A Dialética entre Pensamento e Simbolismo Algébricos

The dialectic between algebraic thinking and algebraic symbolism

BÁRBARA LUTAIF BIANCHINI[1]
SÍLVIA DIAS ALCÂNTARA MACHADO[2]

Resumo

O artigo levanta questões sobre a dialética necessária entre o pensamento e o simbolismo algébricos e evidencia a importância do tema no desenvolvimento da Álgebra escolar. É apresentado o modelo teórico sobre os três usos das variáveis, 3UV, criado pelo grupo mexicano de Sônia Ursini, seguido de exemplos pautados nessa teoria, que possibilita verificar a dialética evidenciada anteriormente, no caso do trato sintático e semântico das variáveis.
Palavras-chave: *pensamento algébrico; simbolismo algébrico; modelo 3UV.*

Abstract

This paper addresses the necessary dialectic between algebraic thinking and algebraic symbolism and highlights the importance of this theme in the development of school Algebra. It describes the theoretical model of the tree uses of the variables, 3UV, devised by a Mexican group coordinated by Sonia Ursini, and follows with based examples on this, which allows this dialectic to surface during the treatment of variables.

Keywords: *algebraic thinking; algebraic symbolism; 3UV model.*

Introdução

Indiscutivelmente, a Álgebra tem sido apontada como um dos entraves no percurso do estudante em sua vida escolar. No entanto, ela continua sendo imprescindível entre os conhecimentos básicos da formação do cidadão. Davis e Hersh (1988), chamando atenção para a tendência natural que a forma e função têm de se desequilibrarem e separarem, argumentam que esse fato não é evitável e nem deveria sê-lo, mas consideram que o professor precisa ter ciência desse processo, a fim de instituir contramedidas quando tal tendência fugir a seu controle.

Neste artigo, partimos do pressuposto de que o problema com o ensino da Álgebra reside na ênfase habitualmente dada ao simbolismo algébrico, isto é, com foco na sintaxe, mas com pouca ou nenhuma associação com a semântica. Esse fato levou Arcavi ([s.d.], p. 65) à seguinte questão: O sentido do símbolo é uma postura de

[1] PUC-SP - barbara@pucsp.br
[2] PUC-SP - silviaam@pucsp.br

especialistas ou pode ser esperada de novatos também?

Em resposta a essa questão, discorremos sobre o pensamento e o simbolismo algébricos para evidenciar a necessidade de desenvolver a Álgebra escolar por meio de uma dialética entre estes.

À guisa de exemplo que possibilite o tratamento algébrico respeitando a dialética apontada, apresentamos o modelo teórico criado pelo grupo mexicano de Sonia Ursini e embasado em pesquisas em Educação Matemática, modelo esse que visa promover os três principais usos de variáveis no nível equivalente ao da Educação Básica brasileira a partir do Ensino Fundamental II.

• Pensamento e simbolismo algébricos

Segundo Chaui (2000), há para a Filosofia duas modalidades de atividade racional realizadas pela razão subjetiva ou pelo sujeito do conhecimento. São elas a intuição (ou razão intuitiva) e o raciocínio (ou razão discursiva). Quanto à modalidade raciocínio (ou razão discursiva) a autora explica:

> A atividade racional discursiva, como a própria palavra indica, discorre, percorre uma realidade ou um objeto para chegar a conhecê-lo, isto é, realiza vários atos de conhecimento até conseguir captá-lo. A razão discursiva ou pensamento discursivo chega ao objeto passando por etapas sucessivas de conhecimento, realizando esforços sucessivos de aproximação para chegar ao conceito ou à definição do objeto. (CHAUI, 2000, p. 77)

Chaui prossegue afirmando que a intuição (ou razão intuitiva), ao contrário da modalidade anterior:

> Consiste num único ato do espírito, que, de uma só vez, capta por inteiro e completamente o objeto. Em latim intuitos significa: ver. A intuição é uma visão direta e imediata do objeto do conhecimento, um contato direto e imediato com ele, sem necessidade de provas ou demonstrações para saber o que conhece. (CHAUI, 2000, p. 77)

Essas duas atividades racionais embora aparentemente contrárias, geralmente são complementares, embora na Matemática a atividade racional discursiva prevaleça sobre a razão intuitiva.

Segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), o pensamento algébrico é muito amplo, revelando-se em todas as áreas da Matemática e em outros campos do conhecimento, sendo que no âmbito matemático a construção desse pensamento não é feita de maneira isolada, mas se processa juntamente com a realizada em outros campos. De acordo com esses autores, a linguagem simbólica, na Álgebra, desempenha papel essencial para a formação do pensamento, pois é através dela que se podem solucionar problemas matemáticos de modo a abranger todo o contexto da situação e, ao mesmo tempo, simplificar os cálculos. Essa capacidade permite a transformação simbólica de expressões em outras mais objetivas, mais fáceis de manipular e que conservam o mesmo significado.

Assim, simbolismo algébrico e pensamento algébrico parecem impossíveis de dissociar, configurando-se entre eles uma conexão similar à de um ciclo “ovo e galinha”: para ser expresso, o pensamento algébrico necessita de uma notação e, quanto mais adequada essa notação, mais ele se desenvolve e vice-versa.

McMullin (2001) reforça essa constatação ao afirmar que a manipulação de símbolos é o que faz a Matemática funcionar, ter sentido e ser necessária. Na realidade, não é possível fazer Matemática sem dispor dessa capacidade, mas a Matemática é muito mais que símbolos. Parodiando McMullin, podemos dizer que Álgebra é muito mais que notação algébrica.

Jacobson (1974), famoso algebrista, comenta no prefácio de sua obra *Basic Algebra*, que para ele o mais impactante na Álgebra abstrata é a influência do método axiomático, que permeia toda a Matemática. Isso atesta que a metodologia da Álgebra é uma ferramenta essencial na Matemática. A introdução dessa obra traz o exemplo de uma questão típica advinda do pensamento algébrico, a qual levou Galois a formular sua teoria no século XIX: “*Quais as equações polinomiais em uma indeterminada cujas soluções podem ser expressas em termos de seus coeficientes por operações adequadas e extrações de raízes?”* (JACOBSON, 1974, p. 1).

O autor argumenta que depois que um mecanismo para a resolução de uma classe de problemas é desenvolvido, ele tem o potencial de não só servir de instrumento útil para outra classe de problemas, como, ainda mais, tem o potencial de gerar novos problemas interessantes. E mais adiante exemplifica esse fato ao comentar a importância dos números naturais:

> O conjunto dos números naturais, ou a contagem de números, é fundamental em álgebra por dois motivos. Em primeiro lugar, ele serve como ponto de partida para a construção de conjuntos mais elaborados: o conjunto dos números inteiros, números racionais, e finalmente números reais, o anel das classes de resto módulo n (n um número inteiro), e assim por diante. Em segundo lugar, no estudo de algumas estruturas algébricas, em certas aplicações do conjunto dos números naturais em estruturas dadas têm um importante papel. (JACOBSON, 1974, p. 15)

Dessa forma, podemos concluir que embora os objetos de investigação dos pesquisadores matemáticos e educadores matemáticos sejam diferentes, ambos percebem o pensamento algébrico da mesma forma.

No que segue nos baseamos principalmente nas ideias de Ponte, Branco e Matos (2009), as quais, para a maioria dos pesquisadores em educação algébrica, podem ser consideradas um consenso sobre o pensamento algébrico.

Kaput (1999) define pensamento algébrico como o que se manifesta quando, por meio de conjecturas e argumentos, se estabelecem generalizações sobre dados e relações matemáticas expressas através de linguagens crescentemente formais. Kaput especifica a ocorrência intramatemática do pensamento algébrico, informando que esse processo de generalização pode se basear na Aritmética, na Geometria, em situações de modelação matemática e, em última instância, em qualquer conceito matemático lecionado desde os primeiros anos de escolaridade.

Kaput (1999) destaca cinco facetas do pensamento algébrico, que se imbricam:

- *Aspectos nucleares (simbolismo e generalização):*

  1. Generalização e formalização de padrões e restrições.
  2. Manipulação de formalismos sintaticamente guiada.

- *Ramos dos aspectos anteriores, com expressão na Matemática escolar:*

  3. Estudo de estruturas abstratas.
  4. Estudo de funções, de relações e de variação conjunta de duas variáveis.
  5. Utilização de múltiplas linguagens na modelação matemática e no controle de fenômenos.

Ponte, Branco e Matos (2009) assumem que o pensamento algébrico inclui a capacidade para lidar com expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de equações e de inequações e funções, e também a capacidade de lidar com outras relações e estruturas matemáticas e usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios. Argumentam que o “significado de símbolo”, elemento do pensamento algébrico, inclui a capacidade de interpretar, manipular e usar de forma criativa os símbolos matemáticos na descrição de situações e na resolução de problemas. Afirmam também que um elemento igualmente central do pensamento algébrico é a ideia de generalização: descobrir e comprovar propriedades que se verificam em toda classe de objetos. Ou seja, no pensamento algébrico dá-se atenção não só aos objetos, mas, principalmente às relações existentes entre estes, representando-se essas relações e raciocinando-se sobre elas, tanto quanto possível, de modo geral e abstrato. Por isso, uma das vias privilegiadas para promover esse raciocínio é o estudo da regularidade num dado conjunto de objetos.

Essa perspectiva de Álgebra e de pensamento algébrico reforça a ideia de que este tema não se reduz ao trabalho com o simbolismo formal. Pelo contrário, aprender Álgebra envolve a capacidade de pensar algebricamente numa diversidade de situações, abrangendo relações, regularidades, variação e modelação. Resumir a atividade algébrica à manipulação simbólica equivale a reduzir a riqueza da Álgebra a apenas uma de suas facetas.

O Quadro 1, baseado em Ponte, Branco e Matos (2009) expõe as três vertentes do pensamento algébrico, complementando-as com ideias sobre o tema expostas principalmente em McCallum *et al*. (2007) e em Duval (2003).

Representar	• Ler, compreender, escrever e operar com símbolos usando as convenções algébricas usuais. • Traduzir informação representada simbolicamente para outras formas de representação (verbal, numérica, por tabelas, gráficos, objetos) e vice-versa. • Encontrar representações algébricas e fazer transformações (tratamento ou conversão) entre os registros de representação semiótica no sentido exposto por Duval (2003). • Evidenciar o sentido do símbolo, isto é, interpretar os diferentes sentidos do mesmo símbolo em diferentes contextos.
Raciocinar	• Relacionar (em particular, analisar propriedades). • Generalizar e agir sobre essas generalizações revelando compreensão das regras. • Relacionar a forma e a função de uma expressão algébrica. • Antecipar os resultados de um cálculo sem fazê-lo. • Abstrair regularidades a partir de cálculos repetidos. • Descontextualizar expressões algébricas. • Deduzir.
Resolver problemas	• Usar expressões algébricas, equações, inequações, sistemas (de equações e de inequações), funções e gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios (modelação).

Quadro 1. Vertentes do pensamento algébrico

Segundo Ponte, Branco e Matos (2009) a primeira vertente – *representar* – se refere à capacidade do aluno em utilizar diferentes sistemas de representação, ou seja, sistemas cujos caracteres primitivos têm natureza simbólica.

Como ilustração dessa primeira vertente, apresentamos o caso da equação de 2.º grau em uma indeterminada, que, conforme o problema dado, é mais interessantemente utilizada em forma fatorada: $(x - x_1)(x - x_2) = 0$, onde x_1 e x_2 são raízes, do que na forma desenvolvida: $x^2 + bx + c = 0$.

Na segunda vertente – *raciocinar*, tanto dedutiva como indutivamente –, assumem especial importância a capacidade de relacionar forma e função de expressões algébricas, analisar propriedades, conjecturar, abstrair regularidades de cálculos repetidos, generalizar (estabelecendo relações válidas para certa classe de objetos) e descontextualizar expressões algébricas.

Exemplificando alguns desses casos, ao se observar a sequência 6, 5, 6, 5, 6, 5, ..., o sujeito representa a situação da seguinte forma: $a_n = 6$ se $n = 2k + 1$ e $a_n = 5$ se $n = 2k$, sendo k um número inteiro maior ou igual a zero. Outro exemplo é a previsão do coeficiente de x^3 em $(x + 2)^4$ sem expandir o binômio.

Finalmente, a terceira vertente – *resolver problemas* – inclui modelar (ou modelizar) situações, isto é, usar representações diversas de objetos algébricos para interpretar e resolver problemas matemáticos e de outros domínios.

Um problema da Geometria interpretado e resolvido pela Álgebra é, por exemplo: “Conhecendo o ponto médio do segmento AB (–5/2, –5/2) e as coordenadas $x_1 = 4$ do ponto A e $y_2 = 2$ do ponto B, encontrar os pontos A e B”. Já a resolução do seguinte problema, em contexto distinto, exige modelização: “Uma roda gigante tem 30 metros de diâmetro, seu centro dista 18 metros do solo e cada revolução dessa roda leva 30 segundos. Qual a expressão que exprime a distância de certo assento em relação à base em função do tempo?”.

Dessa forma, nota-se que é impossível descrever o pensamento algébrico dissociado do simbolismo algébrico. A propósito dessa constatação, vejamos o que afirmam os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) a respeito da atividade algébrica:

> As atividades algébricas propostas no ensino fundamental devem possibilitar que os alunos construam seu conhecimento a partir de situações-problema que confiram significados à linguagem, aos conceitos e procedimentos referentes a esse tema, favorecendo o avanço do aluno quanto a diferentes interpretações das letras. (BRASIL, 1998, p. 121-122)

Assim, os PCN do 3.º e do 4.º ciclos do Ensino Fundamental propõem que o ensino da Álgebra, nesse nível, propicie a aprendizagem do simbolismo algébrico, ou seja, a sintaxe associada à semântica dessa “linguagem”. Posterga-se, desse modo, a ênfase no estudo da variação para o Ensino Médio, conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais Mais (PCN+) (BRASIL, 2002) assim como das estruturas para o Ensino Superior.

Dessa forma, passamos a enfocar o simbolismo algébrico no Ensino Básico, cuja aprendizagem constitui um grande problema nesse nível de ensino, segundo várias pesquisas internacionais — como as de Drouhard e Teppo (2004) e de Berdnaz, Kieran e Lee (1996) — e nacionais — incluindo as de Moura Ferreira (2009) e Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005).

O modelo 3UV, de Ursini *et al.* (2005), permite um enfoque diferente sobre o ensino da Álgebra, ao enfatizar a compreensão do conceito de variável. Os autores destacam que nesse enfoque:

> [...] a interpretação, a simbolização e a manipulação da variável são igualmente importantes, e nenhuma delas deve ter privilégio sobre as outras.
>
> [...] o modelo 3UV permite delimitar com mais clareza o propósito das atividades e formular as perguntas específicas e necessárias para ajudar os alunos a desenvolver a compreensão do conceito de variável. (URSINI *et al.*, 2005, p. 45)

Na construção desse modelo houve preocupação em evidenciar a dependência entre a semântica e a sintaxe da concepção de variável. Cabe destacar que esta não é a única concepção importante no ensino da Álgebra escolar, embora seja uma das fundamentais desse nível.

O modelo 3UV explicita os aspectos que distinguem os usos da variável que são trabalhados nos cursos de Álgebra escolar e que auxiliam o professor a desenvolver diversas tarefas, tais como planejar o trabalho a ser realizado em sala de aula, conduzir a elaboração de atividades e produzir instrumentos diagnósticos.

O modelo teórico 3UV distingue três principais usos da variável: o de *incógnita* (ou *termo desconhecido*), o de *número genérico* e o de *relação funcional.*

A variável como incógnita é usada em equações, como por exemplo x + 7 = 9, na qual se deve encontrar o valor de *x.* Segundo os autores, para resolver uma equação desse tipo é preciso que o aluno interprete a letra como uma incógnita específica, isto é, ele deve “reconhecer que a letra representa um valor desconhecido, único, que é possível determinar realizando certas operações aritméticas” (URSINI *et al.*, 2005, p. 12).

A variável como número genérico é usada em problemas envolvendo a generalização de padrões, como por exemplo encontrar o enésimo termo da sequência:

△ ○ ☆ △ ○ ☆ △

Resolver esse exercício pressupõe antes de tudo reconhecer um padrão diferenciando entre o que varia e o que permanece constante.

A variável como relação funcional é usada em problemas em que é clara a dependência entre duas ou mais variáveis, como por exemplo: “Dada a equação 2x – y = 9, qual o valor de *y* se *x* = 0? Qual o valor de *x* se *y* = 1?”. Para resolver esse problema o aluno deve ser capaz de interpretar as duas letras envolvidas na expressão como duas variáveis dependentes uma da outra.

Os autores destacam que nem sempre o uso da variável é de um único tipo. É o que ocorre, por exemplo, nesta tabela:

x	3x + 4
1	
	4
7	
	11

Neste caso, o aluno deve entender que as letras não representam um só valor específico, mas um valor qualquer, e que em particular se podem atribuir-lhes os valores específicos indicados na tabela. É necessário que o aluno também atribua a *x*, na coluna esquerda, valores que sejam adequados à expressão da direita. Além disso, o aluno deve tomar os valores dados a *x* na coluna esquerda e substituí-los na expressão da coluna direita. Isso requer que o aluno perceba que o valor da expressão depende do valor de *x* e vice-versa, pois se está trabalhando com uma relação funcional.

Ursini *et al.* (2005) afirmam que a compreensão dos usos das variáveis requer que o professor se aproprie da concepção e uso destas e que o aluno desenvolva as capacidades básicas para:

> - realizar cálculos simples operando com as variáveis;
> - compreender por que é possível operar com as variáveis e por que estas operações permitem chegar a um resultado, seja ele numérico ou não;
> - perceber a importância do uso das variáveis para modelar matematicamente situações de diferentes tipos;
> - distinguir os diferentes usos das variáveis em Álgebra;
> - transitar com flexibilidade entre os diferentes usos das variáveis;
> - integrar os diferentes usos para vê-los como aspectos distintos de um mesmo objeto matemático, que se revelam dependendo da situação particular. (URSINI *et al.*, 2005, p. 23)

Os autores sugerem que para distinguir os diferentes usos da variável é conveniente partir de situações-problema semelhantes, enfatizando o uso que a variável tem em cada caso.

Para o trabalho com problemas que envolvem a variável como incógnita, supõe-se que o indivíduo tenha a habilidade de (**I1**) reconhecer e identificar em uma situação-problema a presença de algo desconhecido que pode ser determinado considerando-se as restrições do problema; (**I2**) em uma equação, interpretar a variável simbólica como a representação de valores específicos; (**I3**) substituir a variável pelo valor ou valores que fazem da equação um enunciado verdadeiro; (**I4**) determinar a quantidade desconhecida que aparece em equações ou problemas, realizando operações algébricas, aritméticas ou de ambos os tipos; (**I5**) simbolizar as quantidades desconhecidas identificadas em uma situação específica e utilizá-las para formular equações.

No trabalho com problemas que envolvem a variável como número genérico, supõe-se que o indivíduo tenha a habilidade de (**G1**) reconhecer padrões e perceber regras e métodos em sequências e em famílias de problemas; (**G2**) interpretar a variável simbólica como a representação de uma entidade genérica, indeterminada, que pode assumir qualquer valor; (**G3**) deduzir regras e métodos gerais em sequências e em famílias de problemas; (**G4**) manipular (simplificar, desenvolver) a variável simbólica; (**G5**) simbolizar enunciados, regras ou métodos gerais.

No trabalho com problemas que envolvem a variável como relação funcional, supõe-se que o indivíduo tenha a habilidade de (**F1**) reconhecer a correspondência entre variáveis relacionadas, independentemente da representação utilizada (tabelas, gráficos, problemas verbais, expressões analíticas); (**F2**) determinar os valores da variável dependente, dados os valores da independente; (**F3**) determinar os valores da variável independente, dados os valores da dependente; (**F4**) reconhecer a variação conjunta das variáveis envolvidas em uma relação funcional, independentemente da representação utilizada (tabelas, gráficos, problemas verbais, expressões analíticas); (**F5**) determinar os intervalos de variação de uma das variáveis, dado o intervalo de variação da outra; (**F6**) simbolizar uma relação funcional com base na análise dos dados de um problema (URSINI *et al.*, 2005).

A nosso ver, Ursini *et al.* (2005) se preocuparam em respeitar a forma escolar de designar a variável dependente como x e a independente como $f(x)$, comumente chamada de y — por isso a distinção entre **F2** e **F3**.

Os autores observam que embora os aspectos **F2** e **F3** impliquem o aspecto **I4** (determinação do valor da incógnita), eles não são equivalentes, pois para determinar os valores de uma variável em função dos valores da outra é necessário primeiramente substituir um valor em uma das variáveis e desse modo converter uma expressão que envolva uma relação funcional em uma equação.

A seguir apresentamos exemplos de situações-problema com suas respectivas análises, enfocando cada um dos três usos da variável. Salientamos que as análises apresentam apenas uma das alternativas possíveis do uso das habilidades relativas às variáveis para resolução da situação-problema. É importante ter em mente que existem outras alternativas além dessa.

A seguir apresentamos o exemplo de uma situação-problema (Figura 1), com respectiva análise, enfocando o uso da variável como incógnita.

Um taxista cobra uma taxa fixa de R$3,50 mais R$2,00 por quilômetro rodado para realizar viagens dentro do município de São Paulo. Um determinado passageiro que tenha R$25,50 poderá rodar quantos quilômetros no município de São Paulo?

Figura 1 – Situação-problema adaptada de Rodrigues (2008).

I1: Reconhecer e identificar que existe algo desconhecido (o número de quilômetros) que pode ser determinado.

I5: Simbolizar o termo desconhecido por uma letra (*x*) e formular a equação: $3{,}50 + 2x = 25{,}50$.

I2: Interpretar *x* como representação de um valor específico.

I4: Determinar a quantidade desconhecida *x* que aparece na equação, realizando operações: $2x = 25{,}50 - 3{,}50 = 22{,}00$ e então $x = 11$. O valor procurado é portanto 11 km.

I3: Substituir a variável pelo valor que faz da equação um enunciado verdadeiro.

A seguir apresentamos o exemplo de uma situação-problema (Figura 2), com respectiva análise, enfocando o uso da variável como número genérico.

Observe as seguintes igualdades e complete:

$$1+2+3=\frac{(3.4)}{2}$$
$$1+2+3+4=\frac{(4.5)}{2}$$
$$1+2+3+4+5=\frac{(5.6)}{2}$$
$$\ldots$$
$$1+2+3+\ldots+n=$$

Figura 2 – Situação-problema adaptada de Rodrigues (2008).

G1: Reconhecer padrões e perceber regras e métodos em sequências e em famílias de problemas.

G2: Interpretar a variável simbólica (*n*) como representação de uma entidade genérica, que pode assumir qualquer valor.

G3: Deduzir que a soma de *n* elementos da sequência 1, 2, 3, ..., *n* é igual à metade (1/2) do produto de *n* pelo número que o sucede.

G4: Desenvolver a variável simbólica *n* e seu sucessor (*n* + 1).

G5: Simbolizar enunciados, regras ou métodos gerais:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{[n(n+1)]}{2}$$

A seguir apresentamos o exemplo de uma situação-problema (Figura 3), com respectiva análise, enfocando o uso da variável como relação funcional.

Ana vai a um acampamento e encarregou sua irmã Julia para que cuide de seus peixes. Na tabela a seguir informamos a quantidade de alimento que os peixes consomem:

Número de dias	2	3	4	7
Alimento (gramas)	7	10,5	14	24,5

1. Quantos gramas de alimento os peixes consomem em um dia?
2. Se Ana ficar fora 5 dias, de quantos gramas de alimento os peixes precisarão?
3. No recipiente cabem 18 gramas de alimento. Se Júlia encher o recipiente no primeiro dia, os peixes terão o suficiente para consumir em 6 dias?

Figura 3 – Situação-problema adaptada de Ursini *et al*. (2005).

F1: Reconhecer a correspondência entre variáveis relacionadas (número de dias e quantidade de alimento consumido pelos peixes).

F2: Determinar o valor da variável dependente (quantidade de alimento consumido) conhecendo o valor da variável independente (dia) ou:

F3: Determinar o valor da variável independente (quantidade de alimento consumido), dado o valor da dependente (número de dias).

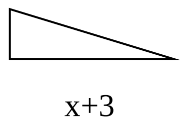
F4: Reconhecer a variação conjunta das variáveis envolvidas em uma relação.

F5: Determinar os intervalos de variação de uma das variáveis, dado o intervalo de variação da outra. No caso, o número de dias é um número inteiro maior ou igual a 1, o que corresponde aos números racionais da sequência (3,5; 7; 10,5; 14; 17,5; 21; ...).

F6: Simbolizar uma relação funcional com base na análise dos dados de um problema: $f(x) = 3{,}5 \cdot x$, onde *x* é o número de dias, ou $f(a) = (2/7) \cdot a$, onde *a* é a quantidade de alimento).

Segundo Ursini *et al.* (2005) após se haver trabalhado com os três usos da variável de forma diferenciada, está prevista uma etapa cujas atividades, denominadas *atividades integradoras*, "têm como propósito levar os estudantes a ver a variável como um só conceito que apresenta diferentes facetas" (p. 59). Isso é exemplificado a situação-problema a seguir (Figura 4).

Determinar o valor de *x* no triângulo retângulo abaixo:



1) sabendo que a área desse triângulo é 5 cm^2;
2) para qualquer valor da área.

Figura 4 – Situação-problema adaptada de Ursini *et al.* (2005).

I1: Reconhecer e identificar a presença de algo desconhecido (o lado *x*) que pode ser determinado considerando as restrições do problema.

F1: Reconhecer a correspondência entre variáveis relacionadas, independentemente da representação utilizada (a área em função de x e de $x + 3$).

G2: Interpretar a variável simbólica (x) como a representação de uma entidade genérica, indeterminada, que pode assumir qualquer valor.

F3: Determinar os valores da variável independente x, dado o valor (5 cm^2 = área) da dependente.

I5: Simbolizar as quantidades desconhecidas identificadas em uma situação específica e utilizá-las para formular equações: $5 = ½\, x\, (x + 3)$.

G4: Manipular (simplificar, desenvolver) a variável simbólica obtendo $x = 2$ cm.

I3: Substituir a variável pelo valor 2, que faz da equação um enunciado verdadeiro.

I5: Simbolizar as quantidades desconhecidas identificadas em uma situação específica e utilizá-las para formular equações.

G2: Interpretar a variável simbólica A (de área) como a representação de uma entidade genérica, indeterminada, que pode assumir vários valores.

G5: Simbolizar a regra $A = ½\, [x\, (x + 3)]$ ou:

F4: Reconhecer a variação conjunta das variáveis envolvidas (A e x) em uma relação funcional, independentemente da representação utilizada.

F5: Determinar os intervalos de variação de uma das variáveis, dado o intervalo de variação da outra: $x > 0$ e $A > 0$.

F6: Simbolizar uma relação funcional com base na análise dos dados do problema: $A(x) = ½\, [x\, (x + 3)]$.

Considerações finais

O artigo levanta questões sobre a dialética necessária entre o pensamento e o simbolismo algébricos e evidencia a importância do tema no desenvolvimento da Álgebra escolar.

O modelo 3UV permite e facilita enfatizar o simbolismo algébrico das variáveis, articulando seus usos com seus significados, partindo da dialética postulada e propiciando-a.

Os resultados de pesquisas já concluídas, como as de Silva (2009) e Rodrigues (2008), que utilizaram o modelo teórico 3UV em suas análises, corroboram a grande contribuição dessa teoria.

Os próprios autores do modelo 3UV o consideram instrumento auxiliar para o professor planejar e estruturar o trabalho que realizará em sala de aula e também para o planejamento de atividades a que os alunos serão submetidos em classe, além da possibilidade de ser utilizado como um instrumento diagnóstico.

Assim, consideramos que a teoria 3UV, por atender ao requisito de provocar uma dialética entre pensamentos e simbolismos algébricos em sala de aula, tem também o potencial de embasar análises de pesquisas sobre esse assunto.

Referências

ARCAVI, A. *Álgebra, história, representação*. Rio de Janeiro: Universidade Santa Úrsula, [s.d.]. Série Reflexão em Educação Matemática, v. 2.

BERDNAZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (Eds.). *Approaches to algebra*: perspectives for research and teaching. Dordrecht (Netherlands): Kluwer, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática.* Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *PCN+ Ensino Médio*: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

CHAUI, M. *Convite à filosofia.* São Paulo: Ática, 2000. Unidade 2, cap. 2 (“A atividade racional”), p. 77-84. Disponível em: <http://www.psicologiaceliaanselme.com.br/pdf/psicologia/Chau%C3%AD,%20Marilena%20-%20Convite%20%C3%80%20Filosofia.pdf>. Acesso em: 3 nov. 2010.

DAVIS, P.J.; HERSH, R. *O sonho de Descartes*: o mundo de acordo com a matemática. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1988.

DROUHARD, J.P.; TEPPO, A.R. *The future of the teaching and learning of algebra*: The 12th ICMI Study. Boston: Kluwer, 2004.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática, In: MACHADO, S.D.A. (Org.). *Aprendizagem em matemática.* Campinas: Papirus, 2003.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F.; CRISTOVÃO, E. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: SEMINÁRIO LUSO-BRASILEIRO DE INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS NO CURRÍCULO E NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES – 2005. Lisboa, 2005. *Trabalhos apresentados*. Disponível em: <http://www.educ.fc.pt/docentes/jponte/temporario/SEM-LB/Fiorentini-Fernandes-Cristovao2.doc>. Acesso em: 2 nov. 2010.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M.; MIGUEL, A. Contribuição para um repensar a educação algébrica elementar. *Pro-posições*, v. 4, n. 1[10], p. 78-91, mar. 1993.

JACOBSON, N. *Basic algebra*. San Francisco: Freeman, 1974.

KAPUT, J.J. Teaching and learning a new algebra. In: FENNEMA, E.; ROMBERG, T.A. (Eds.). *Mathematics classrooms that promote understanding*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 1999. p. 3-19.

McCALLUM, W.; THOMPSON, P.; HAREL, G.; BLAIR, R.; DANCE, R.; NOLAN, E.; GILL, R.; VIKTORA, S.; CUOCO, A.; HIRSCH, C. Intermediate algebra. In: KATZ, V.J. (Ed.). *Algebra*: gateway to a technological future. [S.l.]: The Mathematical Associacion of America, 2007. cap. 4, p. 19-26. Disponível em: <www.maa.org/algebra-report/Algebra-Gateway-Tech-Future.pdf>. Acesso em: 7 fev. 2008.

McMULLIN, L. Algemética. *Educação e Matemática*, Lisboa, n. 62, p. 21-22, mar./abr. 2001. Disponível em: < http://www.apm.pt/apm/revista/educ62/Tecnologias.pdf >. Acesso em: 3 nov. 2010.

MOURA FERREIRA, C. *Os alunos do 1.º ano do ensino médio e os padrões*: observação, realização e compreensão. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

PONTE, J.P.; BRANCO, N.; MATOS, A.M. Álgebra no ensino básico. In: Programa de Matemática do Ensino Básico. [S.l.]: Ministério da Educação/DGIDC, 2009. Disponível em <http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf>. Acesso em: 10 abr. 2010.

RODRIGUES, D.M. *A compreensão de alunos, ao final do ensino médio, relativa ao conceito de variável*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

SILVA, R.M. Diferentes usos da variável por alunos do ensino fundamental. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

URSINI, S.; ESCARENO, F.; MONTES, D.E.; TRIGUEROS, M. *Enseñanza del álgebra elemental: una propuesta alternativa*. México: Trillas, 2005.