

Investigação Matemática: possíveis articulações com a História da Matemática, TIC e Resolução de Problemas

Mathematical Research: possible joints with History of Mathematics, ICT and Troubleshooting

PAULO WICHNOSKI ¹

TIAGO EMANUEL KLÜBER ²

Resumo

O texto apresentado é um recorte de uma pesquisa de mestrado e explicita a articulação revelada entre a Investigação Matemática e a Resolução de Problemas, as Tecnologias da Informação e Comunicação – TIC e a História da Matemática, em registros textuais de professores em formação. A metodologia de pesquisa é qualitativa pautada nos pressupostos do método fenomenológico-hermenêutico. A articulação mostrou-se teoricamente possível, todavia, qualquer tentativa de inter-relacioná-las requer clareza das particularidades, das regiões de inquérito, da epistemologia e dos objetivos de ensino de cada uma das Tendências, caso contrário, esse caráter interlocutor pode configurar uma anomalia que afeta o núcleo firme da Investigação Matemática no tocante ao princípio da natureza das suas tarefas, além de gerar conflitos epistemológicos e de aprendizagem.

Palavras-chave: *Tendências em Educação Matemática; Pesquisa Qualitativa; Fenomenologia.*

Abstract

The text presented is a cut from a master's research and it explains a hermeneutic understanding, in a Heideggerian sense, about the articulation revealed between Mathematical Investigation and History of Mathematics, Information and Communication Technologies - ICT and Troubleshooting, in in textual records of teachers in formation. The methodology of research is qualitative based on the presuppositions of the phenomenological-hermeneutical method. The data presented reveal that the joint was theoretically possible, but any attempt to interrelate them requires clarity of the particularities, the regions of inquiry, the epistemology and the teaching objectives of each of the Trends, otherwise, this interlocutor character may configure an anomaly that affects the firm core of Mathematical Investigation in relation to the principle of the nature of its tasks, besides generating epistemological and learning conflicts.

Keywords: *Trends in Mathematics Education; Qualitative Research; Phenomenology.*

¹ Doutorando em Educação em Ciências e Educação Matemática: Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas – wichnoski@gmail.com.

² Doutor em Educação Científica e Tecnológica: Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas – tiagokluber@gmail.com.

Introdução

No contexto de uma pesquisa³ mais ampla que interrogou a Investigação Matemática nas produções didático-pedagógicas⁴ e nos artigos finais⁵, construídos por professores participantes do Programa de Desenvolvimento Educacional do Paraná – PDE⁶ manifestou-se, entre outros aspectos, a possibilidade de articulação/interlocução entre a Investigação Matemática e outras Tendências para o ensino de matemática, a saber, Resolução de Problemas, Tecnologias da Informação e Comunicação – TIC e História da Matemática, bem como conflitos que podem ter origem nesse caráter interlocutor (WICHNOSKI, 2016).

Na pesquisa supramencionada, o objetivo consistiu em estabelecer uma metacompreensão da Investigação Matemática nas produções didático-pedagógicas e nos artigos finais dos professores participantes do PDE, seguida de uma hermenêutica-fenomenológica, isto é, um movimento de compreensão – interpretação, mediado pela intencionalidade e subjetividade.

O sentido do termo *meta* está relacionado, etimologicamente, ao ato de ir além. Isso posto, ao nos referirmos à pesquisa de mestrado como um movimento de metacompreensão, sinalizamos que o modo pelo qual compreendemos aquilo que interrogamos se deu para além da nossa compreensão imediata acerca do lido e; igualmente, para além do revelado no texto dos professores PDE que, por serem produtos de sujeitos que estão no mundo com os outros, com coisas e com teorias, já dispunham de compreensões. Foi, portanto, um movimento reflexivo e que, sendo intencional, conduziu-nos à transcendência das reduções efetuadas (BICUDO, 2010).

Neste artigo, o objetivo consiste em explicitar a metacompreensão realizada, particularizando os pormenores, as minúcias contidas em uma das categorias de análise.

³ Pesquisa de Mestrado em Ensino financiada pela CAPES e intitulada “Uma Metacompreensão da Investigação Matemática nas Produções do Programa de Desenvolvimento Educacional do Paraná – PDE”.

⁴ Atividade de organização de um material didático enquanto estratégia metodológica, tendo por finalidade a implementação na escola (PARANÁ, 2010).

⁵ Atividade que divulga e socializa o trabalho desenvolvido na escola, contemplando a problemática estudada, os dados coletados na implementação da Produção Didático-pedagógica e a respectiva análise (PARANÁ, 2010).

⁶ Política de Formação Continuada voltada aos professores que atuam na Rede Pública Estadual de Ensino do Estado do Paraná, idealizada durante a elaboração do Plano de Carreira do Magistério (Lei Complementar nº 103/04) e implementada inicialmente pelo Decreto nº. 4.482, de 14/03/05. Em 2010, passou a ser regulamentada pela Lei Complementar nº130 e seu desenvolvimento é realizado numa parceria entre Secretaria de Estado da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior/SETI, Secretaria Estadual de Educação/SEED e as Instituições de Ensino Superior/IES públicas do estado do Paraná (WICHNOSKI, 2016).

Portanto, este trabalho é extensão e ao mesmo tempo retomada do texto apresentado na referida pesquisa; ambos se afinam em termos de metodologia, de discurso, de região de inquérito e se diferenciam em termos de objetivos.

O trabalho conta com este prelúdio, seguido da seção destinada aos aspectos metodológicos da pesquisa que, por sua vez, abre as seções que explicitam as possíveis articulações entre a Investigação Matemática e a História da Matemática, as TIC e a Resolução de Problemas e, por fim, caminhamos para um desfecho, não final, mas como abertura, posto que as pesquisas de cunho fenomenológico se concebem inacabadas e; por assim serem, é possível incessantemente retomá-las sob outros enfoques e sob novas interpretações (MASINI, 2004).

Metodologia e procedimentos que orientaram a pesquisa

A metodologia de pesquisa é qualitativa com características da pesquisa fenomenológica-hermenêutica, uma vez que trabalhamos com os significados que não se fecham em si, mas que se constituem e aparecem sob diferentes perspectivas, dependentes do enfoque a eles dado. Além disso, a interrogação⁷ construída e apresentada na pesquisa de Wichnoski (2016) e que tem reflexos neste trabalho visou à estrutura do fenômeno⁸ interrogado – a Investigação Matemática – buscando o que dele se mostra na percepção de quem interroga, que se dá nos atos da consciência, entendida como intencionalidade. Assumimos uma postura hermenêutica para a compreensão do discurso tendo em vista que “as palavras produzem sentido, criam realidades e, às vezes, funcionam como potentes mecanismos de subjetivação” (BONDÍA, 2002, p. 20), configurando-se como uma articulação daquilo que chamamos de compreensão ou no sentido heideggeriano de “articulação ‘significante’ da estrutura compreensível do ser-no-mundo” (RICOEUR, 1989, p. 100). Segundo Ricoeur (1989, p. 92) a tarefa hermenêutica

Consiste em ‘estabelecer teoricamente, contra a intromissão constante do arbitrário romântico e do subjetivismo cético [...], a validade universal da interpretação, base de toda a certeza em história’. A hermenêutica constitui, assim, a camada objetivada da compreensão, graças às estruturas essenciais do texto.

⁷ O que se mostra da Investigação Matemática nas produções de professores que trabalharam sob essa perspectiva da Investigação Matemática no PDE - Programa de Desenvolvimento Educacional do Paraná?

⁸ Termo específico da fenomenologia, que significa o que se mostra na intuição ou percepção do sujeito que o olha intencionalmente, interrogando-o (BICUDO, 2011b).

Bicudo (2011a, p. 49) evoca que “A análise hermenêutica de textos escritos em linguagem proposicional, foca palavras e sentenças que dizem do fenômeno investigado e o modo de dizer no contexto interno e externo ao próprio texto”, deixando a interpretação de ser individual para ser sobre a totalidade do fenômeno. Desse modo, ao privilegiar a descrição presente nas produções elaboradas pelos professores participantes do PDE e sobre elas lançar um olhar intencionado e consciente, a hermenêutica apresenta-se como um instrumento de compreensão do discurso escrito que abarca os sentidos e significados nele imbricados.

Ainda na trama da pesquisa inicial a constituição do material de análise se deu em face de uma busca no portal da Secretaria de Estado da Educação – SEED, indexada por meio das expressões *Investigação Matemática* e *Investigações Matemáticas* e a partir das leituras preliminares dos resumos das produções contidas neste portal, selecionamos 68 trabalhos que se dividem entre 35 produções didático-pedagógicas e 33 artigos finais construídos pelos professores participantes do PDE nos anos de 2007, 2008, 2009, 2010 e 2012. Retomamos esses trabalhos e buscamos compreender integralmente o texto neles contido, em sentido global. A leitura atenta do descrito em sua totalidade, constitui, segundo Bicudo (2011b), a primeira das operações a serem seguidas na abordagem fenomenológica e

O pesquisador deve lê-lo tantas vezes quantas considerar que deva para que o sentido das experiências vividas pelo sujeito existencialmente compreendido, abrindo-se, empaticamente, à possibilidade de imaginar o ponto de visada do qual o depoente fala, intuindo, por insight, o sentido do todo (BICUDO, 2011b, p. 57).

O enxerto hermenêutico da pesquisa solicitou o destacamento de unidades de significados, isto é, “sentenças que respondam significativamente à interrogação formulada [...] focando também o que querem dizer na totalidade do texto analisado e quais possíveis significados carregam no contexto do texto” (BICUDO, 2011a, p. 49). O destacamento dos excertos e a constituição das unidades de significados foram realizados com o auxílio do *software* de pesquisa qualitativa Atlas t.i.⁹.

Uma vez que as unidades de significados foram estabelecidas pelos pesquisadores, retomamos a leitura, agora incidindo sobre elas e iniciamos a redução fenomenológica de modo a agrupá-las sob algum aspecto/sentido convergente. Assim, num movimento

⁹ Cf. Klüber (2014).

interpretativo de busca pela compreensão do interrogado, foram construídas, inicialmente, as primeiras ideias nucleares ou as primeiras convergências.

Numa retomada destas ideias iniciais, chegamos às segundas ideias nucleares e só então chegamos à construção das categorias abertas, as quais podem ser entendidas como convergências de sentidos percebidos pelos pesquisadores, que articulam as características globais, expressas em cada unidade. Portanto, após três reduções fenomenológicas¹⁰ se constituíram três categorias que revelaram a estrutura do interrogado em sua generalidade.

Esse movimento está sintetizado conforme o Quadro 1, indicando, da direita para a esquerda de quem lê, as primeiras convergências ou ideias nucleares até as categorias de análises, articuladas no movimento de redução fenomenológica. Salientamos que ele não foi linear como o quadro sugere, mas se constituiu num movimento de idas e vindas, de sucessivas retomadas do já realizado, na busca das características essenciais do fenômeno.

Quadro 1: Movimento de redução e articulação das ideias nucleares

3ª redução	2ª redução	1ª redução
Categorias abertas	Ideias nucleares	Ideias nucleares
C1 – Sobre os modos de compreender a Investigação Matemática	C1 - Sobre os autores referenciados nas produções PDE	C1 - Sobre os autores referenciados nas produções PDE
	C2 - Sobre a compreensão de Investigação Matemática	C2 - Sobre a compreensão de Investigação Matemática
	C3 - Sobre a compreensão da prática com a Investigação Matemática	C3 - Sobre a compreensão da prática com a Investigação Matemática C4 - Sobre a compreensão de atividades com a Investigação Matemática
C2 – Sobre a Investigação Matemática em sala de aula.	C5 - Sobre as tarefas de Investigação Matemática	C5 - Sobre as tarefas de Investigação Matemática
	C7 - Sobre a prática empreendida com a Investigação Matemática	C6- Sobre os conteúdos abordados por meio da Investigação Matemática C7 - Sobre a prática empreendida com a Investigação Matemática
	C9 - Sobre os sujeitos envolvidos no trabalho com a Investigação Matemática	C8 - Sobre os níveis e modalidades de ensino em que ocorreu a implementação do projeto PDE C9 - Sobre os alunos e a Investigação Matemática
		C10 - Sobre o professor e a Investigação Matemática

¹⁰ A redução fenomenológica pode ser entendida como uma atitude que permite ao mundo falar-nos em sua fala própria, sem impelir desejos subjetivos. É uma atitude libertada de pré-conceitos sem que seja preciso esquecer-se, ou seja, permite-se viver a abertura ao mundo preservando a totalidade do ser (BICUDO, 2011b).

	C13 - Sobre os desafios e problemas encontrados com o trabalho pautado na Investigação Matemática	C13 - Sobre os desafios e problemas encontrados com o trabalho pautado na Investigação Matemática
	C14 - Sobre os motivos que ensejaram trabalhar com Investigação Matemática no PDE	C14 - Sobre os motivos que ensejaram trabalhar com Investigação Matemática no PDE
C3 – Sobre a interlocução entre Investigação Matemática e outras tendências	C11 - Sobre a Investigação Matemática aliada a outras metodologias de ensino	C11 - Sobre a Investigação Matemática aliada a outras metodologias de ensino
	C12 - Sobre a aproximação da Investigação Matemática e Resolução de Problemas	C12 - Sobre a aproximação da Investigação Matemática e Resolução de Problemas
CI – Categorias idiossincráticas ¹¹	C15 - Sobre o ano de desenvolvimento do PDE	C15 - Sobre o ano de desenvolvimento do PDE
	C16 - Sobre as instituições de ensino que desenvolveram o PDE	C16 - Sobre as instituições de ensino que desenvolveram o PDE

Fonte: WICHNOSKI, 2016, p. 44

A categoria C1 expressou a compreensão dos professores participantes do PDE acerca da Investigação Matemática no que tange ao entendimento de cunho epistemológico, bem como dos diversos aspectos que a caracterizam. A categoria C2 expressou aspectos relativos ao modo pelo qual a Investigação Matemática adentrou o espaço da sala de aula nas práticas empreendidas no PDE. Diz das tarefas construídas, da postura assumida pelo professor e dos desafios encontrados.

E, por fim, a categoria C3 expressou a relação existente entre a Investigação Matemática e outras metodologias para o ensino de matemática., segundo os professores participantes do PDE. É reveladora de aspectos que aproximam e distanciam a Investigação Matemática da História da Matemática, das TIC e da Resolução de Problemas. É sobre esta categoria que o conteúdo deste artigo incide, por se caracterizar como uma totalidade que pode ser compreendida. No Quadro 2, apresentamos algumas unidades de significados que a constituíram.

Quadro 2: Análise hermenêutica de alguns excertos

Texto explicitado pelo professor PDE (destaque do texto)	Compreensão do pesquisador considerando o contexto do excerto (unidades de significados)
Objetiva-se abordar essa linha de pesquisa, perpassando pela História da Matemática e pela Resolução de Problemas.	Interlocução entre a História da Matemática, Resolução de Problemas e Investigação Matemática.
O trabalho será desenvolvido com abordagem que perpassa as importantes temáticas da Educação Matemática: História da Matemática, Investigações Matemáticas e Resolução de Problemas.	Atribui a interlocução entre a História da Matemática e Investigações Matemáticas, bem como entre a Resolução de Problemas e Investigações Matemáticas.
Ambientes informatizados são propícios para a realização de uma atividade Investigativa.	Coloca as tecnologias como propícias do trabalho com a Investigação Matemática.

¹¹ Abarca ideias específicas que não se articulam a outras categorias.

Juntamente com a utilização do recurso tecnológico <i>software</i> Geogebra.	Assume a interlocução entre a Investigação Matemática e mídias tecnológicas.
Desta forma, será apresentado a utilização do <i>software</i> Geogebra, que reúne recursos de álgebra, cálculo, especificamente de geometria dinâmica e funções, como procedimento metodológico mediador e investigativo do ensino de matemática.	O <i>software</i> é visto como elemento mediador das investigações algébricas.
Partindo do princípio de que durante as aulas com investigações matemáticas os alunos irão experimentar e testar várias situações, acreditamos que o computador pode potencializar suas características ao dinamizar a visualização de diferentes gráficos e testar diversos valores.	O <i>software</i> potencializa as atividades de Investigação Matemática, dado o caráter dinâmico existente nele.
Existe uma relação muito estreita entre problemas e investigações, pois uma investigação matemática desenvolve-se, de uma maneira geral, em torno de um ou mais problemas.	Concebe a ideia de que a natureza de uma tarefa de investigação matemática pode ser um problema.
TEMA DE ESTUDO: Investigação Matemática e Conjuntos Numéricos.	Propõe estudar os conjuntos numéricos e a Investigação Matemática. O estudo particulariza o conjunto dos números inteiros por meio de tarefas investigativas com a metodologia de Resolução de Problema e a Investigação Matemática. Todavia, utiliza-se da Resolução de Problema como estratégia para esse fim.
Estudar o desenvolvimento da aprendizagem dos números inteiros por meio de tarefas investigativas e resolução de problemas.	
É a Resolução de Problema e a Investigação Matemática.	
Sabemos que, as atividades investigativas conduzem a vários campos da natureza, possibilitando formular e resolver problemas.	Atribui a contextualização da Investigação Matemática com outros campos do conhecimento como possibilitadora da formulação e resolução de problemas.
Podemos dizer que as investigações matemáticas são situações problemas desafiadoras e abertas.	A Investigação Matemática é uma atividade problematizadora a partir de situações problemas.
As investigações matemáticas em sala de aula podem ser fruto da curiosidade de um aluno, do interesse de um grupo de estudantes ou classe a respeito de um determinado tema ou problema.	Concebe que a realização da Investigação Matemática deva ocorrer de acordo com um tema de interesse comum.
Os alunos, verbalmente, descreveram uma função definida por partes.	Os alunos descrevem verbalmente uma função, antes de defini-la matematicamente.
Resolução de seus problemas, o seu ensino deve ser envolto a muita contextualização e a utilização da Investigação Matemática pode intensificar a associação dos assuntos apresentados em sala de aula e as situações vistas no dia a dia.	A Investigação Matemática é vista como uma parte da Resolução de Problemas, sendo possível haver uma aplicação da primeira tendência na segunda.
Investigação Matemática na perspectiva de ampliar a participação e contribuir no ensino-aprendizagem das operações através da problematização.	Conceba a problematização como característica da Investigação matemática.

Fonte: adaptado de Wichnoski, 2016, p. 102

Apresentado o movimento metodológico efetuado, nas próximas seções trazemos o texto que explicita os aspectos revelados pela categoria C3. Discutiremos as articulações reveladas entre a Investigação Matemática e a História da Matemática, as TIC e a Resolução de Problemas, par a par; prosseguindo à interpretação sobre o revelado. Os excertos retirados *ipsis litteris*¹² das produções PDE serão distinguidos pelo recurso

¹² Expressão de origem latina que significa *nas mesmas letras*.

itálico. Antes, porém, explicitamos, de modo breve, a compreensão de Investigação Matemática assumida no momento da pesquisa inicial.

A nossa compreensão teórica acerca da Investigação Matemática se deu a partir das obras de Ponte, Brocardo e Oliveira (2013); Ponte (2003) e Serrazina *et al.* (2002). Em sentido *lato*, a compreensão de Investigação Matemática que tínhamos naquele momento era de uma metodologia de ensino inserida no paradigma investigativo (SKOVSMOSE, 2000) com o objetivo pedagógico de ensinar matemática a partir de um processo construtivo e não linear, que se desencadeia em face de tarefas próprias e cujas características essenciais são: exploração das tarefas, levantamentos de hipóteses, conjecturas, testes e reformulações, justificação e avaliação (PONTE, BROCARD, OLIVEIRA, 2013).

Assumimos que as tarefas propícias para o processo de Investigação Matemática são contextualizadas em referenciais puramente matemáticos e diferem dos exercícios e problemas por admitirem uma estrutura sempre aberta. Subdenominadas em tarefas exploratórias¹³ e tarefas investigativas¹⁴, elas abrem “um leque de exploração que vai além de uma única forma de proceder. Há tarefas que permitem explorar conceitos, outras que permitem encontrar resultados e propriedades matemáticas e outras que abrem a possibilidade de o conceito emergir da própria tarefa” (WICHNOSKI, 2016, p. 12).

Isso posto, seguimos com a explicitação das articulações relevadas, pelos professores participantes do PDE, entre a Investigação Matemática e a História da Matemática, entre a Investigação Matemática e as TIC e entre a Investigação Matemática e a Resolução de Problemas, nesta ordem.

A articulação com a História da Matemática

Particularizando a Investigação Matemática e a História da Matemática, a relação existente entre elas apareceu em uma produção que tinha por objetivo abordar conteúdos matemáticos por meio da Investigação Matemática, perpassando pela História da Matemática. Essa relação foi mencionada como objetivo da produção, conforme o excerto: *O trabalho em questão pautou-se na linha de pesquisa que tem como foco a Investigação Matemática em sala de aula, perpassando pela História da Matemática.*

¹³ São tarefas que possuem encaminhamentos (não diretos) e que oferecem algumas possibilidades, alguns indícios de como proceder à sua exploração.

¹⁴ São tarefas mais complexas, com uma estrutura aberta e poucas ou, nenhuma informação *a priori*, deixando o aluno livre para formular as questões norteadoras.

Todavia, não houve indícios de sua construção e de sua efetivação na prática empreendida e relatada no artigo final, havendo apenas uma breve menção de como pode acontecer essa relação, sem avanços no entendimento de como fazê-la, conforme excerto: *Ao realizar a investigação, surge a necessidade de o aluno reexaminar as definições e, quando possível, verificar a demonstração em Matemática. Paralelamente, aspectos da história da Matemática, com enfoques para a sua evolução, poderão ser abordados.*

No que pese à interlocução entre a Investigação Matemática e a História da Matemática, as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná propõem que a matemática deve ser concebida em uma ação reflexiva, na qual se abre espaço para um discurso matemático voltado tanto para aspectos cognitivos como para a relevância social e histórica do ensino da matemática.

Mesmo que essa interlocução seja explicitada nos documentos oficiais e concebida em um discurso teórico pelos professores em formação, ela não se efetivou em termos práticos, conforme depreendemos do relatado no artigo final dos professores PDE, revelando-se apenas como um relato sobre a história dos conteúdos matemáticos, servindo como uma introdução motivadora para os alunos, buscando despertar curiosidade pelo tema. Estas compreensões são explicitadas nos seguintes excertos: *1) Após o preenchimento da tabela podemos contar um pouco da história desse problema que foi proposto por Fibonacci. 2) Pode-se partir da história, contando que foi o matemático grego Euclides (323 – 258 a.C.), autor de Os Elementos. 3) Introduzindo esta tarefa, relatamos um pouco da história dos números poligonais, atribuídos a Pitágoras, para destacar a importância que os números possuem desde a antiguidade.*

Essa ideia, que atribui à História da Matemática uma função motivadora e lúdica em detrimento dos momentos de concentração e esforço cognitivo e coletivo no processo de ensino e aprendizagem, já foi vista como problemática para o ensino de matemática em 1993, quando Miguel (1993) evoca que o caráter motivador não reside no fato histórico do problema ou no problema propriamente dito, mas no grau e no modo como o aluno percebe o que lhe desafia, na relação entre o que lhe desafia e os seus valores, interesses e aptidões socialmente construídas.

Do nosso entendimento, a abordagem da História da Matemática reduzida a um texto introdutório, descaracteriza a própria Tendência e do ponto de vista do ensino e aprendizagem da matemática pouco ou nada contribui. É necessário que ela nos remeta para a atividade genuína da matemática – inquirições, erros, testes, refutações,

justificações e apresentações dos resultados – conduzindo o processo de ensino e aprendizagem no (ou próximo do) caminho percorrido na sua construção.

Há neste processo uma partida do (des)conhecido perpassando pelas condições da criação e apropriação do conhecimento matemático. Há um esforço para que o aluno compreenda as motivações que implicaram na descoberta do conceito estudado e o pensamento histórico aliado a ele. Isso certamente traz para esta Tendência um caráter investigativo, implícito no processo, uma vez que requer habilidade como analisar, estabelecer relações, criticar, criar hipóteses e refutá-las.

Todavia, estes aspectos apenas aproximam a Investigação Matemática e a História da Matemática em determinados momentos ou em determinadas habilidades requeridas. São congruências que não ocorrem na totalidade do trabalho a elas relacionado. Diante disso é preciso que estejam claros os aspectos que as caracterizam e que lhes são peculiares, caso contrário corre-se o risco de entender a História da Matemática de modo informativo no início de uma Investigação Matemática e em contra partida entender a Investigação Matemática como o momento de estabelecer relações, criar hipóteses e refutá-las, no decorrer de uma prática com a História da Matemática.

No bojo das discussões contemporâneas acerca da História da Matemática como recurso didático, congrega-se a concepção da sua utilização como método para aprender e operacionalizar conceitos a partir de um enfoque histórico, que vincule a matemática à uma atividade essencialmente humana, retirando dela a falsa premissa de ciência logicamente exata, conforme depreendemos da leitura do trabalho de Silva (2017).

Sobre isso Groenwald (2004, p. 47) afirma que “O enfoque histórico é uma proposta metodológica que permite ao aluno descobrir a gênese dos conceitos e métodos que aprenderá em aula”, proporcionando uma visão dinâmica da evolução da matemática enquanto corpo de conhecimento histórica e socialmente construído. Nesta mesma vertente, Mendes (2009) expõe que, a História da Matemática como um recurso pedagógico, deve ter como principal objetivo ressignificar o conhecimento matemático produzido ao longo dos tempos.

Segundo Miguel *et al.* (2009, p. 110) o uso da História da Matemática como metodologia de ensino deve conduzir os alunos “a (re)descoberta do conhecimento através do levantamento e testagem de suas hipóteses [...], através de explorações (investigações), pois nessa perspectiva metodológica espera-se que eles aprendam o “quê” e o “porque” fazem/sabem desta ou daquela maneira”.

Ao adentrar na seara da Investigação Matemática é possível que as situações propostas aos alunos sejam enxertadas de características próprias dessa Tendência, como por exemplo, a inquirição, a incerteza, os testes, as refutações, as validações e, aliadas à História da Matemática, podem ensejar a reconstrução dos conceitos matemáticos envolvidos e, concomitantemente, as motivações ou necessidades que fomentaram a sua descoberta, bem como os percalços do processo. Se assim for, a prática educativa não acontece amparada em repetição, “mas a partir do processo construtivo, “enxergando” as necessidades e processos que impulsionaram, sistematizaram e formalizaram os conteúdos estudados em sala de aula” (SILVA; SILVA; OLIVEIRA, 2016, p. 3). Antes mesmo destas discussões, Medeiros (1997) afirma que isso implica olhar tanto do ponto de vista do ensinar e do aprender matemática, quanto do seu fazer, do seu pensar e da sua construção histórica, buscando compreendê-los. Nesse sentido, a interlocução se mostra possível, pois o processo de investigação ocorre próximo ao processo histórico pelo qual o conceito foi descoberto, porém, há que se buscar clareza e rigor para tal empreitada.

A articulação com as TIC

No que concerne à possibilidade de interlocução entre a Investigação Matemática e as TIC, as próprias Diretrizes Curriculares Estaduais do Paraná, mencionam que

As mídias, como *softwares* com planilhas eletrônicas, possibilitam a solução em um tempo menor do que o necessário mediante uso de caderno e lápis. Assim, têm-se condições de realizar as devidas análises, os debates, as conjecturas e a conclusão de ideias, atitudes intrínsecas da investigação matemática (PARANÁ, 2008, p. 68).

Essa concepção alcançou o contexto do PDE e a interlocução ocorreu, em geral, particularizando os *softwares* e objetos virtuais de ensino, como por exemplo, a TV multimídia¹⁵, utilizando-os como ferramentas para o trabalho com a Investigação Matemática. Em contrapartida houve a compreensão de que a Investigação Matemática possui uma relação de auxílio ao se trabalhar com as TIC, mais especificamente, para o trabalho com o *software* Geogebra. Esta compreensão se manifesta no seguinte excerto:

¹⁵ trata-se de um televisor de “29 polegadas com entradas para VHS, DVD, cartão de memória, pendrive saídas para caixas de som e projetor de multimídia”. Por meio dessa TV é possível levar para sala objetos de aprendizagem produzidos em outras mídias como: computador, filmadoras, máquinas fotográficas, e em diversas plataformas. Considerando as mais variadas tecnologias presentes na escola, essa será especialmente relevante, pois o ambiente de apoio à aprendizagem se expande para além dos microcomputadores, DVD-players, projetores multimídias, retroprojetores, etc (PARANÁ, 2007, p. 3).

o Material Didático Pedagógico contempla uma revisão de conteúdos matemáticos básicos ao propor atividades simples para exploração dos recursos do software, que envolvam os conteúdos estruturantes Funções e Geometria, pretendendo valer-se da alternativa metodológica da investigação matemática nas atividades mais complexas.

Em certo sentido há a possibilidade de explorar o *software* utilizando-se de tarefas de Investigação Matemática, contudo a Investigação Matemática propriamente dita é tolhida, tendo em vista que o objetivo passa a não ser o mesmo. Enquanto que na primeira forma de conceber essa interlocução, a Investigação Matemática possui como objetivo o ensino dos conceitos matemáticos com o auxílio do *software*, sendo, portanto, as TIC, ferramentas mediadoras para as práticas de Investigação Matemática; na segunda, o ensino está direcionado para a manipulação de comandos puramente operacionais. Além disso, não permite que algumas ações específicas da Investigação Matemática ocorram, como por exemplo, o ato de argumentar, justificar, conjecturar, entre outros.

Segundo alguns professores participantes do PDE, os *Ambientes informatizados são propícios para a realização de uma atividade Investigativa e a integração das mídias tecnológicas às investigações matemáticas possibilita um ensino mais dinâmico e envolvente e uma aprendizagem mais consistente e prazerosa*. Frente a isso, a interlocução se mostrou no sentido de utilizar-se das TIC como ferramenta para o trabalho com a Investigação Matemática, potencializando-a.

Corroborando com a ideia supracitada, o uso dos *softwares*, uma vez que haja certa familiarização por parte de quem os manuseia, permite agilidade em construir as situações a serem investigadas, bem como a mudança dessas situações, isto é, há um caráter interativo e dinâmico que auxilia. Do mesmo modo, a TV multimídia potencializa a introdução da tarefa proposta, a qual pode ser reintroduzida a qualquer momento, se porventura o aluno perder as ideias da situação que norteia a atividade. Todavia, há alguns aspectos que podem inviabilizar o uso das TIC e um deles é a lacuna existente na própria formação do professor que não dá o suporte básico para manusear essas ferramentas. Segundo Valente (1999, p. 9), essa formação requer, algumas especificidades e deve ser

bastante ampla e profunda [...]. Não se trata de criar condições para o professor simplesmente dominar o computador ou o software, mas sim auxiliá-lo a desenvolver conhecimento sobre o próprio conteúdo e sobre como o computador pode ser integrado no desenvolvimento desse conteúdo. Mais uma vez, a questão da formação do professor mostra-se de fundamental importância no processo de introdução da informática na educação, exigindo soluções inovadoras e novas abordagens que fundamentem os cursos de formação.

Ao conceber as TIC aliadas à Investigação Matemática, é plausível pensar que a formação de professores, além de contemplar os aspectos mencionados por Valente (1999) se dê também em decorrência das necessidades existentes em se trabalhar com a Investigação Matemática, o que requer, antes de tudo, uma formação específica, que contemple aspectos epistemológicos e metodológicos tanto das TIC, quanto da Investigação Matemática.

Ao abordar tarefas matemáticas com os recursos tecnológicos, se enfatiza um aspecto fundamental da disciplina: a experimentação, a qual é maximizada pelo envolvimento dos alunos ao argumentarem e conjecturarem sobre as atividades (BORBA; PENTEADO, 2001). Mesmo que uma Investigação Matemática, enquanto atividade matemática, não se resume apenas na fase da experimentação, essa fase possibilita testar hipóteses, esboçar gráficos, verificar propriedades e teoremas, criar conjecturas e argumentar na tentativa de justificá-las.

Portanto, a interlocução se torna possível, uma vez que a Investigação Matemática se afina com concepção de ensino construtivista e do mesmo modo, “As aprendizagens da matemática em ambientes informatizados apresentam recursos em consonância com processo de aprendizagem construtivista, o qual tem como princípio básico que o conhecimento se constrói a partir das ações do sujeito” (ROCHA; RODRIGUES, 2005, p. 23). Para Gonçalves e Reis (2013, p. 424-425)

Ambientes informatizados são propícios para a realização de uma atividade investigativa, pois o aluno pode ser levado a explorar situações, a formar o próprio pensamento e a investigar [...] Tais ambientes permitem ao aluno analisar uma situação e observar regularidades, estabelecer hipóteses e testá-las na busca de uma solução para o problema proposto.

Neste sentido, a inserção das TIC pode auxiliar no processo de ensino e aprendizagem pautado na Investigação Matemática, tornando-se viável à medida que se tem um planejamento adequado acerca da prática, aliado a boas condições estruturais, bem como a familiarização *a priori* com a mídia a ser utilizada, por parte de todos os sujeitos envolvidos. Ainda, é preciso que haja clareza acerca dos aspectos e do papel de cada Tendência para que não haja uma sobreposição de encaminhamentos, isto é, ora fazer Investigação Matemática e ora utilizar-se das TIC como momentos disjuntos da prática.

A articulação com a Resolução de Problemas

No que tange à relação entre a Investigação Matemática e a Resolução de Problemas, os manifestos ocorreram de maneira significativa em termos quantitativos, com maior ênfase em relação às outras Tendências. Ocorreu como aproximação, interlocução e distanciamento. Manifestaram-se aspectos que corroboram para essa interlocução e aspectos geradores de conflitos, os quais podem ter origem nesse caráter interlocutor.

O primeiro aspecto que indicia a interlocução assumida entre essas Tendências, manifestou-se teoricamente, quando o professor participante do PDE teorizou sobre as Tendências que sustentaram o seu trabalho. Revelou-se que o professor assumiu a possibilidade de aproximação e em alguns casos buscou efetivá-la em termos práticos. A título de exemplo, ao discorrer teoricamente sobre as Investigações Matemáticas, o professor participante do PDE relata: *No desenvolvimento de Investigação Matemática podemos trabalhar com atividades investigativas e resolução de problemas que apresentam situações abertas divergentes, em que o mais importante não é chegar a um resultado, mas identificar as diferentes descobertas matemáticas que surgem.*

Em termos práticos, a aproximação entre estas Tendências se manifestou quando, dentre as tarefas propostas, algumas eram do tipo problema em torno dos quais foi desenvolvido o trabalho com a Investigação Matemática. Por outro lado, tarefas de Investigação Matemática também foram propostas para se trabalhar com a Tendência Resolução de Problemas. Uma das produções *utiliza a Resolução de Problemas como estratégia de ensino nas aulas de matemática. Para isso apresenta-se tarefas contendo alguns problemas de investigação matemática. Ao nos reportarmos às tarefas, nos deparamos com tarefas como a exemplificada no Quadro 3.*

Quadro 3: Exemplo de tarefa de Investigação Matemática segundo um professor PDE

(OBMEP, 2010) Saci, Jeca, Tatu e Pacu comeram 52 bananas. Ninguém ficou sem comer e Saci comeu mais que cada um dos outros. Jeca e Tatu comeram ao todo 33 bananas, sendo que Jeca comeu mais que Tatu. Quantas bananas Tatu comeu?

Fonte: FERREIRA, 2011, p. 9.

A aproximação entre as duas Tendências se revelou também no sentido de conceber a prática pautada em ambas, ora na Investigação Matemática, ora na Resolução de Problemas. Vale ressaltar que houve produções construídas sob a perspectiva da Tendência Resolução de Problemas, mas que em algum momento os autores afirmaram

estar trabalhando sob a perspectiva da Investigação Matemática, explicitando certa contradição entre o proposto teoricamente e o efetivado em termos práticos.

Outro aspecto revelado é que não houve cuidado com a utilização dos termos Investigação Matemática e Resolução de Problemas, deixando indícios de que estão sendo concebidos como tradutores da mesma coisa. Por exemplo, em uma produção intitulada “Investigação Matemática na perspectiva de ampliar a participação e contribuir no ensino-aprendizagem das operações através da problematização”, as autoras relatam: *Neste trabalho a metodologia da resolução de problemas se apresenta com o objetivo de forma a estimular a integração entre os alunos auxiliando de forma espontânea suas dificuldades em relação às operações. Levá-los a compreender a matemática buscando favorecer o processo ativo na construção do conhecimento. Empregar recursos didáticos de forma que favoreça o ensino e a aprendizagem de maneira significativa, a importância da matemática sendo essencial na sociedade atual para o exercício da cidadania. Proporcionar o envolvimento dos estudantes nas situações problemas relacionando os conhecimentos as situações do cotidiano.*

Posteriormente fundamentaram a produção didático-pedagógica trazendo conceitos das duas Tendências, não deixando claro sob qual delas estaria sendo concebido o trabalho. Isso se repete em outras produções. Nas próprias produções esse olhar confuso é reconhecido e justificado pelo fato de as Investigações Matemáticas e a Resolução de Problemas apresentarem algumas características similares.

Além da relação de aproximação, emergiram alguns aspectos que as distanciam, como por exemplo, os próprios encaminhamentos didáticos durante a realização das atividades. Isso aparece quando o professor participante do PDE, em tese, afirma que na Investigação Matemática *a dinâmica da aprendizagem acontece de forma diferente do que na Resolução de Problemas*. Ainda, a diferenciação ocorreu com vistas à forma como a situação se apresenta inicialmente, aos objetivos e à postura do professor ao conduzir as atividades.

A articulação apresentada nos parece equivocada, tendo em vista que a estrutura das tarefas que sustentam o trabalho com Resolução de Problemas, ainda que investigativo, não é própria da Investigação Matemática. Enquanto que na Investigação Matemática as tarefas são mais abertas, na Resolução de Problemas são mais fechadas (LAMONATO; PASSOS, 2011).

A natureza das tarefas propostas em uma Investigação Matemática se caracteriza e se coloca como um aspecto próprio, único dessa Tendência, entendidas na literatura por

tarefas de exploração e tarefas de investigação. É, portanto, um aspecto fundamental da Investigação Matemática e a sua ausência pode levar a uma descaracterização de área (WICHNOSKI; KLÜBER, 2015).

Schoenfeld (1996) acredita que um problema pode ser ambiente propício para explorações. Lamonato e Passos (2011, p. 66) entendem que “é possível, inclusive, investigar a partir de um problema”, porém alertam que tarefas cujo objetivo está focado no resultado final são “um dos pontos de maior distanciamento com a exploração-investigação matemática e com a própria resolução de problemas enquanto metodologia desencadeadora para construção de conhecimento matemático” (LAMONATO; PASSOS, 2011, p. 66).

A interlocução, portanto, é possível à medida que o problema possibilita o levantamento de conjecturas, testes, justificativas, busca por provas, socialização e debate. Aliado a isso é preciso que “em todos esses momentos, a intervenção oportuna do professor (ou formador de professores) para que a atividade se desencadeie no eixo exploratório-investigativo” (LAMONATO; PASSOS, 2011, p. 66). Isso solicita que o problema preserve uma estrutura aberta e possibilite descobertas de conceitos matemáticos no decorrer da resolução e não somente uma resposta.

De acordo com Onuchic e Allevato (2011), apesar de o problema ter uma resposta, ele deve possibilitar que o aluno descubra conceitos e assim construa o próprio conhecimento matemático. Onuchic e Allevato (2011) utilizam a Resolução de Problemas como metodologia para o ensino de novos conceitos matemáticos e não somente para reforçar conceitos já apresentados, conforme a seguinte citação:

os problemas são postos aos alunos antes de lhes ter sido apresentado, formalmente, o conteúdo matemático necessário ou mais apropriado à sua resolução que, de acordo com o programa da disciplina para a série atendida, é pretendido pelo professor. Dessa forma, o ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com um problema que expressa aspectos chave desse tópico, e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis ao problema dado (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p.85).

Na concepção de Pólya (1962) a ideia de Resolução de Problemas tem como ponto de partida uma situação, um objetivo ou uma questão bem definida e uma tarefa de Investigação Matemática, não permite que estas características sejam preservadas. Isto porque elas são estruturadas de forma mais aberta, na qual “a questão não está bem definida no início, [...] uma vez que os pontos de partida podem não ser exatamente os

mesmos, os pontos de chegada podem ser também diferentes” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p. 23).

Contudo, para Van de Walle (2001); Onuchic e Allevato (2011) a ideia de Resolução de Problemas repousa sobre situações ou tarefas para as quais “não se tem métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta” (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 81). As etapas para o trabalho com Resolução de Problemas requerem testes, justificativas, socialização, debate, registros, observações e formalização do conteúdo.

Dessa concepção a Investigação Matemática se aproxima com a Resolução de Problemas, uma vez que para Ponte (2003) ela repousa sobre questões gerais ou sobre “um conjunto de informação pouco estruturadas a partir das quais se procura formular uma questão mais precisa e sobre ela produzir diversas conjecturas” (p. 2). Em face disso, as aproximações e distanciamentos entre essas metodologias de ensino são reflexos diretos das concepções assumidas em detrimento destes conceitos e devem ser tematizadas em pesquisas de maior envergadura.

Todavia, pontuamos que fazer Investigação Matemática concomitantemente à Resolução de Problemas pode limitá-la e caracterizá-la apenas como o momento de investigar o problema. Esse momento existe, no entanto, o ato investigativo nele empreendido é mais um ato de manipulação/exploração do que de investigação. Obviamente que para resolver um problema, o ato de investigar é efetuado, no entanto esse ato é literal, no sentido de procurar conhecer o que não se sabe. Wichnoski e Klüber (2015, p. 73-74) apontam que

o ato de investigar enquanto ação pedagógica que averigua objetos matemáticos, o qual se refere à Investigação Matemática, possui especificidades próprias que permitem caracterizá-la como uma tendência que mesmo articulada, se difere das demais. Um exemplo disso é que, embora, tanto a Resolução de Problemas quanto a Investigação Matemática se desenvolvam em torno de um ou mais problemas, além de a natureza das atividades serem distintas, o ato investigativo empreendido em cada uma também é distinto.

Desse modo, o significado do termo investigar é tomado na sua imediaticidade, no sentido de descrever a ação de investigar, de exame sistemático, de inquirição e por estar investigando um objeto ou uma situação na esfera matemática, este ato é denominado de investigação matemática. Se pensarmos dessa forma, então é possível fazer uma investigação matemática em torno de um problema matemático sem considerarmos as

peculiaridades elencadas acima, uma vez que, sobre ele empreende-se um processo de inquirição, de busca, de investigação.

Entretanto, ao nos referirmos à expressão Investigação Matemática compreendemo-la, no ensino de matemática, como o processo de inquirição e investigação realizado que é conduzido por características próprias, o que não ocorre na outra forma de investigar. Cada metodologia assume métodos e técnicas distintos e isso pode fazer com que os alunos se sintam confusos na forma de conduzir a atividade, uma vez que essas formas de aprender não são habituais.

As dificuldades impostas aos alunos podem aumentar, tendo em vista que, além das dificuldades que emergem com relação à Investigação Matemática, há as dificuldades inerentes à própria matemática e à Resolução de Problemas. Sobre isso Frobisher (1994) sublinha a necessidade de os professores saberem distinguir entre a Resolução de Problemas e a realização de Investigações Matemáticas dado que ambas as atividades requerem um comportamento diferenciado por parte deles.

Lamonato e Passos (2011) ao tratar das proximidades e divergências entre estas Tendências corroboram com a ideia acima ao afirmarem que “o ponto divergente entre a investigação matemática e a resolução de problemas fica reservado à forma de apresentação da tarefa e à condução das atividades” (LAMONATO; PASSOS, 2011, p. 66).

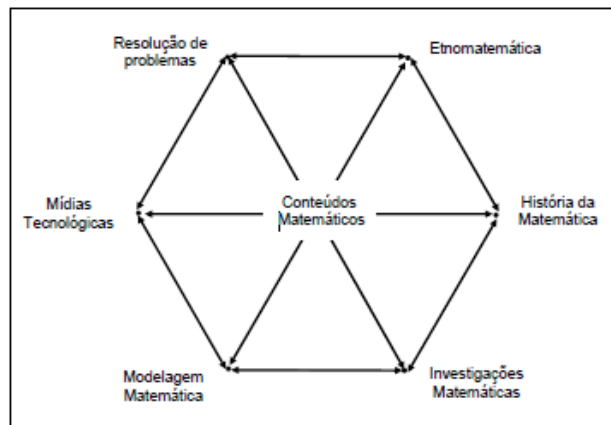
Em suma, existe uma aproximação e possibilidade de interlocução entre elas e também existem diferenças. A similaridade estaria no fato de que, ambos os processos se relacionam com a inquirição matemática (ERNEST, 1996) e, segundo nossa leitura, se inserem no paradigma investigativo. Suas diferenças residem no fato de que a Resolução de Problemas é um processo mais convergente, com metas definidas *a priori*, se comparada com a Investigação Matemática (OLIVEIRA *et al.* 1997). Além da relação de aproximação emergiram alguns aspectos que as distanciam, como por exemplo, a diferença no processo de ensino-aprendizagem, na forma como a situação se apresenta inicialmente, nos objetivos e na postura do professor ao conduzir as atividades.

Um desfecho como abertura

A interlocução entre as Tendências para o ensino de matemática já é explicitada nos documentos oficiais, a exemplo das Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado

do Paraná, a qual menciona que “o ideal é promover a articulação entre elas” (PARANÁ, 2008, p. 68) e esquematizam essa interlocução conforme a Figura 1.

Figura 1 - Interlocução das tendências para o ensino de matemática



Fonte: Paraná, 2008, p. 68

Segundo nossa compreensão, há no mínimo duas interpretações possíveis do esquema acima. Na primeira delas subentendemos que os conteúdos matemáticos se direcionam para a(s) Tendência(s) livremente, isto é, qualquer conteúdo pode ser abordado sob qualquer Tendência. Na segunda, que os conteúdos matemáticos se subdividem e se direcionam para a(s) Tendência(s) nas quais encontram possibilidades de serem ensinados, isto é, as peculiaridades de cada conteúdo determinam a utilização da(s) Tendência(s). Contrapositivamente, as Tendências para o ensino de matemática podem se definir pelos conteúdos. Certamente estes dois modos de leitura se fizeram presentes na construção das produções e da prática dos professores em formação. Além disso, o segundo modo de interpretação indica uma concepção, por exemplo, de Investigação Matemática, ao assumir que ela é definida pelos conteúdos matemáticos – alguns ou todos os conteúdos.

O documento sugere ainda que as Tendências se articulem com enfoque nos conteúdos matemáticos podendo “A abordagem dos conteúdos específicos [...] transitar por todas as tendências da Educação Matemática” (PARANÁ, 2008, p. 68). Ao buscar a interlocução entre a Investigação Matemática e as demais Tendências para o ensino de matemática é necessário prudência em qualquer tentativa de inter-relacioná-las, dado que elas possuem características próprias, diferentes perspectivas internalistas às comunidades que as norteiam e requerem posturas diferentes do professor em sala de aula, portanto, mesmo que aproximadas, são distintas. Caso contrário pode-se afetar características próprias,

descaracterizando-as, como por exemplo, reduzir a Investigação Matemática apenas à fase de exploração de um problema matemático.

Esta redução se mostrou também quando, por exemplo, as TIC são utilizadas como ferramentas mediadoras nas construções e observações geométricas em práticas com a Investigação Matemática. Neste caso há uma redução das TIC para cumprir um papel puramente técnico, estando estas inseridas e não integradas na prática pedagógica, ou ainda quando a História da Matemática aparece como história evolutiva do conceito matemático, narrada em algum momento.

Em referência à Investigação Matemática, a pluralidade e a interdisciplinaridade impostas pela literatura, pode ser uma anomalia que afeta o núcleo firme¹⁶ dessa tendência, no tocante ao princípio da natureza das atividades que, conforme mencionado, são de exploração ou de investigação (WICHNOSKI; KLÜBER, 2015). O termo anomalia designa um fato ou elemento que contradiz a previsão provável, fundada em uniformidades recorrentes (ABBAGNANO, 2007), as quais, ao se tornarem essenciais, constituem, segundo Lakatos (1978), o núcleo firme de um programa (área) de pesquisa. Portanto, tratando-se da Investigação Matemática, a interdisciplinaridade extra matemática pode ser um fato que contradiz, por exemplo, a efetivação dessa metodologia em contextos puramente matemáticos.

Wichnoski e Klüber (2015) destacaram a proximidade dada à Investigação Matemática e a Resolução de Problemas como uma anomalia existente, cuja consequência é o risco de equívocos no entendimento da Investigação Matemática, afetando diretamente o seu núcleo firme no tocante ao princípio da natureza das atividades e atribuem a causa dessa anomalia à interdisciplinaridade.

Por fim, entendemos que as aproximações explicitadas dizem respeito às características comuns entre as Tendências, que de fato existem, como por exemplo, a inquirição matemática e o paradigma investigativo no qual todas podem se assentar e que a interlocução, quando possível, não é trivial. É necessário que estejam claras as características e particularidades, as regiões de inquérito, epistemologia e objetivos de ensino de cada uma, caso contrário há a possibilidade de diluir uma Tendência em outra, culminando em esvaziamento de todas.

¹⁶ Termo específico da teoria lakatosiana (1922-1974) núcleo firme é aquilo que caracteriza os programas de pesquisa, constituído de conjecturas metafísicas, as quais são irrefutáveis. Para aprofundamentos, ver Wichnoski e Klüber (2015).

Referências

ABBAGNANO, N. *Dicionário de Filosofia*. 5 ed. (Trad.) Alfredo Bossi e Ivone Castilho Benedetti. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

BICUDO, M. A. V. *Pesquisa Qualitativa Fenomenológica: interrogação, descrição e modalidades de análises*. In: BICUDO, M. A. V. (Org). *Pesquisa Qualitativa Segundo a Visão Fenomenológica*. São Paulo: Cortez, 2011a.

_____. *Análise fenomenológica estrutural e variações interpretativas*. In: BICUDO, M. A. V. (Org). *Pesquisa Qualitativa Segundo a Visão Fenomenológica*. São Paulo: Cortez, 2011b.

_____. *Filosofia da Educação Matemática segundo uma perspectiva fenomenológica*. In: BICUDO, M. A. V. (Org). *Filosofia da Educação Matemática: Fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas*. São Paulo: UNESP, p. 23-47, 2010.

BONDÍA, J. L. Notas sobre a experiência e o saber de experiência. *Revista Brasileira de Educação*. n. 19, p.20-29, jan/fev/mar/abr, 2002.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

ERNEST, P. Investigações, resolução de problemas e pedagogia. In: ABRANTES, P.; CUNHA, L.; PONTE, J. P. (Orgs.). *Investigar para aprender matemática: textos seleccionados* p. 25-47. Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e Associação de Professores de Matemática, 1996.

FERREIRA, C. Conjuntos numéricos, com ênfase nos números inteiros. In: PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. *O professor PDE e os desafios da escola pública paranaense*, 2011. Curitiba: SEED/PR., 2010. V.2. (Cadernos PDE). Disponível em:
<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2010/2010_uel_mat_pdp_catarina_ferreira.pdf>. Acesso em 03/06/2019.

FROBISHER, I. Problems, investigations and an investigative approach. In: ORTON & G. Wain (Ed.). *Issues in teaching mathematics*. London: Cassel, 1994.

GONÇALVEZ, D. C.; REIS, F. S. Atividades Investigativas de Aplicações das Derivadas Utilizando o GeoGebra. *Bolema*, Rio Claro, v. 27, n. 46, p. 417-432, ago. 2013.

GROENWALD, C. L.S. *Perspectivas em Educação Matemática*. Canoas: Ulbra, 2004.

KLÜBER, T. E. Atlas.ti como instrumento de análise em pesquisa qualitativa de abordagem fenomenológica. *Educ. temat. digit.* Campinas, v.16 n.1 p.5-23 jan./abr, 2014.

LAKATOS, I. *História da Ciência e Suas Reconstruções Racionais*. Lisboa, 1978.

LAMONATO, M.; PASSOS, C. L. B. Discutindo resolução de problemas e exploração-investigação matemática: reflexões para o ensino de matemática. *Zetetiké*. v. 19, n. 36. p. 51 – 74, 2011.

MASINI, E. S. Enfoque Fenomenológico de Pesquisa em Educação. In: FAZENDA, I. (Org). *Metodologia da Pesquisa Educacional*. 9 ed. São Paulo: Cortez, 2004.

MEDEIROS, C. F. Por uma educação matemática como intersubjetividade. In: OLIVEIRA, H.; SEGURADO, I.; PONTE, J. P.; CUNHA, M. H. Mathematical investigations in the classroom: A collaborative project. In V. Zack, J. Mousley e C. Breen (Eds.), *Developing practice: Teacher's inquiry and educational change* (pp. 135-142). Geelong: Centre for the Studies in Mathematics, Science and Environmental Education, 1997.

MENDES, I. A. *Investigação histórica no ensino da matemática*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

MIGUEL, A.; BRITO, A. J.; CARVALHO, D. L.; MENDES, I. A. *História da matemática em atividades didáticas*. 2 ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

MIGUEL, A. 1993. *Três estudos sobre História e Educação Matemática*. 361 f. Tese de Doutorado em Educação – Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1993.

OLIVEIRA, H.; SEGURADO, I.; PONTE, J. P.; CUNHA, M. H. *Mathematical investigations in the classroom: A collaborative project*. In V. Zack, J. Mousley e C. Breen (Eds.), *Developing practice: Teacher's inquiry and educational change* (pp. 135-142). Geelong: Centre for the Studies in Mathematics, Science and Environmental Education, 1997.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, v. 5, n. 41, dez, 2011.

PARANÁ. Lei Complementar 130 - 14 de Julho de 2010. *Diário Oficial do Paraná*, Poder Executivo, Paraná, PR, 14 jul. 2010. Edição nº 8262, p.1-39, 2010.

PARANÁ. *Diretrizes Curriculares da Educação Básica, Matemática*. Departamento de Educação Básica. Paraná, 2008.

PARANÁ. *TV Pendrive*. 2007. Disponível em <http://www.diaadia.pr.gov.br/tvpendrive/arquivos/Image/conteudos/textos/comousar_tvpendrive.pdf>. Acesso em: 10 abr. 2019.

PÓLYA, G. *New York*: John Wiley & Sons. 3ª ed. Combinada. Mathematical Discovery, 1962.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações Matemáticas na sala de Aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

PONTE, J. P. *Investigar, Ensinar e Aprender*. Actas do ProfMat (CD-ROM, p.25 – 39). Lisboa: APM, 2003.

RICOEUR, P. *Do texto à acção: ensaios de hermenêutica II*. Porto: Rés-Editora, 1989.

SCHOENFELD, A. H. *Mathematical thinking and problem solving*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1996.

SERRAZINA, L., VALE, I., FONSECA, H., & PIMENTEL, T. Investigações matemáticas e profissionais na formação de professores. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Eds.). *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 41-58). Lisboa: SEM-SPCE, 2002.

SILVA, E. S. *Ensino de sistemas de numeração baseado em informações históricas: um estudo nos anos iniciais do ensino fundamental*. 149f. dissertação de Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2017.

SILVA, M. D. F.; SILVA, D. J.; OLIVEIRA, S. A. A utilização da História e Investigação Matemática na ressignificação do cálculo de áreas no ensino superior. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 12., São Paulo. *Anais...*, Brasil, 1-9, 2016.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. *Bolema*. Ano 13, n. 14, p. 66-91, 2000.

VALENTE, J. A. (Org.). *O computador na sociedade do conhecimento*. Campinas: Central da UNICAMP/NIED, 1999.

VAN DE WALLE, J. A. *Elementary and Middle School Mathematics*. 4. ed. New York: Longman, 2001.

WICHNOSKI, P.; *Uma Metacompreensão da Investigação Matemática nas Produções do Programa de Desenvolvimento Educacional do Paraná – PDE*. 155 f. Dissertação (Mestrado em Ensino) – Programa de Pós-Graduação em Ensino, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Foz do Iguaçu, 2016.

_____; KLÜBER, T. E. Um olhar Lakatosiano sobre a tendência investigação matemática. *Revemat*. Florianópolis, v.10, n. 1, p. 65-80, 2015.

Texto recebido: 10/04/2019
Texto aprovado: 01/06/2019

Texto explicitado pelo professor PDE (destaque do texto)	Compreensão do pesquisador considerando o contexto do excerto (unidades de significados)
Ambientes informatizados são propícios para a realização de uma atividade Investigativa (20:13)	Coloca as tecnologias como propícias do trabalho com a Investigação Matemática
juntamente com a utilização do recurso tecnológico <i>software</i> GeoGebra (60:2)	Assume a interlocução entre a Investigação Matemática e mídias tecnológicas
Descreve cada uma das atividades de investigação matemática realizadas com os recursos do <i>software</i> GeoGebra (43:1)	
GeoGebra e Investigação Matemática (9:3; 14:2; 16:42, 34: 1)	
Desta forma, será apresentado a utilização do <i>software</i> Geogebra, que reúne recursos de álgebra, cálculo, especificamente de geometria dinâmica e funções, como procedimento metodológico mediador e investigativo do ensino de matemática (20:8)	O <i>software</i> é visto como elemento mediador das investigações algébricas
Partindo do princípio de que durante as aulas com investigações matemáticas os alunos irão experimentar e testar várias situações, acreditamos que o computador pode potencializar suas características ao dinamizar a visualização de diferentes gráficos e testar diversos valores (53:4)	O <i>software</i> potencializa as atividades de Investigação Matemática, dado o caráter dinâmico existente nele
existe uma relação muito estreita entre problemas e investigações, pois uma investigação matemática desenvolve-se, de uma maneira geral, em torno de um ou mais problemas (14:14)	Concebe a ideia de que a natureza de uma tarefa de investigação matemática pode ser um problema
estratégia de resolução de problemas (2:6)	A Investigação Matemática como estratégia para resolver problemas
TEMA DE ESTUDO: Investigação Matemática e Conjuntos Numéricos (18:4)	Propõe estudar os conjuntos numéricos e a Investigação Matemática. O estudo particulariza o conjunto dos números inteiros por meio de tarefas investigativas com a metodologia de Resolução de Problema e a Investigação Matemática. Todavia, utiliza-se da Resolução de Problema como estratégia para esse fim
Estudar o desenvolvimento da aprendizagem do números inteiros por meio de tarefas investigativas e resolução de problemas (18:9)	
é a Resolução de Problema e a Investigação Matemática (18:11)	
A presente unidade didática utiliza a Resolução de Problemas como	

Texto explicitado pelo professor PDE (destaque do texto)	Compreensão do pesquisador considerando o contexto do excerto (unidades de significados)
estratégia de ensino nas aulas de matemática (18:13)	
Sabemos que, as atividades investigativas conduzem a vários campos da natureza, possibilitando formular e resolver problemas (66:6)	Atribui a contextualização da Investigação Matemática com outros campos do conhecimento como possibilitadora da formulação e resolução de problemas
Podemos dizer que as investigações matemáticas são situações problemas desafiadoras e abertas (27:10)	a Investigação Matemática é uma atividade problematizadora a partir de situações problemas
As investigações matemáticas em sala de aula podem ser fruto da curiosidade de um aluno, do interesse de um grupo de estudantes ou classe a respeito de um determinado tema ou problema (13:26)	Concebe que a realização da Investigação Matemática deva ocorrer de acordo com um tema de interesse comum
Os alunos, verbalmente, descreveram uma função definida por partes (41:28)	Os alunos descrevem verbalmente uma função, antes de defini-la matematicamente
Trabalhar com resolução de problemas e suas indagações, que permita a aplicação de investigações matemáticas (1:58)	A Investigação Matemática é vista como uma parte da Resolução de Problemas, sendo possível haver uma aplicação da primeira tendência na segunda
resolução de seus problemas, o seu ensino deve ser envolto a muita contextualização e a utilização da Investigação Matemática pode intensificar a associação dos assuntos apresentados em sala de aula e as situações vistas no dia a dia (32:10)	
Investigação Matemática na perspectiva de ampliar a participação e contribuir no ensino-aprendizagem das operações através da problematização (63:1)	Conceba a problematização como característica da Investigação matemática
Ao começar a falar da Investigação Matemática, como uma forma diferente de tentar resolver situações-problema (66:11)	A Investigação Matemática é vista como metodologia diferenciada para resolver problemas
Explorando e investigando atividades de Geometria por meio do GeoGebra (21:1)	O GeoGebra possibilita realizar investigações geométricas
trabalho será desenvolvido com abordagem que perpassa as importantes temáticas da Educação Matemática: História da Matemática, Investigações Matemáticas e Resolução de Problemas (31:6)	Atribui a interlocução entre a História da Matemática e Investigações Matemáticas, bem como entre a Resolução de Problemas e Investigações Matemáticas

Texto explicitado pelo professor PDE (destaque do texto)	Compreensão do pesquisador considerando o contexto do excerto (unidades de significados)
Pude constatar que integração das mídias tecnológicas às investigações matemáticas possibilita um ensino mais dinâmico e envolvente e uma aprendizagem mais consistente e prazerosa (65:18)	Coloca a interlocução entre a Investigação Matemática e mídias tecnológicas como ponto positivo em práticas pedagógicas
Foi pensando assim, que investimos no uso da tecnologia da Informática para trabalhar com o <i>software</i> educativo de Matemática GeoGebra, com a intenção de usar especificamente a metodologia da investigação matemática (43:39)	Assume a interlocução entre a Investigação Matemática e mídias tecnológicas particularizando o <i>software</i> GeoGebra
Nesse sentido, esse projeto tem a intenção de propor trajetórias de ensino e aprendizagem que envolvam tarefas de matemática com as estratégias de Investigação Matemática e Resolução de Problemas (24:4)	Assume a interlocução entre a Investigação Matemática e a Resolução de Problemas
O processo, numa investigação, é divergente e o objetivo é explorar todos os caminhos interessantes que vão surgindo no decorrer do desenvolvimento da atividade. chegada (14:16)	Reconhece diferenças entre a Investigação Matemática e a Resolução de problemas
Queremos reforçar que as investigações matemáticas constituem uma das atividades que os alunos podem realizar e que se relacionam, de muito perto, com a resolução de problemas (31:26)	Coloca Resolução de Problemas e Investigação Matemática como tendências muito próximas
objetiva-se abordar essa linha de pesquisa, perpassando pela História da Matemática e pela Resolução de Problemas (31:22)	Interlocução entre a História da Matemática, Resolução de Problemas e Investigação Matemática
Essas tarefas se relacionam com a resolução de problemas e podem partir da resolução de simples exercícios (21:15)	Há uma contradição quanto a natureza das atividades de Investigação Matemática
procuraremos articular duas tendências metodológicas da Educação Matemática, são elas: a Resolução de Problemas e a Investigação Matemática (25:23)	Possibilidade de trabalhar simultaneamente com as tendências de Investigação Matemática e Resolução de Problemas
as investigações são desencadeadas por problemas (46:47)	Não há clareza acerca da natureza de uma tarefa de Investigação Matemática
Um conceito muito próximo de investigação matemática é o de resolução de problemas (33:22)	Não há clareza de entendimento epistêmico acerca da Investigação Matemática e da Resolução de Problemas

Texto explicitado pelo professor PDE (destaque do texto)	Compreensão do pesquisador considerando o contexto do excerto (unidades de significados)
Elaborar e resolver problemas que abordem temas de divisibilidade e multiplicativos (19:11)	Compreende a Investigação Matemática como a ação de elaborar e resolver problemas
Os limites que diferenciam uma exploração de uma investigação ou de uma resolução de problemas nem sempre são claros (33:16)	A falta de clareza acerca das diferenças entre essas duas tendências é assumida pelo próprio professor PDE
As investigações matemáticas são ainda muito confundidas com a resolução de problemas, por apresentarem algumas características similares (30:8)	Atribui às características similares a falta de clareza acerca das diferenças entre essas tendências