intervención de objetos interconectados que regulan y emergen de la misma, los cuales constituyen el conocimiento declarativo o discursivo correspondiente.

Ligado a la noción de conocimiento y competencia emerge el de comprensión. Se entiende a la comprensión como una competencia (y no como proceso mental), de modo que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera adecuada en diferentes prácticas matemáticas (GODINO, 2002). De esta manera, la competencia implica tanto conocimiento como comprensión. "Desde un punto de vista pragmático, conocer/saber implica el uso competente de los objetos constituyentes del conocimiento, la capacidad de relacionar entre sí dichos objetos, o sea, comprender, y de aplicarlos a la solución de problemas” (GODINO et al., 2012, p. 3).

Estas interpretaciones también son compartidas por otros autores. Por ejemplo, González y Wagenaar (2003) mencionan que la competencia implica conocer y comprender, es decir, implica un conocimiento teórico de un campo académico y también refiere a la aplicación práctica y operativa de ese conocimiento a ciertas situaciones. Por su parte Solar, García, Rojas y Coronado (2014, p. 37) mencionan que “conocimiento y competencia se construyen de manera simultánea, articulada y complementaria en una relación de influencia recíproca”.

Bajo estas afirmaciones, toma relevancia la competencia algebraica del profesorado de matemáticas en la resolución de tareas y actividades escolares, particularmente las de índole algebraica. Lo previo se justifica porque existen pocas investigaciones enfocadas al estudio de las compentencias en álgebra (y en otras áreas de las matemáticas específicas como el cálculo, probabilidad, geometría, etc.). Además, el aprendizaje del álgebra representa un área de difícil acceso conceptual para los estudiantes, situación que suscita la incidencia en errores de manera reiterada y que por tanto restringe la comprensión de los contenidos de esta materia (CARRAHER; SCHLIEMANN; BRIZUELA; EARNEST, 2006). Por lo tanto, los profesores deben desarrollar una competencia algebraica para que puedan incidir, posteriormente en el desarrollo de las competencias algebraicas de sus estudiantes; sobre todo, porque según estudios realizados sobre el profesorado (DARLING-HAMMOND; HOLTZMAN; GARLIN; HEILING, 2005) existen relaciones significativas entre las competencias de los docentes y el desempeño de sus estudiantes.

Elementos teóricos para una caracterización de competencia algebraica

En el modelo CCDM, la noción de competencia, a diferencia de la noción de conocimiento, se articula en dos dimensiones; la primera refiere a la competencia matemática y la segunda a la competencia de análisis e intervención y conocimiento didácticos (FONT, 2018; GODINO et al., 2017). En este documento abordamos la competencia matemática, focalizando el álgebra. Como previamente se introdujo, la formulación de la competencia desde el EOS se entiende como el conjunto de conocimientos que permiten una acción eficaz orientada al fin de resolver un problema. Sin embargo, para ser operativa se necesita una caracterización, es decir, niveles y descriptores que permita su desarrollo y evaluación (FONT, 2018). Esto se confirma con lo que Seckel y Font (2015, p. 60) mencionan:

> El punto de partida debe ser una tarea que produce la percepción de un problema que se quiere resolver, para lo cual el futuro profesor debe movilizar habilidades, conocimientos, para realizar una práctica que intenta dar solución al problema. Dicha práctica se habrá realizado con más o menos éxito (logro). Dicho logro se puede considerar como evidencia de que la persona puede realizar prácticas similares a las que están descritas por alguno de los descriptores de la competencia, el cual a su vez se suele asociar a un determinado nivel de competencia.

A apartir de esta necesidad de caracterización de las competencias, se utilizaron 3 criterios para articular los niveles y descriptores de la competencia algebraica: niveles de algebrización, complejidad de la tarea y los procesos matemáticos. Los indicadores del modelo de niveles de algebrización (AKÉ; GODINO; GONZATO; WILHELMI, 2013; GODINO; WILHELMI; NETO; AKÉ; CONTRERAS; ESTEPA; LASA, 2016) es utilizado para detallar la práctica matemática de carácter algebraico. El modelo sugiere 6 niveles de algebrización, los niveles del 0 al 2 son considerados protoalgebraicos, mientras que los niveles del 3 al 6 están enmarcados en el dominio del álgebra. Según este modelo "los objetos algebraicos inmersos en el pensamiento funcional y estructural, que pueden estar o no en un contexto de modelización, van adquiriendo un significado diferente conforme haya una "evolución" en los procesos de generalización, simbolización y transformación" (AKÉ; GODINO, 2018, p. 175). A continuación, se describen los niveles de algebrización recogidos de los trabajos de los autores (ver cuadro 1).

Los niveles de algebrización (NA) contienen indicativos graduales de uso y tratamiento de objetos algebraicos que deberían estar presentes en una práctica matemática, con el objetivo de promover progresivamente un pensamiento algebraico. Sus descriptores ofrecen orientación para caracterizar las prácticas matemáticas en términos de niveles de algebrización. Este hecho se utiliza como un primer indicativo para denotar una competencia en términos algebraicos, es decir, ser competente en álgebra implica expresar un nivel de algebrización específico ante determinada tarea que lo promueve. La propuesta que se plantea para una primera aproximación a una competencia algebraica queda enmarcada dentro del nivel 3 de algebrización, es decir, se trabaja con el significado de equivalencia del signo igual, se opera con las variables y se utiliza el registro simbólico-literal.

Cuadro 1. Niveles de algebrización de la práctica matemática

Nivel	Descomposición de los indicadores
Nivel cero de algebrización	*Objetos algebraicos:* No hay objetos algebraicos, se trabaja com las variables como números particulares y con el significado operacional del signo igual. *Transformaciones*: Solo hay cálculos aditivos y multiplicativos, es decir, operaciones aritméticas con números específicos. *Simbolización:* El objeto es reconocido como una nueva entidad y representada de manera informal (icónica, indexical o gestual, tabular, gráfico, etc.). Por lo tanto, se utiliza un lenguaje diferente al simbólico-literal o alfanumérico. Por ejemplo, en tareas de carácter estructural no se reconocen propiedades como la asociativa, conmutativa y otras. Por otro lado, en tareas de carácter funcional, se puede iniciar el trabajo con patrones, se determina una regla recursiva.
Nivel 1 de algebrización	*Objetos algebraicos:* Se trabaja con conjuntos y clases de números. Se usa la variable en su significado de incógnita y se trabaja el significado de equivalencia del signo igual. *Transformaciones:* Se realizan operaciones con número particulares y se aplican propiedades de la estructura algebraica en los naturales. *Simbolización:* El objeto es reconocido como una nueva entidad y representada de manera informal (icónica, indexical o gestual, tabular, gráfico, puede manifestarse el uso del lenguaje natural y el uso de símbolos). Por lo tanto, se utiliza un lenguaje diferente al alfanumérico. Por ejemplo, en tareas de tipo estructural se identifican propiedades y relaciones; además, se trabaja la equivalencia a través de "ecuaciones numéricas" enmarcadas dentro del pensamiento relacional. En tareas de carácter funcional, se expresa una regla general.
Nivel 2 de algebrización	*Objetos algebraicos:* Se continúa con el trabajo con conjuntos y clases de números. Se utiliza la variable como incógnita y como número generalizado. Se trabaja con el significado de equivalencia del signo igual; es posible generar el planteamiento y tratamiento de ecuaciones y el planteamiento de funciones particulares. *Transformaciones:* Operaciones con número particulares, pero se aplica propiedades de la estructura algebraica en N y la igualdad como equivalencia. *Simbolización:* El objeto es representado de manera simbólico-literal o formal, se le identifica como un nuevo objeto. En tareas de tipo estructural se resuelven ecuaciones de la forma $Ax + B = C$ o bien resolución de ecuaciones con cajones vacíos o símbolos, pero en esos casos no se opera con ellos en ambos lados de la ecuación. En el caso de las tareas de tipo funcional se obtiene una regla general.
Nivel 3 de algebrización	*Objetos algebraicos:* Se continúa con el trabajo con conjuntos y clases de números. Se trabaja con el significado de equivalencia del signo igual. *Transformaciones:* Se opera con las variables, por tanto, existe un tratamiento de ecuaciones y de funciones particulares. *Simbolización:* El objeto es representado de manera simbólico-literal o formal, se le identifica como un nuevo objeto. Por ejemplo, en tareas estructurales se resuelven ecuaciones de la forma $Ax + B = Cx + D$, es decir, se opera con la literal en ambos lados de la ecuación. Se puede realizar este trabajo con la equivalencia utilizando símbolos. En el caso de las tareas con carácter funcional, se obtiene una regla general y se opera con las variables para obtener formas equivalentes de expresión. En este nivel la actividad forma parte de un conocimiento de la estructura y la equivalencia de las ecuaciones o funciones subsecuentes que se obtiene al resolver una ecuación o función reconociendo "formas" matemáticas existentes entre los elementos, lo que los autores denominan sentido estructural. El trabajo con sistemas ecuaciones y operaciones con funciones (en ambos casos expresiones particulares) son característicos de este nivel también.

Fuente: Elaboración propia

Continuación del Cuadro 1. Niveles de algebrización de la práctica matemática

Nivel 4 de algebrización	*Objetos algebraicos:* Uso de variables y parámetros, emerge la noción de familia de ecuaciones y de funciones. Se trabaja con el significado de equivalencia del signo igual. *Transformaciones:* Se reconoce el significado de los parámetros, pero no se opera con ellos; se opera con las variables. Los parámetros son entendidos como valores fijos que no cambian o bien adquiere sistemáticamente valores específicos. *Simbolización:* El objeto es representado de manera simbólico-literal o formal, se le identifica como un nuevo objeto. En tareas estructurales y en las de tipo funcional se trabaja con familia de ecuaciones y funciones. En este caso, las funciones y ecuaciones representan una clase de situaciones o familia de gráficos, se discrimina entre el dominio y el rango de funciones y/o ecuaciones paramétricas, es decir, funciones que asignan una función o ecuación específica a cada valor del parámetro.
Nivel 5 de algebrización	*Objetos algebraicos:* Uso de variables y parámetros; familia de ecuaciones y de funciones. *Transformaciones:* Tratamiento de variables y parámetros; se reconoce el significado de los parámetros y se opera tanto con ellos. Los parámetros son entendidos como incógnitas. En este sentido, las operaciones en las que intervienen parámetros, cuando son realizadas de manera comprensiva y no puramente algorítmica, implican una fase superior en el proceso de reificación de los objetos intensivos representados, esto es, familias de ecuaciones y funciones. *Simbolización*: El objeto es representado de manera simbólico-literal o formal, se le identifica como un nuevo objeto. En tareas estructurales está el trabajo sintáctico que involucran variables y parámetros como podría ser la obtención de la fórmula general para la ecuación de segundo grado; del mismo modo para las tareas de tipo funcional se puede referir por ejemplo a la demostración de la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica. En este nivel, la comprensión de que la solución de una expresión que contiene un parámetro resulta ser otra expresión que puede ser considera como un objeto que, a su vez, puede ser sometido a otros procedimientos es esencial.
Nivel 6 de algebrización	*Objetos algebraicos:* Uso de variables y parámetros; familia de ecuaciones y de funciones; propiedades estructurales y funcionales. *Transformaciones:* Tratamiento de variables y parámetros; aplicación de propiedades. *Simbolización:* El objeto es representado de manera simbólico-literal o formal, se le identifica como un nuevo objeto. En tareas de tipo estructural la introducción de algunas estructuras algebraicas (como la de espacio vectorial, o la de grupo), podría poner en juego un conjunto de objetos matemáticos sobre los cuales se definen operaciones que cumplen un sistema de propiedades específicas. Para el caso de tareas de carácter funcional el análisis del álgebra de funciones pone en juego objetos y procesos algebraicos de mayor grado de generalidad cuando se refiere a una función cualquiera y se opera con ella para producir otra nueva función y estudiar sus propiedades; por ejemplo, cuando se determina que la composición de funciones no es conmutativa.

Fuente: Elaboración propia

Este primer posicionamento no insinúa que el pensamiento algebraico sólo se geste en contextos simbólicos-literales, puesto que las investigaciones sobre el pensamiento algebraico temprano (KIERAN; PANG; CHIFTER; FONG, 2016) indican lo contrario; sin embargo, sí implica que la notación simbólica es la más adecuada para producirlo. Esto significa que no se puede referir a una competencia algebraica si no está enmarcada propiamente en el terreno del álgebra; este es nuestro posicionamiento inicial. Así, coincidimos con Arcavi (2007) al expresar que ser competente en álgebra implica, entre otras cosas, el ejercicio de esa transición bidireccional y flexible de la manipulación algebraica desprovista de significado a través de reglas y procedimientos sintácticos.

Por otro lado, retomamos los aportes de Solar et al. (2014) sobre la competencia matemática para situarla y particularizarla al dominio del álgebra. Para estos autores las competencias matemáticas se constituyen en procesos matemáticos, los cuales sustentan su desarrollo y con ellos el "estudiante despliega sus capacidades para avanzar, de manera progresiva, hacia el desarrollo de una competencia matemática" (p. 41). En palabras de estos autores, "las competencias matemáticas fueron concebidas la capacidad para resolver problemas matemáticos; la capacidad de argumentar y comunicar el pensamiento matemático en forma escrita y oral" (SOLAR et al., p. 37). Esto también es concordante con los que plantea Rico, sobre que "la competencia o alfabetización matemática se refiere a las capacidades de los estudiantes para analizar, razonar, comunicar, argumentar eficazmente cuando enuncian, formulan y resuelven problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones" (RICO, 2007, p. 49). De esta manera, retomamos la noción de procesos matemáticos de razonar (este interpretado desde el razonamiento algebraico y los niveles de algebrización), solucionar y/o resolver, así como también argumentar y comunicar (SOLAR et al., 2014; RICO, 2007) para situarlos al trabajo algebraico en el aula. Así, ante una tarea que implique un nivel tres de algebrización, el proceso de resolver, interpretar, validar y comunicar refiere a distintos niveles de competencia. Se precisa reconocer que, aunque la tarea demande un nivel 3 de algebrización, es posible situarla en tres contextos diferentes, según la matemática escolar y nivel de complejidad de la tarea planteada. Las del primer contexto, son tareas que resultan familiares y movilizan conocimientos ya practicados (RICO, 2007). Desde nuestra postura respecto al trabajo algebraico, también demandarían la formación y transformación de expresiones, ecuaciones y funciones, lo que Kieran (2007) denotarían actividades de tipo generacional y transformacional. Denotamos a estas actividades como prototípicas y/o rutinarias. Las tareas del segundo contexto están basadas en situaciones, se trata de tareas que no necesariamente son rutinarias, aunque resulten familiares a los estudiantes, plantean mayores exigencias en interpretación y conexión (RICO, 2007). Situamos estas tareas en contextos de aplicación o modelización en las que el álgebra se utiliza como herramienta, lo que Kieran (2007) denomina actividad de tipo global. Finalmente, las tareas del tercer contexto demandan una mayor comprensión, razonamiento y reflexión, así como realizar generalizaciones (RICO, 2007). Denotamos a estas tareas como abiertas. De esta manera, se propone que la competencia algebraica para un nivel 3 de algebrización (NA-3, NCA) debe estar en función a 3 ejes que se pueden apreciar en el cuadro 2. En este punto es importante mencionar que se pueden describir competencias para un nivel 4 de algebrización (NA-4, NCA), considerando dichos ejes, y de la misma manera para los niveles posteriores; sin embargo, esto queda fuera del alcance de este artículo dado que en la experiencia que se describe se utilizaron tareas cuyo alcance es de un nivel 3 de algebrización.

Cuadro 2: Componentes e indicadores de la competencia algebraica

	Componentes de la competencia algebraica		
	Nivel 3 de algebrización	Tipo de tarea escolar según su complejidad y nivel de algebrización	Tipo de proceso matemático
Indicadores	A partir de la práctica algebraica manifestada por el resolutor se caracteriza las representaciones y la simbolización, así como las trasformaciones que se realizan sobre los objetos algebraicos (con o sin apoyo de la tecnología). Es decir, expresar en su práctica matemática un nivel 3 de algebrización	El resolutor debe abordar tareas que impliquen un nivel 3 de algebrización en 3 tipos de contextos: a) Ejercicios prototípicos, y/o rutinarios b) Situaciones de aplicación o modelización c) Problemas abiertos Con el análisis a priori de la tarea se delimita el alcance de la práctica matemática esperada del resolutor y los objetos algebraicos de carácter estructural o funcional que se podrían movilizar.	El resolutor debe manifestar los siguientes procesos matemáticos: a) Resolver b) Interpretar c) Validar d) Comunicar

Fuente: Elaboración propia

Los componentes descritos en el cuadro indican que trabajar el simbolismo algebraico adecuadamente, implica un primer nivel de competencia algebraica (NCA-1) para resolver ejercicios tipo y rutinarios; esto es plantear relaciones estructurales y funcionales (ecuaciones y funciones) y ejecutar el trabajo algebraico para resolver correctamente la situación. Se denota ejercicios tipo y rutinarios bajo el reconocimiento de que éstos se gestan en el sistema escolar y se presentan de manera rutinaria en los libros de texto. Por otro lado, un segundo nivel de competencia algebraica (NCA-2) implica el trabajo con situaciones de aplicación y/o modelización frente a las cuales se establece relaciones, conexiones y se integra conocimientos matemáticos que permiten identificar y aplicar propiedades o invariantes para resolver e interpretar adecuadamente este tipo de situaciones. Finalmente, el tercer nivel de competencia (NCA-3) demanda abordar problemas abiertos en las que implica ofrecer generalizaciones para resolverlos; además de ofrecer validaciones de las soluciones a este tipo de problemas, así como comunicarlos.

También implicaría, si es necesario referir a problemas más simples para alcanzar la solución.

Elementos metodológicos del estudio

El estudio cualitativo de tipo exploratorio (CRESWELL, 2009), que pertenece a una investigación más amplia en curso, tiene como objetivo describir la práctica algebraica de los docentes de matemáticas en términos de la competencia algebraica. Cabe mencionar que el trabajo realizado con los profesores fue de acompañamiento según los involucrados requerían alguna orientación para llevar a cabo la realización de las tareas.

La intervención se realizó con dos profesores de matemáticas jóvenes que imparten clase a nivel bachillerato (nivel educativo mexicano que atiende a estudiantes de entre 16 y 19 años) que cuentan con una Licenciatura en Matemáticas Aplicadas y que acababan de finalizar una Maestría en Didáctica de la Matemática (MDM) de tipo profesionalizante. Este tipo de maestrías, en México, pretenden no sólo la profesionalización del docente de matemáticas sino acercar la investigación en Didáctica de la Matemática a los profesores y hacerla orientativa de su práctica docente; el objetivo de la MDM no es, por tanto, formar investigadores. Los participantes del estudio expresaron estar familiarizados con actividades que involucran el estudio de relaciones y generalización. La elección de esta muestra fue incidental, por tanto, no aleatoria (LEÓN; MONTERO, 2003) ya que los profesores participaron en tanto que estaban recién graduados misma generación de la MDM y de su interés en participar en el estudio.

Por otro lado, la selección de las tareas estuvo guiada por el nivel de algebrización que conlleva la resolución de las tareas, que desde nuestra propuesta se toma un nivel 3 de algebrización como punto de partida. Se eligieron tareas que plantean situaciones abiertas, no típicas de carácter funcional y estructural en las que se solicita realizar validaciones de la propia actividad matemática llevada a cabo (NCA-3), esto considerando la formación académica de los participantes.

A continuación, se describen las 2 tareas utilizadas, con 4 consignas o ítems cada una, y la intencionalidad de cada consigna. La primera tarea, de carácter funcional, tomada de Moreno (1998) refiere al trabajo con la literal como variable y a un proceso de generalización a través del análisis de patrones. Los primeros dos ítems a) y b) solicitan resolver la tarea orientando la práctica matemática del docente a un primer análisis de los casos particulares cuyo caso general implica una función cuadrática (ver cuadro 3).

Cuadro 3. Tarea sobre el trabajo con la variable y generalización de patrones

Tarea 1. Considera un plano, éste queda divido en dos regiones si se considera una recta que lo atraviese, en 4 regiones si se consideran 2 rectas y 7 regiones si se consideran 3 rectas; ahora: a) ¿Cuál es el mayor número de regiones en que queda dividido si se consideran 10 rectas? b) ¿Es posible determinar el mayor número de regiones en queda dividido el plano cuando se consideran *n* rectas? Si es posible demuéstralo y si no es posible explica por qué c) ¿Cómo sabes que lo realizado previamente es correcto? Justifica d) ¿Qué conocimientos matemáticos movilizaste para llegar a la solución de la actividad?

Fuente: Elaboración propia

Para resolver esta parte de la tarea el profesor de matemáticas tiene que reconocer objetos algebraicos que emergen de la solución tales como la noción de función y el de variable; se espera que transite de un lenguaje numérico (para el análisis de los casos particulares) al simbólico-literal (para expresar la regla general). La identificación del patrón requiere la interpretación y análisis de las relaciones entre el número de rectas, el número de intersecciones entre las rectas y el número de regiones. El nivel de algebrización que implica la resolución de esta tarea es 2 dado que no se opera para obtener formas equivalentes de la expresión encontrada; si esto se realizara, entonces se estaría frente a un nivel 3 de algebrización, que es lo que se espera.

La segunda tarea, de carácter estructural fue retomada de Ruiz-Munzón, Bosch, & Gascón (2011), refiere al análisis de relaciones y al trabajo con la literal como variable. En esta tarea, los ítems a) y b) solicitan resolver la tarea orientando la práctica matemática del docente a obtener una relación general de dependencia y luego particularizarla a un caso (ver cuadro 4).

Cuadro 4. Tarea sobre el trabajo con la variable y relaciones entre figuras geométricas

Tarea 2. Considera un triángulo isósceles inscrito en una circunferencia cuya la altura relativa al lado desigual del triángulo mide 3/2 del radio de la circunferencia. a) ¿Cómo depende el área del triángulo del radio de la circunferencia circunscrita? b) Si el área del triángulo fuera de $3\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia circunscrita? c) ¿Cómo sabes que tus respuestas a las preguntas previas son válidas o correctas? Explica d) ¿Qué conocimientos matemáticos movilizaste para llegar a la solución de la actividad?

Fuente: Elaboración propia

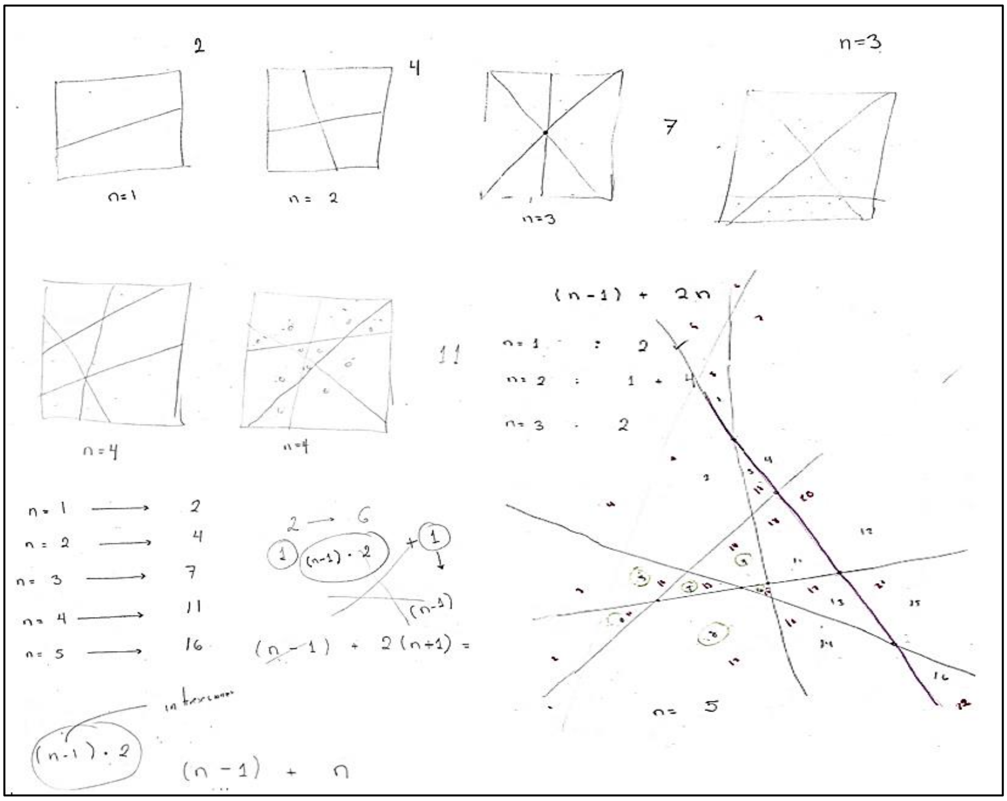
La resolución de esta parte de la tarea le implica al profesor de matemáticas la identificación de objetos algebraicos tales como las propiedades del triángulo isósceles, rectángulo y el circuncentro; además existe una interpretación de equivalencia del signo igual pues precisa que realice sustituciones y simplificaciones; también se espera que utilice un lenguaje simbólico-literal con interpretación geométrica. El nivel de algebrización que implica la resolución de la tarea es de un nivel 3 dado que se trabaja en términos de una variable, el radio. Por otro lado, en ambas tareas, los ítems c) y d) refieren a un análisis de su práctica matemática. Estas consignas proporcionan información complementaria que solicita a los profesores comunicar el proceso de resolución que siguieron y la toma consciente de los conocimientos que movilizaron para resolver la tarea, a partir de las respuestas obtenidas; también se solicitan las validaciones de la propia práctica matemática realizada. De manera a priori, estas dos consignas demandan los procesos matemáticos de comunicar y validar.

Aproximacón a la compentencia algebraica del profesor de matemáticas

Los ítems a) y b) de la tarea 1 y 2 solicitan explícitamente el proceso matemático de resolver la tarea. En el caso de la tarea 1, el del plano divido por rectas, se solicita determinar un caso particular (ítem a) y posteriormente encontrar una expresión general (ítem b).

En esta tarea, el Profesor A comienza la resolución bosquejando casos particulares, cuando se tienen 3 rectas comprueba que la manera en la que éstas son intersecadas influye en el número de regiones que se pueden formar (ver figura 1).

Figura 1. Práctica matemática del profesor A en la Tarea 1



Fuente: Elaboración propia

Procede de manera similar cuando se tienen 4 rectas. A partir de los primeros 5 casos particulares, el Profesor A intenta encontrar una regla que describa el comportamiento de las regiones considerando el número de rectas; sin embargo, tras varios intentos no logra concretar la expresión general. Durante su práctica matemática también manifiesta: "cada recta representa dos regiones" y "con $\mathrm{n} = 4$, máximo puedo intersecar 3", con esto se refiere al número de intersecciones que se puede obtener con 4 rectas. Lo anterior indica que intenta conectar el número de rectas, con el número de regiones y el número de intersecciones entre las rectas. Expresa que "$(\mathrm{n} - 1)$ es el número de intersecciones" lo cual no es correcto, ya que el número de intersecciones es $f(n) = \frac{n(n-1)}{2}$ donde n es el número de rectas y $f(n)$ el número de intersecciones, esto indica una interpretación errónea de la tarea. Además, articula expresiones incompletas como: $(n - 1) + n, (n - 1)2 + 1, (n - 1) + 2(n + 1)\ y\ (n - 1) + 2n$, sin alcanzar a encontrar la regla general.

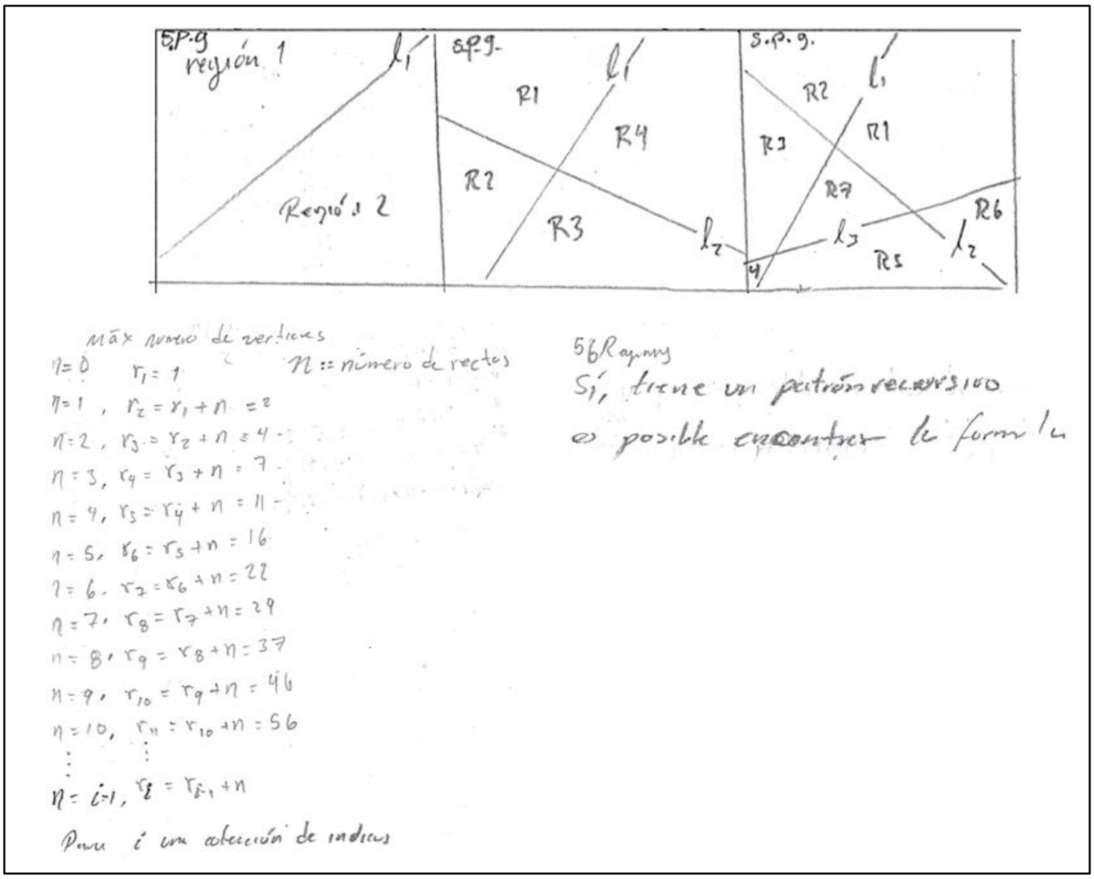
Aunque el Profesor A conoce la relación de dependencia de las variables n y $f(n)$, no logra identificar el patrón que le permitiría generalizar, por lo que su práctica matemática no alcanza un nivel 3 de algebrización, el proceso matemático de resolver la tarea no emerge. De esta manera, el Profesor A no proporciona respuesta alguna a los ítems a) y b). El hecho es entendible puesto que este profesor no llegó a la resolución de la tarea para el caso particular en el que se tienen 10 rectas en el plano. La resolución incompleta de este profesor también convergió en la falta de una explicación del por qué sus respuestas son correctas (ítem c) e indicar los conocimientos matemáticos que movilizó para llegar a la solución (ítem d).

Para esta misma tarea, El profesor B halla el número de regiones que se forman con 10 rectas indicando que son 56 (ítem a); además responde afirmativamente al ítem b) de la siguiente manera: "Sí, tiene un patrón recursivo, es posible encontrar la fórmula". Sin embargo, aunque afirma que es posible encontrar una "fórmula", no determina la regla general para el número de regiones que se forman con n rectas.

En su práctica matemática (ver figura 2) evidencia que alcanza a encontrar la relación: número de regiones en la posición $(n - 1)$ más el número de rectas de la posición siguiente (n) es igual al número de regiones en dicha posición (n), un patrón recursivo; como se indica, actividad característica de un nivel cero de algebrización. El Profesor B, tampoco completa la tarea, es decir, el proceso matemático de resolver no fue alcanzado, por lo que es comprensible que no justifique una respuesta a la que no llegó (ítem c) e identifique los conocimientos que requirió para resolver la tarea (ítem d).

Se aprecia que mientras el Profesor A busca relaciones en sus dibujos geométricos, el Profesor B advierte relaciones numéricas. Ambas prácticas matemáticas desarrolladas evidencian una tendencia al uso del simbolismo y aunque éste es característico de la práctica algebraica consolidada, no necesariamente se piensa que el uso de las letras es una condición necesaria para el modo algebraico de pensar, pues el reconocimiento de lo general es un requerimiento previo para denotar el simbolismo; además, existe la posibilidad de manipulación simbólica sin sentido (ZAZKIS; LILJEDAHL, 2002), aunque con ello se busque el convencimiento de otros y el autoconvencimiento para validar el procedimiento ejecutado (HAREL; SOWSDER, 1998).

Figura 2. Práctica matemática del profesor B en la Tarea 1



Fuente: Elaboración propia

Esta primera tarea implica encontrar la función que describa el comportamiento entre el número rectas y el número de regiones, es decir, $f(n) = \frac{n(n-1)}{2} + n + 1$; también dependiendo de las observaciones de las relaciones es posible llegar a que $f(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1$, ambas expresiones son equivalentes a la expresión $f(n) = \frac{n^2+n+2}{2}$. El análisis de las relaciones podría estar orientado por el análisis de casos particulares en un arreglo tabular (ver tabla 1).

Pese a que los profesores manifestaron estar familiarizados con este tipo de actividades de búsqueda de patrones y obtención de una regla general, no alcanzaron a concluirla de manera satisfactoria. Así, ante una tarea de nivel 3 de algebrización de complejidad abierta, los profesores no alcanzaron el proceso matemático de resolverla interpretar las relaciones para encontrar una solución. Como consecuencia de esto tampoco comunicaron y validaron sus respuestas.

Tabla 1. Relaciones entre rectas, regiones e intersecciones

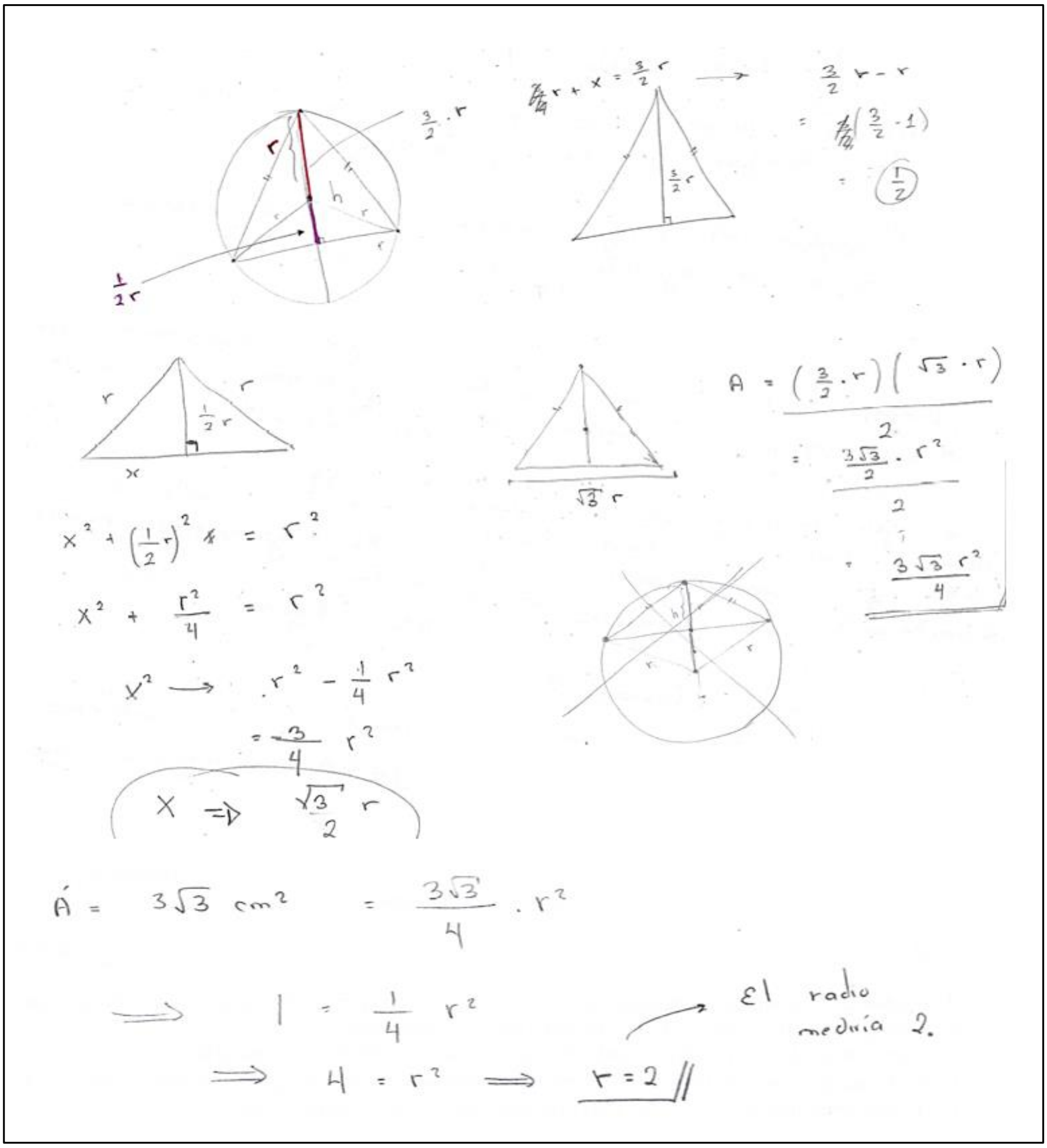
Regla	**Comportamiento numérico**									
Número de rectas (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de regiones $f(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1$ o bien, $f(n) = \frac{n(n-1)}{2} + n + 1$	2	4	7	11	16	22	29	37	46	56
Número de intersecciones $f(n) = \frac{n(n-1)}{2}$	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45

Fuente: Elaboración propia

En el caso de la tarea 2, se solicita expresar el área de un triángulo isósceles inscrito en una circunferencia, en términos de su radio (ítem a) y, posteriormente particularizar a un triángulo isósceles para que, dada su área encontrar su radio (ítem b). El Profesor A, identifica que tiene que expresar el área del triángulo isósceles en términos del radio (r), por lo que se focaliza a encontrar la base en términos de (r).

En la práctica matemática de este profesor (ver figura 3) se aprecia la identificación de la relación existente entre el radio y la altura del triángulo isósceles y trabaja con la expresión $\frac{3}{2}r - r$ que denota a la altura menos el radio; esta propiedad característica es clave para la resolución de la tarea. Posteriormente, llega a la conclusión que la mitad de la base del triángulo isósceles, a la cual denota con la letra x, cumple la relación: $x^2 + (\frac{3}{2}r - r)^2 = r^2$. De lo previo, el profesor concluye que la base del triángulo es $\sqrt{3}\,r$. De esta manera el profesor A resuelve y responde el ítem a) según la expresión encontrada $A = \frac{3\sqrt{3}r^2}{4}$que "mientras más grande sea el radio de la circunferencia mayor será el área del triángulo". Sin embargo, pese a esta afirmación no hace explícito que $A(r) = \frac{3\sqrt{3}r^2}{4}$, expresión que representa a una función que define el comportamiento de variación entre el área y el radio. El inciso b) implica establecer la igualdad $3\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}r^2}{4}$, aunque no se indicó la unidad de medida, el Profesor A asignó los cm^2 para la medida del área. La práctica que desarrolla indica un nivel 3 de algebrización, pues existe un proceso de identificación de relaciones y propiedades relativas a las figuras geométricas en cuestión utilizando literales, además existe un tratamiento sintáctico con las mismas expresando una literal en términos de otra; de esta manera se alcanza el proceso matemático de resolver la tarea.

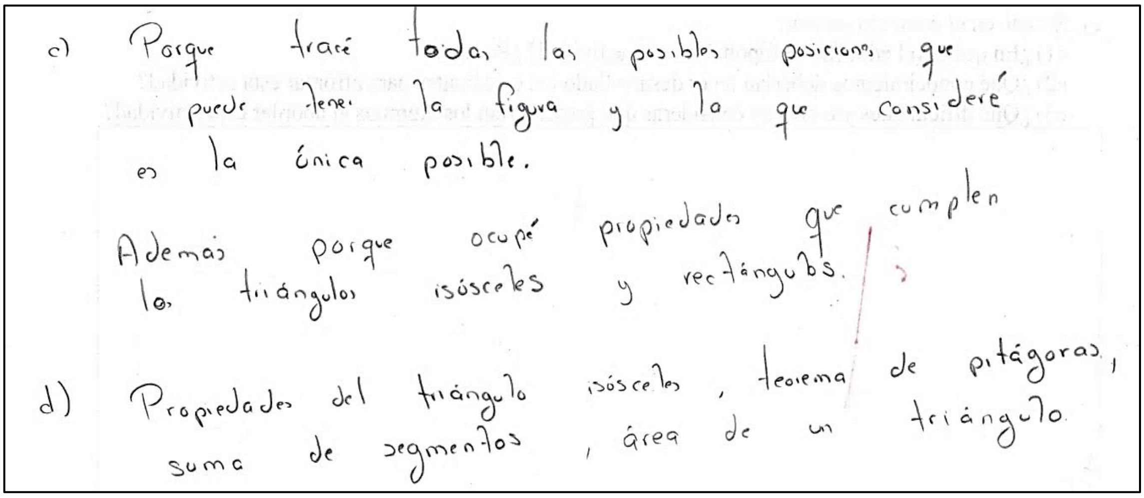
Figura 3. Práctica matemática del profesor A en la Tarea 2



Fuente: elaboración propia

Posteriormente, al completar la resolución de la tarea 2, el profesor A valida (ítem c) su respuesta bajo el argumento de que ha trazado todos los casos posibles y además aplicó propiedades; sin embargo, el trazado de los casos posibles fue utilizado para percatarse de la propiedad invariante de la altura menos el radio, eso se reafirma cuando refiere a que entre los conocimientos que utilizó (ítem d) se encuentra la suma de segmentos (ver figura 4). El proceso de comunicar y validar, no son del todo explícitos, pero se complementa con la práctica matemática que ha desarrollado el docente.

Figura 4. Procesos de comunicación y validación expresados por el profesor A sobre su práctica matemática


c) Porque tracé todas las posibles posiciones que puede tener la figura y la que consideré es la única posible.

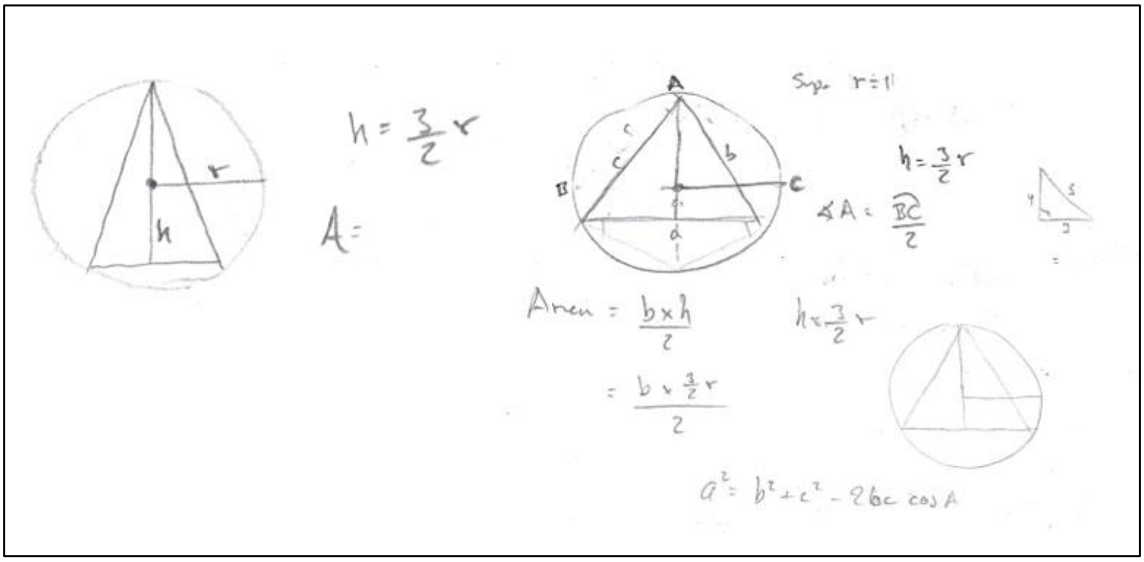
Además porque ocupé propiedades que cumplen los triángulos isósceles y rectángulos.

d) Propiedades del triángulo isósceles, teorema de pitágoras, suma de segmentos, área de un triángulo.

Fuente: Elaboración propia

Para esta misma tarea, el Profesor B, no llega a la solución, aunque alcanza a bosquejar algunas relaciones intentando encontrar la base del triángulo en términos del radio realizando algunos trazos adicionales (ver figura 5).

Figura 5. Práctica matemática del profesor B en la Tarea 2



Fuente: elaboración propia

Las prácticas matemáticas desarrolladas por ambos profesores representan un bajo nivel de algebrización respecto a la tarea 1, en la que se esperaba una práctica algebraica de un nivel 2 al menos; es decir encontrar alguna expresión general, aunque pudieran no percatarse de que se trata de función cuadrática (nivel 3 de algebrización). Por otro lado, la tarea 2 fue resuelta por un profesor de la manera esperada, alcanzando un nivel 3 de algebrización. Sin embargo, presentan inconsistencias en los procesos matemáticos de comunicar los conocimientos que se están utilizando para resolver la tarea y al referir al proceso de validar lo correcto de su práctica matemática.

Conclusiones

Debido a las características de la experiencia realizada, y también a las características de los docentes, se conjeturó explorar el NCA-3; sin embargo, sólo el Profesor A alcanzó este nivel para la tarea 2. Esto no implica que su práctica algebraica no sea competente para tareas sobre "ejercicios tipo o rutinarios" (NCA-1) o de "aplicación o modelización" (NCA-2); pero particularmente, al confrontarlos con estas situaciones que implican problemas abiertos, la resolución resultó compleja. Parte de la explicación a este suceso, nos lo proporcionan las consignas restantes: los profesores no logran identificar los conocimientos necesarios para la resolución de la tarea y presentan confusión al momento de situar los conocimientos que se necesitarían para la solución; además tampoco ofrecen validaciones adecuadas a sus respuestas. Esta primera aproximación resulta orientativa para el desarrollo progresivo del pensamiento algebraico a través de los niveles de algebrización y el desarrollo de competencias guiado por los mismos que podría constatarse con estudios formativos posteriores más amplios tanto con profesores como con estudiantes de distintos niveles educativos. Estos estudios son pertinentes porque el desarrollo de compentencias algebraicas en los estudiantes ha resultado un reto para el profesorado de matemáticas. Este es el motivo que los procesos instruccionales con profesores adquiren mayor relevancia, sobre todo en México, en el que no se tiene una formación matemática homogenia para estos profesionales de la enseñanza según el nivel educativo. Por lo tanto, la consolidación de su conocimiento matemático es un punto de inflexión en el desarrollo de las competencias de los estudiantes.

Referencias

AKÉ, L. P.; GODINO, J. D. Análisis de tareas de un libro de texto de primaria desde la perspectiva de los niveles de algebrización. *Educación matemática*, v.30, n.2, p. 171-201, 2018.

AKÉ, L.P.; GODINO, J.D.; GONZATO, M.; WILHELMI, M.R. Proto-algebraic levels of mathematical thinking. In LINDMEIER, A.; HEINZE, A. (Eds). *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Kiel, Germany: PME, p. 1-8, 2013.

ARCAVI, A. El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, v.8, n.44, p. 59-75, 2007.

CARRAHER, D.; SCHLIEMANN, A.; BRIZUELA, B.; EARNEST, D. Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, v.37, n.2, p. 87-115, 2006.

CRESWELL, J. *Research Design: qualitative, quantitative, and mixed methods approaches.* Londres, England: Sage, 2009.

CUESTA, A.; ESCALANTE, J.; MÉNDEZ, M. Impacto de los cursos universitarios en la formación de competencias algebraicas. *Educación matemática*, v.25, n.1, p. 35-62, 2013.

DARLING-HAMMOND, L.; HOLTZMAN, D.; GATLIN, S.; HEILING, V. Does teacher preparation matter? Evidence about teacher certification, teach for America and teacher effectiveness. *Education Policy Analysis Archive*, v.13, n.42, p.2-51, 2005.

FILLOY, E.; PUIG, L.; ROJANO, T. *Educational algebra. A theorical and empirical approach.* New York, N.Y.: Springer, 2008.

FONT, V. Competencias y conocimientos del profesor de Matemáticas. Un modelo basado en el enfoque Ontosemiótico. *Revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, v.31, n.2, p. 749-756, 2018.

FONT, V. Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, v.26, p. 7-18, 2011.

GODINO, J. D. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, v.22, n.2, p. 237-284, 2002.

GODINO, J. D; GIACOMONE, B.; BATANERO, C.; FONT, V. Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Boletim de Educação Matemática*, v.31, n.57, p. 90-113, 2017.

GODINO, J. D.; RIVAS, M.; CASTRO, W.; KONIC, P. Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, v.7, n.2, p.1-21, 2012.

GODINO, J.D.; WILHELMI, M.; NETO, T.; AKÉ, L. P.; CONTRERAS, A.; ESTEPA, A.; LASA, A. Algebraization levels in primary, middle and high school mathematics. *Communication presented in the 13th International Congress on Mathematical Education*. Hamburgo, Alemany, 2016. Recuperado el 27 de agosto de 2017, de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/icme13/TSG11_algebra_ICME13.pdf

GONZÁLEZ, G.; WAGENAAR, R. *Tuning educational structures in Europe: final report: phase one.* Deusto, España: Universidad de Deusto, 2003.

HAREL, G.; SOWDER, L. Students' proof schemes: Results from exploratory studies. *American Mathematical Society*, n.7, p. 234-283, 1998.

HUMBERTONE, J.; REEVE, R. Profiles of algebraic competence. *Learning and Instruction*, v.18, n.4, p. 354-367, 2008.

KIERAN, K. Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. En LESTER, F. (Ed). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM, p. 707-762, 2007.

KIERAN, K.; PANG, J.; SCHIFTER, D.; FONG, S. *Early Algebra. Research into its nature, its learning, its teaching*. Hamburgo, Germany: Springer, 2016.

LEÓN, O.; MONTERO, I. *Métodos de investigación en psicología y educación*. España: Mc Graw Hill, 2003.

MORENO, M. *Didáctica de la Matemática en la Educación Secundaria. Manual para la Formación Inicial para el profesorado de secundaria*. Almería, España: Universidad de Almería 1998.

OLDERNBURG, R. Structure of algebraic competencies. In DURAND-GUERRIER, V.; SOURY-LAVERGNE, S.; AZARELLO, F. (Eds). *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Lyon, France: Institut National De Recherche Pedagogique, p. 579-588, 2010.

PINO-FAN, L.; GODINO, J. D.; FONT, V. Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa,* v.13, n.1, p. 141-178, 2011.

PONTE, J.; CHAPMAN, O. Prospective mathematics teachers' learning and knowledge for teaching. En ENGLISH L.; KIRSHNER, D. (Eds), *Handbook of international research in mathematics education*. New York, N.Y.: Routledge, p. 275-296, 2016.

RICO, L. La competencia matemática en PISA. *PNA*, v.1, n.2, p. 47-66, 2007.

RUIZ-MUNZÓN, N.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. Un modelo epistemológico de referencia del algebra como instrumento de modelización. *Un panorama de la TAD,* v.10, p. 743-765, 2011.

SECKEL, M.; FONT, V. Competencia de reflexión en la formación inicial de profesores de matemática en Chile. *Praxis Educacional,* v.11, n.19, p. 55-75, 2015.

SOLAR, H.; GARCÍA, B.; ROJAS, F.; CORONADO, A. Propuesta de un Modelo de Competencia Matemática como articulador entre el currículo, la formación de profesores y el aprendizaje de los estudiantes. *Educación matemática,* v.26, n.2, p. 33-67, 2014.

SOWDER, J. The mathematical education and development of teachers. En LESTER, F. (Ed). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Charlotte, N.C.: NCTM, p. 157-223. 2007.

ZAZKIS, R.; LILJEDAHL, P. Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics,* v.49, n.3, p. 379-402, 2002.

Recebido: 05/03/2019

Aprovado: 14/10/2019