

Factorisation des polynômes. Une étude basée sur le développement d'un PER

MÍRIAM DO ROCIO GUADAGNINI¹

MARLENE ALVES DIAS²

Abstract. The aim of this paper is to present partial results of an ongoing study, which investigates the teaching of polynomial factoring through analysis of didactic and mathematical praxeologies, institutional and personal relationships developed for their study, based on Brazilian official documents and textbooks for future intervention with a group of mathematics teachers and high school students. We take as theoretical foundation the anthropological theory of the didactic and as a methodology, study and research paths (SRP) by Chevallard and collaborators.

Resumo. O objetivo deste artigo é apresentar os resultados parciais de um estudo em curso, que investiga sobre o ensino da fatoração de polinômios para a análise das praxeologias didáticas e matemáticas e das relações institucionais e pessoais desenvolvidas para seu estudo, com base nos documentos oficiais e livros didáticos brasileiros, para uma intervenção futura com um grupo de professores de matemática e estudantes do ensino médio. Tomamos como fundamentação teórica a teoria antropológica do didático de Chevallard e, como metodologia, o percurso de estudo e pesquisa (PEP) de Chevallard e colaboradores.

1. Introduction

Dans cet article nous présentons une partie d'une recherche en cours, qui porte sur l'enseignement de la factorisation des polynômes. Nous considérons que la factorisation des polynômes est une notion qui entraîne l'introduction à la pensée algébrique et qu'elle est utile à la simplification et à la résolution des tâches impliquant, par exemple, les équations, les expressions au collège (élèves de 11-14 ans) et au lycée (élèves de 15-17 ans) ainsi que les limites, dérivées et intégrales au niveau supérieur.

La factorisation des polynômes est également importante pour l'étude et la réalisation de types de tâches intra et extramathématiques, telles que, par exemple, le calcul de la superficie maximale d'une région selon son périmètre, l'usage de formules comme celle de la somme d'une progression arithmétique ou encore le calcul de la moyenne arithmétique. Pour ce dernier type de tâches, il est nécessaire d'associer l'utilisation des parenthèses, en particulier, par exemple, pour la construction d'un programme informatique qui calcule la moyenne arithmétique des élèves d'une classe.

Ce dernier exemple, très simple, est cité par les enseignants des cours d'informatique, notamment par ceux qui enseignent la programmation. Ces enseignants observent les nombreuses difficultés rencontrées par leurs élèves : ces derniers indiquent la somme sans parenthèses, ce qui conduit à diviser seulement le dernier effectif de la somme par la quantité des effectifs (par exemple : $x_1 + x_2 + x_3/3$ au lieu de $(x_1 + x_2 + x_3)/3$). Cela semble représenter une

¹ Université Anhanguera de São Paulo, Brésil – miriamguadagnini@hotmail.com

² Université Anhanguera de São Paulo, Brésil – maralvesdias@gmail.com

El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza

Eje 3. *Cuestionar el mundo: avances hacia un nuevo paradigma*

difficulté liée à un cas simple de factorisation, non traité dans l'enseignement de cette manière, étant donné qu'en général, la formule est donnée sans la mettre en relation avec d'anciennes notions mathématiques.

Nous soulignons également qu'au lycée, comme dans les classes du niveau supérieur, la factorisation des polynômes est utilisée comme une connaissance disponible, déjà étudiée par le passé, pour faciliter la réalisation de certaines tâches. Ici, il est important de noter qu'il s'agit d'un objet mathématique enseigné au collège. Une fois établi, il est prévu que l'élève puisse l'utiliser aussi souvent que nécessaire, sans que cela nécessite une demande explicite.

On attend également que la factorisation soit un objet de connaissances disponible pour résoudre les problèmes dans divers domaines des mathématiques et des autres sciences, l'enseignant pouvant ou non en reprendre l'étude, selon le groupe d'élèves.

Ainsi, comme explicité ci-dessus, l'intérêt de la factorisation des polynômes comme objet d'étude pour le chercheur vient du fait qu'il s'agit d'un objet mathématique développé au collège, et présent au lycée et dans les divers cours d'études supérieures en tant qu'outil explicite (Douady, 1992), lors de l'étude de nouveaux concepts mathématiques.

C'est pourquoi nous cherchons à comprendre comment les manuels et les propositions éducatives brésiliennes présentent la notion de factorisation des polynômes : est-elle introduite en coordination avec d'autres connaissances ou isolée et sans références explicites ? Nous essayons de comprendre aussi si les concepteurs des propositions éducatives et des manuels brésiliens ont le souci de montrer l'importance de la factorisation des polynômes en tant qu'outil facilitant le développement de diverses tâches intra et extramathématiques.

Ainsi, une étude préalable identifie les praxéologies mathématiques et didactiques mises en œuvre aujourd'hui lors de l'étude de la factorisation, et examine la façon dont elles s'articulent dans les mathématiques ainsi que dans les autres sciences. Puis nous cherchons à déceler les moyens possibles de construire *a priori* un parcours d'étude et de recherche (PER).

Ce PER a pour but de comprendre comment la mise en œuvre de la factorisation selon un abord fonctionnel plutôt que formel peut aider les élèves à l'utiliser lorsque cela est nécessaire. En effet, nous espérons que ce PER puisse aider les participants à réfléchir sur la diversité des façons de travailler avec la factorisation des polynômes dans les différents domaines des mathématiques, afin de donner du sens à cette notion, et de manière à ce que les élèves puissent être capables de l'utiliser, si nécessaire, de façon indépendante.

Dans cet article nous ne présentons que quelques recherches nationales sur ce sujet et quelques éléments sur l'étude préalable des praxéologies qui sont proposées pour être développées au collège et au lycée : le but est de comprendre la nature du rapport institutionnel attendu à ces praxéologies, afin de construire un PER qui permette d'aider les élèves à développer un rapport fonctionnel à la factorisation polynomiale.

2. Méthodologie

L'étude est divisée en trois étapes, que nous présentons ci-dessous.

Une première étape correspond à l'étude de recherches nationales et internationales sur la notion de factorisation des polynômes, contribuant à construire et à déterminer le modèle épistémologique de référence (MER) et le modèle didactique de référence (MDR), selon la proposition de Marianna Bosch et Josep Gascón (2010). Ces derniers insistent sur le fait que les

différentes façons d'organiser l'enseignement des mathématiques s'appuient, dans une certaine mesure, sur « una manera particular de interpretar las matemáticas – un *modelo epistemológico* - estrechamente relacionada con una conceptualización concreta de lo que se entiende por “enseñar e aprender matemáticas” en cada momento histórico, en cada tradición cultural y en cada institución: lo que podemos considerar como un *modelo didáctico* » (Bosch & Gascón, 2010, p. 56).

Dans une deuxième étape, nous cherchons à identifier des rapports institutionnels (Chevallard 1992), que nous qualifions de prévus et existants : il s'agit en effet d'analyser les propositions pour l'enseignement et les manuels de collège et du lycée. L'étude de ces rapports permet d'identifier les praxéologies habituelles sur lesquelles peut s'appuyer le développement du MER.

Nous observons ici que les propositions ont été analysées à travers les paramètres curriculaires nationaux qui donnent des indications plutôt sur les compétences attendues. Ceci nous a conduit à l'analyse des manuels, que nous pouvons considérer comme manifestant des rapports institutionnels attendus une fois qu'ils sont évalués par les spécialistes indiqués par le ministère et distribués aux élèves après le choix par les enseignants. Cela explique que les praxéologies, en général, sont développées dans les manuels.

Comme exemple de types de tâches indiqués dans le curriculum pour l'enseignement de la factorisation polynomiale nous avons rencontré : 1) obtenir des expressions équivalentes à une expression algébrique au moyen de factorisations et de simplifications, 2) résoudre des situations qui impliquent une équation de second degré dont les racines sont obtenues par factorisation et discuter la signification de ces racines par rapport à la situation proposée. Pour ces types de tâches, il est indiqué l'utilisation des notions de factorisation et de simplification, mais les techniques elles-mêmes et les technologies associées à ces notions sont laissées à la charge de l'enseignant.

La troisième étape est la construction de parcours possibles qui peuvent être suivis par les élèves à partir d'une question génératrice initiale. Ces parcours seront développés *a priori* au moyen d'une carte sur laquelle sont proposés : les variables associées à la question cible, les réponses possibles et de nouvelles questions, c'est-à-dire la construction du PER.

Le PER est une méthodologie de recherche didactique axée sur la motivation et le développement des concepts et des notions mathématiques, qui crée du sens pour les élèves. Cette méthodologie tient compte des connaissances préalables de ces mêmes élèves, et requiert pour son développement, une modification du contrat didactique habituel. Cette modification engendre en effet des difficultés qui peuvent être liées, tant au manque de connaissances nécessaires à leur développement qu'à la méthode habituelle d'enseigner, lorsque l'enseignant est le directeur de l'étude.

Nous présentons brièvement un état des recherches sur la factorisation des polynômes, en pointant dans ces recherches les changements proposés sur les praxéologies usuelles, afin de modifier l'état actuel de l'enseignement et de l'apprentissage de cet objet mathématique.

3. Résultats des études des recherches nationales et internationales sur la factorisation des polynômes

Au niveau national, la recherche de Sonia Burigato (2007), qui s'appuie sur la théorie des champs conceptuels de Gérard Vergnaud, identifie les difficultés des élèves, en particulier celles liées à la factorisation. Ses analyses sont centrées sur les théorèmes en actes utilisés par les étudiants. La séquence des activités sur la factorisation a été proposée de façon à permettre l'utilisation du logiciel Aplusix. Les analyses montrent que les élèves qui ont le mieux réussi sont ceux qui ont le mieux compris le développement de la situation en utilisant le logiciel.

Dans cette recherche, l'auteur souligne que le test diagnostique utilisé au début de la recherche a permis de vérifier que les élèves ont peu de compétences pour la factorisation, traitant, par exemple, des expressions en tant qu'équations algébriques. Ce constat nous conduit à faire l'hypothèse que ces difficultés résultent de la façon dont est introduite et développée la factorisation au Brésil. Généralement, elle est enseignée par le moyen de la mémorisation ; la factorisation est rarement utilisée comme outil explicite pour l'introduction de nouveaux concepts et on n'établit pas de connexions avec ceux déjà étudiés. Cela nous fournit des indices sur un premier élément qui pourra surgir lors du développement du PER.

Saete Rodrigues (2008) centre son étude sur les identités remarquables en utilisant le logiciel Aplusix comme outil pour la construction et le développement d'une séquence didactique. L'auteur cherche à étudier si le logiciel contribue à la coordination des registres de représentation sémiotique. Pour le développement de sa recherche, il utilise des éléments de l'ingénierie didactique associés au traitement et à la conversion des registres de représentation sémiotique.

Il résulte de cette étude que, pour certains élèves, l'étude des identités remarquables se caractérise par la mémorisation des cas possibles. Le chercheur indique qu'un rapport différent à ces objets mathématiques pourrait être développé en montrant l'utilité de l'emploi de la factorisation et des identités remarquables lors de l'introduction d'autres notions et concepts mathématiques, pour lesquels la factorisation et les identités remarquables sont utilisées en tant qu'outil explicite.

Un autre travail encore, celui de Pedro Silva (2012), utilise des éléments d'ingénierie didactique pour étudier la performance des élèves dans l'enseignement de la factorisation des polynômes. L'auteur souligne que les enseignants ont tendance à reproduire ce qu'ils ont appris quand ils étaient étudiants au collège et au lycée, c'est-à-dire qu'ils traitent la factorisation des polynômes comme un ensemble de règles à mémoriser pour ensuite les appliquer aux études d'autres notions et concepts.

L'analyse des rapports personnels des étudiants montre que peu d'entre eux sont en mesure d'appliquer les cas les plus simples de la factorisation et la plupart d'entre eux ne comprend pas la nécessité d'étudier de nombreux cas de factorisation, la factorisation des polynômes se réduisant à des cas d'utilisation spécifique et peu articulée.

Nous avons également constaté, dans la recherche de Keyla Borgato (2013) l'utilisation des éléments d'ingénierie didactique pour étudier le rôle des représentations géométriques dans l'apprentissage des identités remarquables et de la factorisation des polynômes. L'auteur développe une ingénierie didactique qui articule les cas possibles des identités remarquables et la factorisation des polynômes aux connaissances déjà développées en géométrie plane. Les

élèves qui ont participé à l'étude n'avaient pas encore étudié la factorisation des polynômes. À la fin de la séquence didactique l'auteur souligne qu'il a été nécessaire de rappeler la notion d'aire des figures planes, en particulier la représentation algébrique de ce concept : les élèves ayant participé à la recherche ne mobilisent pas spontanément les connaissances étudiées les années précédentes. La proposition de K. Borgato permet de construire un rapport institutionnel à la factorisation polynomiale qui ne se réduise pas à la mémorisation de règles, et permet de comprendre le rôle d'une nouvelle notion par rapport à celles déjà enseignées. Elle montre aussi la nécessité de revoir et de remédier aux difficultés qui entravent le développement de ce type de proposition.

Toujours au niveau national, la recherche déjà réalisée par Míriam Guadagnini (2013) traite de la factorisation des polynômes pour l'étude des équations du second degré. Cette séquence a été mise en œuvre avec un groupe de dix élèves volontaires de neuvième année (étudiants de 14 ans) du collège. Les résultats montrent que les élèves utilisent la factorisation comme une recette mémorisée, ce qui correspond à la façon dont la notion de factorisation a été enseignée l'année précédente. Toutefois, lors d'un travail avec les différents registres de représentation sémiotique, on a pu observer que le rapport personnel des élèves empêchait leur évolution dès lors qu'ils avaient tendance à chercher les techniques mémorisées pour les appliquer, sans réfléchir à leur applicabilité réelle.

L'étude des recherches nationales existantes sur la factorisation nous a permis de mettre en évidence, d'une part, la force du rapport institutionnel existant et les difficultés qu'ont les étudiants à comprendre le rôle de cette notion lors de l'étude d'autres notions et concepts ; d'autre part, quelques éléments des modèles épistémologique et didactique actuellement dominants dans les écoles brésiliennes.

Les recherches sur la factorisation des polynômes au niveau international montrent qu'il y a peu de recherches portant sur cette notion mathématique.

En 1979, Jacques Tonnelle (1979 cité par Caroline Bardini, 2001, p. 15) a mis en évidence que « la "factorisation" est un monde fermé et fragile pour la plupart des élèves ». Deux décennies plus tard, C. Bardini (2001) note que, pour la plupart des élèves, la factorisation continue d'être une manipulation algébrique, dépourvue de sens, souvent réalisée à l'aveuglette, dont le succès dépend de la complexité des expressions proposées.

C. Bardini souligne encore que l'enseignement de la factorisation en troisième (élèves de l'âge de 13 et 14 ans) ne tient pas compte de la complexité liée à ce concept, même si parmi les concepts mathématiques étudiés dans les classes de troisième, la factorisation occupe une place remarquable. L'auteur note encore que l'apprentissage de la factorisation présente des difficultés pour les élèves et que les exercices ont un faible niveau de complexité puisque l'on n'explore pas les applications qui peuvent y être associées. Ainsi, selon C. Bardini, dans la mesure où la factorisation est immédiatement traitée comme un objet et comprise en dehors de tout caractère utilitaire, son enseignement est essentiellement formel.

De plus, Nawal Abou Raad (2004) affirme, à travers l'analyse de manuels scolaires, que la présentation de la factorisation est trop formelle, avec des définitions et des méthodes données à partir d'exemples. La factorisation est presque toujours présentée comme un procédé méthodologique, dont les élèves doivent mémoriser les formules et l'utiliser sans moyen de vérification de la validité du résultat. L'auteure remarque également que les élèves ne disposent

pas des informations nécessaires pour utiliser la factorisation dans des situations nouvelles, qui favorisent la construction de nouvelles connaissances, en la réduisant ainsi au rang d'outil acquis par l'éducation.

Une autre recherche sur le sujet est celle de Ai Qoc Nguyen (2006) : il souligne qu'au-delà des erreurs de calcul ou de symbole qui affectent la qualité de la mise en œuvre d'une technique valable de la factorisation pour résoudre les équations du second degré, certains éléments technologiques sont sous-utilisés par les étudiants. Ceci correspond à une appropriation partielle, voire absente, des éléments technologiques enseignés. L'auteur ajoute que de telles erreurs sont symptomatiques de problèmes survenus lors de la construction du rapport personnel initial, et que ces problèmes concernent non seulement les techniques, mais les praxéologies dans leur ensemble.

María Palomino (2011) démontre par ailleurs que les techniques pour mettre en facteur et développer un polynôme, qui se fondent sur l'étude des représentations graphiques, sont un autre moyen de déterminer si un polynôme est factorisable. Cette nouvelle méthode peut être mise en œuvre en étudiant les variations, les zéros de polynômes, ou par la reconnaissance des expressions. C'est une façon d'enrichir l'apprentissage, en fournissant également l'accès à des problèmes qu'ont rencontrés les mathématiciens dans leurs recherches de nouvelles manières de déterminer les racines d'une équation. Ainsi, M. Palomino remarque que la factorisation des expressions des polynômes relève d'un type de tâches beaucoup plus étendu qu'on ne le pense, puisqu'il s'agit de la production, de la reconnaissance et de la caractérisation d'expressions équivalentes. Ceci suggère alors que la capacité et les performances des élèves sont associées à un problème de compréhension plus générale des polynômes.

Après avoir brièvement présenté les recherches existantes, tant au niveau national qu'au niveau international, nous considérons d'une part, certaines des possibilités d'enseignement qui existent actuellement au Brésil, à travers les propositions curriculaires, qui dans notre recherche correspondent aux rapports institutionnels attendus. D'autre part, l'analyse des manuels indiqués par le ministère de l'Éducation nationale, nous permet d'identifier les rapports institutionnels existants.

4. Résultat de l'analyse des rapports institutionnels attendus et existants

Notre recherche s'appuie sur les documents officiels suivants :

- pour le collège, les paramètres curriculaires nationaux (PCN) Brésil (1998), et les manuels indiqués par le programme national des manuels scolaires (PNLD), Brésil (2013) ;
- pour le lycée, les paramètres curriculaires nationaux (PCNEM), Brésil (2000), les paramètres curriculaires nationaux + (PCN+), Brésil (2002) et les organisations curriculaires (OCEM), Brésil (2006).

Nous appelons rapport institutionnel existant, en référence à la notion de rapport institutionnel introduite par Y. Chevallard (1992), le rapport que nous pouvons déduire de l'analyse du matériel curriculaire disponible.

Tout d'abord la factorisation est introduite en huitième année du collège (élèves de 13-14 ans) dans des exemples nécessitant des articulations avec la notion d'aire, afin de faciliter la mémorisation par des images mentales. Ceci est développé dans la partie « cours » des manuels scolaires, en particulier, lors de l'introduction des identités remarquables.

Dans le tableau 1, nous présentons les types de tâches proposés lors de l'étude de la factorisation polynomiale au collège. Il est important de noter que ces praxéologies sont proposées à l'étude dans un seul bimestre, sans que la façon de les intégrer à l'étude des praxéologies introduites dans la séquence ne soit explicitement mentionnée.

Types de tâches (manuels scolaires – collège)	Techniques et technologies associées
<p>T1 : Mettre en facteur des termes d'une expression algébrique donnée.</p> <p>T2 : Développer une expression algébrique donnée.</p> <p>T3 : Appliquer la factorisation et les identités remarquables dans les calculs avec des nombres. Exemple : Calculer 99^2.</p> <p>T4 : Appliquer la factorisation et les identités remarquables dans les fractions algébriques.</p> <p>T5 : Appliquer la factorisation et les identités remarquables dans la résolution des équations du second degré.</p>	<p>$\tau 1$: Facteur commun et groupement.</p> <p>$\theta 1$: Les cas de factorisation.</p> <p>Pour les types de tâches T2, T3, T4 et τ : Facteur commun, groupement et identités remarquables.</p> <p>θ : Les cas de factorisation et les identités remarquables.</p>

Tableau 1. Types de tâches, techniques et technologies proposées.

Nous pouvons dire que cet enseignement suit le même schéma que celui de l'introduction de l'objet factorisation observé par C. Bardini (2001) pour le collège en France. L'utilisation de la factorisation n'est explicitement présente qu'en neuvième année (élèves de 14-15 ans), lors de l'étude des solutions d'une équation du second degré à partir des techniques de factorisation.

Nous appelons rapport institutionnel *attendu*, le rapport que nous pouvons déduire de l'analyse du curriculum de la factorisation des polynômes tel qu'il ressort des paramètres curriculaires nationaux du Brésil (1998). Ainsi, le document recommande la production d'expressions équivalentes à une expression algébrique donnée, en utilisant la factorisation et des simplifications. L'objectif est alors la transformation d'une expression algébrique en une autre équivalente, plus simple, afin de résoudre un problème. Malgré cette déclaration, aucun exemple d'application n'est fourni pour aider le travail de l'enseignant.

Pour le lycée, les propositions curriculaires, dont les paramètres curriculaires nationaux du lycée du Brésil (2000), préconisent l'étude des polynômes et des équations algébriques au sein de l'étude des fonctions, par le biais de la résolution des problèmes, et non comme contenu isolé. Ceci suppose l'application des différents cas de factorisation des polynômes, mais une fois encore, il n'y a pas d'exemples pour aider les enseignants à comprendre cette préconisation.

Ainsi, nous pouvons dire qu'au Brésil, les propositions mathématiques, mais aussi didactiques, pour l'enseignement de la factorisation au collège semblent être une connaissance plus théorique que pratique. En somme, la factorisation en tant qu'outil de résolution des problèmes est peu connue des étudiants et donc rarement utilisée, donnant lieu à une connaissance souvent dénuée de fonctions.

Notre analyse des manuels brésiliens recommandés par le ministère de l'Éducation pour le collège et le lycée, cherche à identifier la présence des formules associées aux cas de

factorisation et aux identités remarquables afin de mettre en évidence l'utilisation explicite de leurs propriétés, sans qu'elles soient traitées comme telles. Ainsi, nous trouvons dans les différents domaines des mathématiques, des formules qui présupposent des connaissances liées à la factorisation et aux identités remarquables. Des exemples en sont ceux du facteur commun évident, de la propriété de distributivité, du carré de la somme ou du carré de la différence de deux termes.

Par exemple, pour la géométrie prescrite au collège, on trouve les formules de calcul suivantes :

- nombre de diagonales d'un polygone convexe :

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

- des mesures des angles intérieurs d'un polygone à n côtés :

$$S = (n-2) \cdot 180$$

- calcul du volume : de la pyramide :

$$V = \frac{1}{3}(b \times h)$$

- volume de la sphère :

$$V = \frac{4}{3}\rho r^2$$

- volume du cône :

$$V = \frac{1}{3}(b \cdot h)$$

- déduction du nombre maximum d'intersections avec des droites distinctes : $I = \frac{n^2 - n}{2}$

- hauteur du triangle équilatéral :

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

- aire de la surface d'un cylindre :

$$A = 2pr(h+r)$$

Au lycée, au-delà des formules déjà mentionnées, on trouve en géométrie les formules de calcul suivantes :

- distance entre deux points :

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- détermination de l'équation du cercle de centre $O(a, b)$ et de rayon r :

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$$

- aire de la région triangulaire donnée par la formule de Héron :

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

En statistique, on trouve la formule de calcul de la variance : $V = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2}{n}$, dans les

mathématiques financières, la formule de calcul des intérêts composés : $M = C(1+i)^t$. Pour les suites numériques, on a la formule de calcul du terme général d'une suite arithmétique :

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

et celle de la somme des termes d'une suite arithmétique finie :

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Ces formules sont généralement déduites lors de l'introduction des concepts et notions qui leur sont associés et leur obtention requiert l'utilisation de certaines techniques de factorisation. L'identification non-exhaustive de ces formules associées aux différents domaines mathématiques met donc en évidence la possibilité de les utiliser pour motiver l'étude et l'usage de la factorisation.

L'étude des rapports institutionnels attendus et existants a montré que la factorisation de polynômes est traitée sous une forme déconnectée des autres notions mathématiques. Ainsi, son application pour simplifier les fractions algébriques n'est considérée que par un seul exemple à utiliser dans l'avenir. Son application à l'étude des solutions d'une équation de second degré est introduite en huitième année du collège. Cependant, avec l'introduction de la méthode de résolution d'une équation du second degré par le discriminant en neuvième année, la méthode de solution par factorisation finit par être abandonnée par les étudiants.

L'analyse des rapports institutionnels a également montré que la proposition pour l'enseignement de la factorisation polynomiale est peu articulée avec d'autres praxéologies mathématiques et extramathématiques. D'où l'émergence de difficultés rencontrées par les élèves. Ce qui nous a conduit aux questions suivantes : Comment l'étude de la factorisation des polynômes à travers un PER peut-elle aider à repenser l'enseignement habituel de la factorisation des polynômes ? Comment justifier la factorisation en tant qu'outil pour le développement de praxéologies intra et extramathématiques ? Comment faire comprendre l'importance de cette notion et la nécessité de son usage ?

Nous décrivons brièvement ci-dessous la notion PER et les premières questions associées au PER que nous sommes en train de développer.

5. Parcours d'étude et de recherche

Selon Yves Chevillard (2009), Berta Barquero, Marianna Bosch et Josep Gascón (2011), un parcours d'étude et de recherche (PER) commence par l'étude d'une question Q ayant une forte puissance génératrice d'étude. L'étude de la question génératrice Q engendre de nouvelles questions dérivées, dont l'étude peut conduire à son tour à l'usage d'outils mathématiques. Selon les auteurs, ce modèle méthodologique fait vivre une relation dialectique entre questions et réponses, telle qu'elle peut exister dans la construction des connaissances scientifiques et en particulier dans l'activité mathématique.

D'après les auteurs, un PER introduit dans l'institution scolaire une épistémologie qui donne du sens à l'étude des mathématiques, permettant aux élèves d'étudier et de comprendre l'objet de l'étude à travers les questionnements et les enquêtes.

B. Barquero, M. Bosch et J. Gascón (2011) soulignent également que le but principal d'un PER est de répondre à la question posée initialement et n'est pas celui d'apprendre ou d'enseigner des concepts. Le parcours d'étude et de recherche peut être considéré comme un objectif de l'enseignement en lui-même, et non seulement comme un moyen pour construire de nouvelles connaissances. Ainsi, selon les auteurs, développer un PER suppose de donner

simultanément la même importance au processus d'étude et à la réponse que la question initiale engendre.

La conception d'une ingénierie de type PER est réalisée au moyen d'une question génératrice (Q_0) produisant d'autres questions qui génèrent un parcours d'étude et de recherche comme réponse à la questions Q_0 ; cela nous conduit à considérer la question Q_0 : « Comment décider à quel moment mettre en facteur une expression algébrique ? »

Quelles questions peuvent être dérivées de la question Q_0 et quelles réponses ? Nous présentons ici quelques questions dérivées :

Q_1 : Quel est le degré du polynôme ?

Q_2 : La factorisation est-elle viable ?

Q_3 : Pour quels cas ?

Q_4 : Quels concepts et applications intramathématiques et extramathématiques peuvent rendre nécessaire la factorisation ?

Q_5 : Dans quels domaines de la science peut-on utiliser la factorisation ?

Q_6 : Quelles applications sont possibles dans ces domaines ?

6. Perspectives

De cette question initiale, nous allons élaborer les chemins possibles : ceux-ci sont encore en construction, et correspondent aux liens entre les questions, les variables et les réponses qui peuvent apparaître lors du développement du parcours.

Une intervention sera réalisée à travers des rencontres autour du PER construit à partir de la question Q_0 , avec un groupe d'étudiants de première année de lycée (élèves de 15 ans) ou avec un groupe d'enseignants en formation initiale, des volontaires pour les deux groupes. L'intention est de sensibiliser aux idées et aux pratiques, de susciter la réflexion, la discussion et l'argumentation, de sorte que cette intervention puisse contribuer à un enseignement utile et présent, en prenant en compte la factorisation des polynômes dans divers domaines de la science.

Nous espérons que cette étude en cours puisse promouvoir le travail avec les concepts et notions du domaine des mathématiques et des autres sciences, notamment ceux du domaine algébrique. Nous espérons mieux comprendre, à travers cette étude, les possibilités d'usage de la factorisation des polynômes à partir de l'articulation avec les connaissances mathématiques et également avec les connaissances extramathématiques qui sont déjà, ou peuvent être, développées au collège.

Cela nous conduit à identifier les praxéologies didactiques et mathématiques qui peuvent être utilisées par les étudiants, en faisant remarquer que les analyses des recherches existantes sur la factorisation des polynômes montrent que cette question reste encore peu étudiée. Notre proposition vise ainsi à encourager les enseignants à trouver des applications possibles, à travers une étude axée sur les PER.

Cela peut représenter une avancée, en particulier pour répondre aux besoins brésiliens, puisqu'est actuellement mis au débat une nouvelle proposition pour l'éducation de base (élèves de 6-17 ans). Cette proposition recommande un curriculum minimal, que les éducateurs devront suivre, ces derniers restants responsables des choix méthodologiques et des contenus qu'ils décident de privilégier.

Références

- Abou Raad, N. (2004). *Les Identités Remarquables fonctionnent-elles comme un théorème ou comme une règle d'action dans le sens de la factorisation pour les élèves de la classe de troisième en France*. (Mémoire de DEA non publié). Université Lumière Lyon II, France.
- Bardini, C. (2001). Le rapport des élèves à la factorisation en fin de troisième. *Cahiers de Didirem*, 35, 1-104.
- Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2011). Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(3), 339–352.
- Borgato, K. C. (2013). *O ensino de produtos notáveis e fatoraço de polinômios: uma articulação entre álgebra e geometria*. (Dissertação de mestrado Profissional em Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Brasil.
- Bosch, M. & Gascón, J. (2010). Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los “talleres de prácticas matemáticas” a los “recorridos de estudio e investigación”. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade & C. Ladage (Eds.) *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 49-85), Montpellier, Francia : IUFM de l'Académie de Montpellier.
- Burigato, S. M. M. da S. (2007). *Estudo de Dificuldades na Aprendizagem da Fatoraço nos Ambientes: papel e lápis e no software Aplusix*. (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Brasil.
- Brésil. (1998). Parâmetros curriculares nacionais. Matemática: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental. Brasília: MEC/SEF
- Brésil. (2000). Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Brasília: MEC.
- Brésil. (2002). Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN+) Ensino médio. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC.
- Brésil. (2006). Orientações curriculares para o ensino médio (vol. 2). Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC.
- Brésil. (2013). Guia de livros didáticos: PNLD 2014. Matemática-Ensino Fundamental, anos finais. Brasília: MEC/SEF
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73-112.
- Chevallard, Y. (2009). La notion de PER : problèmes et avancées. UMR ADEF. Toulouse, France.
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=161
- Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères*, 6, 132-158.
- Guadagnini, M. R. (2013). *O uso da fatoraço na resolução de equações do 2o grau por alunos do 9o ano do Ensino Fundamental*. (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Brasil.
- Nguyen, A. Q. (2006). *Les apports d'une analyse didactique comparative de la résolution des équations du second degré dans l'enseignement secondaire au Vietnam et en France*. (Thèse de doctorat). Université Joseph Fourier Grenoble I, France.

- Palomino, M.F.M. (2011). *A factorización de polinomios de una variable real em um ambiente de Lápiz/Papel (L/P) y álgebra computacional (CAS)*. (Trabajo grado de Magister). Universidad del Valle, Columbia.
- Rodrigues, S. (2008). *Uma análise da aprendizagem de produtos notáveis com o auxílio do programa Aplusix*. (Dissertação de Mestrado Profissional). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil.
- Silva, P. R. S.. (2012). *O ensino de fatoração algébrica por atividades*. (Dissertação de Mestrado). Universidade Estadual do Pará, Brasil.
- Tonnelle, J. (1979). *Le monde clos de la factorisation au premier cycle*. (Mémoire de DEA). Université d'Aix-Marseille II, Université de Bordeaux I, France.