EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i4p278-297

Analyse d'une séquence basée sur des problèmes de généralisation pour l'entrée dans l'algèbre : Apport d'une analyse praxéologique

ALAIN BRONNER[1]

Abstract. This paper presents the research of conditions for introducing "algebra prior to letter". In this perspective we study the potential of certain categories of generalized situations. How can they promote algebraic thinking in elementary and junior high school classes before the introduction of algebraic symbolism? In this article we show the advantage of introducing a praxeological analysis to these situations by analyzing a situation of generalization in a 6th grade class in Quebec (12-year-old students).

Résumé. Le travail présenté s'inscrit dans la recherche de conditions d'une entrée de « l'algèbre avant la lettre ». Dans cette perspective nous étudions les potentialités de certaines classes de situations de généralisation. Comment peuvent-elles favoriser une pensée algébrique dans les classes du primaire et du début du secondaire avant toute introduction du symbolisme algébrique ? Dans cet article nous montrons l'intérêt d'introduire une analyse praxéologique pour ce type de situations en analysant une situation de généralisation dans une classe de 6e du Québec (élèves de 12 ans).

1. Introduction

La recherche présentée ici s'inscrit dans le développement d'un Observatoire international de la pensée algébrique (OIPA) dont la mission principale est de favoriser la mise en réseau des chercheurs sur le thème de l'entrée dans l'algèbre. Ce projet vient dans la continuité de plusieurs actions conjointes, initialisées lors des rencontres entre les universités de Montpellier et de de Sherbrooke en 2008 et 2010 et a été initié par les professeurs Hassane Squalli et Alain Bronner. L'expression *pensée algébrique* désigne, tout d'abord, un courant de recherche et de formation concernant l'entrée dans l'algèbre avant l'apprentissage de l'algèbre formelle dans les curricula. Ce courant a été développé et se poursuit surtout dans les recherches anglo-saxones (Bednarz et al, 1992 et 1996 ; Kieran, 1992, 1994 ; Radford, 2014 et 2015). Mais cette expression désigne aussi une manière d'aborder les problèmes avec une procédure analytique, sans mobiliser nécessairement les outils formels de l'algèbre. Nous la précisons plus loin dans cette introduction. Un des défis de notre recherche est d'étudier les articulations possibles entre les travaux sur la pensée algébrique et ceux de l'approche anthropologique du didactique.

L'entrée dans l'algèbre se résume souvent à un *coup de force* du professeur à partir de problèmes dont il suggèrera aux élèves à un moment plus ou moins opportun qu'il est utile voire nécessaire d'utiliser une « lettre » pour pouvoir traiter ou démontrer une propriété numérique dans toute sa généralité ou pour chercher un nombre inconnu satisfaisant un système de contraintes numériques. Ce coup de force où la formule ou l'équation avec une lettre « *x* » jaillissent alors dans la classe pourrait nous faire oublier la longue marche vers le symbolisme

[1] LIRDEF, Université de Montpellier, France – alain.bronner@umontpellier.fr

El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza
Eje 2. *El análisis praxeológico como herramienta de análisis e ingeniería didáctica*

algébrique introduit, notamment par François Viète, puis prolongé par René Descartes, pour développer sa nouvelle algèbre en vue de résoudre des problèmes de géométrie. Mais c'est aussi oublier que la pensée algébrique peut se voir à l'œuvre chez de nombreux mathématiciens (comme Al-Khwarizmi, s'il y en avait un à citer) avant eux et avant la disponibilité de ces outils extra-numériques. Sans vouloir la rejouer, cette scène historique originale nous amène à l'hypothèse que nous pouvons faire entrer les élèves dans une nouvelle pensée algébrique avant « la lettre » les préparant ainsi au calcul littéral et à l'algèbre outil dès la fin de l'école élémentaire et au début du collège en France. Ce travail s'inscrit en fait dans une articulation numérique-algébrique où le passage du numérique vers l'algébrique est posé depuis fort longtemps comme en témoignent les travaux de Lesley Booth (1984), Gérard Vergnaud (1987), Yves Chevallard (1989 et 1990), Carolyn Kieran (1990), Grugeon (1995) et Bronner (1997 et 2007). Mais elle reste encore une question d'enseignement et de recherche qui a été étudiée au Québec (Marchand & Bednarz, 1999 ; Squalli, Mary & Marchand, 2011 ; Squalli, Suurtamm & Freiman, 2012). En France, plusieurs travaux de recherche s'intéressent aussi aux difficultés de la construction de la pensée algébrique comme le soulignent le rapport sur le calcul (CREM, 2001) de la commission Kahane[2] et le numéro spécial « Enseignement de l'algèbre élémentaire » de la revue Recherches en Didactique des Mathématiques (Coulange, Drouhard, Dorier & Robert, 2012).

En s'inspirant d'une série de travaux, Luis Radford (2014, 2015) caractérise la pensée algébrique élémentaire à l'aide de trois éléments :

(1) indéterminés : la situation mathématique considérée contient de nombres non-connus (inconnues, variables, paramètres, etc.) ; c'est-à-dire, elle contient des indéterminés.

(2) dénotation : les nombres indéterminés impliqués dans la situation doivent être nommés ou signifiés d'une certaine manière. La signification peut être accomplie de diverses manières. On peut utiliser des signes alphanumériques, mais pas nécessairement. La dénotation de nombres indéterminés peut également être signifiée par le langage naturel, les gestes, les signes non conventionnels (diagrammes, par exemple), ou même une combinaison de ceux-ci.

(3) analyticité : les nombres indéterminés sont traités comme s'ils étaient des nombres connus. C'est-à-dire, bien qu'ils ne soient pas connus, les nombres indéterminés sont traités de la même manière que les nombres connus : on les additionne, les soustrait, les multiplie, les divise, etc.

H. Squalli (2015) met aussi en avant deux composantes de la pensée algébrique : la tendance à généraliser et la tendance à raisonner de manière analytique. Pour lui, le développement de la pensée algébrique peut se faire sans l'utilisation du langage littéral de l'algèbre et peut commencer dès l'école primaire au Québec (élèves de 6 à 13 ans). Il ajoute que la pensée algébrique est une manière de penser et d'agir dans certains types d'activités :

> Sur le plan opératoire, la pensée algébrique se déploie au moyen d'un ensemble de raisonnements particuliers et de manières d'approcher des concepts en jeu dans les activités algébriques (par exemple, une tendance à voir l'égalité comme une relation d'équivalence, une tendance à laisser

[2] La Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM) a été présidée par Jean-Pierre Kahane. On pourra voir quelques éléments sur la génèse de cette commission : http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/2000/84/smf_gazette_84_63-68.pdf et http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/etudes/crem/.

> les opérations en suspens ; une tendance à symboliser et à opérer sur des symboles ; une tendance à avoir une vision structurale (voir par exemple une expression numérique comme un objet en soi et non uniquement comme une chaîne de calcul). (Squalli, 2015, pp. 2-3)

Une première articulation apparaît ainsi, pour moi, entre le courant de la pensée algébrique et les travaux sur l'algèbre en *théorie anthropologique du didactique*, elle se place au niveau des dimensions *technique* et *technologie* des praxéologies développées ou mobilisées. Les chercheurs de la pensée algébrique semblent se situer directement sur des schémas de résolution sans que les types de tâches associés ne soient explicités ou mis en relation de manière systématique. Ces procédures et connaissances apparaissent comme adaptables, peut-être, à des genres de tâches. En dehors de l'intérêt de constituer une communauté de recherche, nos échanges permettent, dans un sens, d'apporter des connaissances sur les dimensions *technique* et *technologique*, comme déjà indiquées, et, en partant de nos approches, de montrer la pertinence d'une analyse à partir des modèles qu'offre la *théorie anthropologique du didactique* en s'appuyant sur la notion de praxéologie. Il s'agit alors d'étudier les types de tâches favorisant l'entrée dans l'algèbre et de développer des praxéologies, compatibles avec les caractéristiques d'une résolution analytique mise en avant dans la pensée algébrique.

Dans la perspective de développement de la pensée algébrique avant la lettre, de nombreux chercheurs et enseignants se sont tournés vers les problèmes dits de généralisation. Comme on l'a vu, pour Squalli (2000 et 2015) cette activité est caractéristique d'une pensée algébrique. Ces recherches conduisent à des expérimentations de situations de généralisation s'appuyant sur divers supports et problèmes. Au Québec, depuis plusieurs années les programmes d'enseignement vont même dans ce sens comme l'indiquent Patricia Marchand et Nadine Bednarz (1999, p. 31) : « Ce programme, tout au moins dans ses intentions, cherche à faire en sorte que les élèves voient la pertinence de l'algèbre, accordent un sens au symbolisme algébrique, avant de s'engager plus à fond dans sa manipulation. » Ce programme s'inscrirait ainsi dans la perspective de faire apparaître le symbolisme comme un moyen d'exprimer la généralité.

En France aussi des chercheurs ont souligné l'intérêt pour des problèmes de généralisation comme Brigitte Grugeon (2000) dans sa caractérisation de la compétence algébrique »

> La compétence algébrique s'évalue aussi à travers la capacité à exprimer des relations numériques générales. En effet, l'algèbre est un outil essentiel pour rendre l'accès possible aux propriétés numériques et pour les généraliser […] De façon générale, le langage algébrique permet de formuler des problèmes dans leur généralité puis de les résoudre de façon systématique. L'algèbre peut jouer un rôle essentiel pour engager les élèves dans leur construction de la rationalité mathématique. (pp. 11-12)

Ainsi depuis plusieurs années des recherches en France (on peut citer Combier, Guillaume & Pressiat, 1996) ont aussi fait des propositions de situations pour éviter ce coup de force concernant l'entrée dans l'algèbre, dans des classes d'un niveau scolaire proche (6^{e} - 5^{e} en France).

Mon travail s'inscrit dans ces perspectives de recherche et cherche à étudier les potentialités de certaines classes de problèmes et situations de généralisation. Cette recherche s'intéresse à déterminer les conditions d'une entrée de « l'algèbre avant la lettre » par les problèmes de généralisations. Quels sont les contextes, supports, cadres, formulations de ces problèmes à privilégier ? Comment peuvent-ils favoriser une pensée algébrique et l'émergence de généralisation dans les classes du primaire et du début du secondaire avant toute introduction du symbolisme algébrique ? Ces situations permettraient-elles d'introduire le formalisme à un moment adéquat et de rentrer dans une pensée analytique pour manipuler ces formalismes ?

Je propose ici un travail exploratoire relativement aux questions précédentes dans le cadre de nos collaborations au sein de l'OIPA avec des chercheurs du Québec. Il a consisté à analyser avec diverses approches une situation de généralisation dans une classe[3] de 6e du Québec. Dans cet article nous présentons notre méthodologie, nos analyses et résultats pour cette situation en montrant l'intérêt d'introduire une analyse praxéologique pour ce type de situations.

2. Méthodologie

Notre cadre théorique est constitué de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1992 et 1999) et de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) pour l'étude générale des situations. La prise en compte des processus langagiers et sémiotiques étant essentielle dans notre approche, elle est complétée par la théorie des registres de représentations sémiotiques (Duval, 1993).

Notre méthodologie s'inscrit dans la confrontation entre une analyse a priori et une analyse a posteriori et est articulée en trois grandes étapes (Bronner, 2006) : l'analyse a priori des tâches et procédures des élèves, la trame de la séance observée et la description et l'analyse des organisations mathématiques selon l'approche anthropologique.

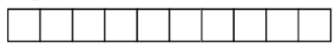
3. Analyse a priori

Le professeur a choisi de commencer sa séquence par une première situation basée sur des chaînes carrées (figure 1) en demandant d'examiner tout d'abord les premiers cas pour un, deux, trois, cinq et pour neuf mailles. Puis, il propose aux élèves d'étudier le cas de chaînes triangulaires. Ensuite les élèves inventeront des formes, en fait pentagonales et hexagonales. Enfin le professeur demande aux élèves de généraliser le travail à n'importe quelle forme de mailles.

Les chaines du joaillier

Mise en situation

Laurent, un bijoutier, fabrique des chaines en or à mailles de forme carrée comme celle-ci :



Il fait des chaines de différentes longueurs pour diverses utilisations (au cou, au pied, comme boucles d'oreilles).

L'or coûte cher. Quand il fait une commande, il compte les tiges une par une pour être sûr de ne pas en commander de trop ni en oublier. Mais c'est long. Il voudrait pouvoir trouver le nombre de tiges dont il a besoin sans être obligé de compter les tiges une par une. Vous devez envoyer un message au bijoutier dans lequel vous allez lui expliquer comment il pourrait faire pour trouver combien de tiges il a besoin selon le nombre de mailles.

Figure 1. Première situation « la maille carrée ».

[3] La classe de 6e au Québec est le dernier niveau de l'école primaire avec un décalage d'un an de plus par rapport à la France, les élèves ayant en moyenne 12 ans.

Nous utilisons ici la modélisation de l'activité mathématique développée par Yves Chevallard (1999) avec la notion de praxéologie constituée de quatre dimensions articulées (type de tâches, technique, technologie, théorie) pour analyser les démarches possibles.

La situation concerne le type de tâches : « Calculer le nombre de constituants élémentaires (tiges) d'une chaîne à mailles carrées (c) connaissant le nombre de mailles ». Certains élèves peuvent ne pas comprendre qu'il s'agit de déterminer une expression ou une méthode permettant de calculer le nombre de tiges pour n'importe quel nombre de mailles ou être bloqués pour le faire et se limiter à donner des quantités de tiges pour quelques nombres déterminés de mailles, pour les premiers cas deux, trois, quatre ou cinq par exemple.

Les types de tâches appellent des techniques de résolution (des manières de faire pour résoudre les tâches particulières) dont nous dégageons les grandes catégories à ce niveau d'étude.

3.1. Les techniques σ1 basées sur des technologies numériques

On peut dégager une première catégorie de techniques σ1 associées à ce type de tâches dans le cas d'un petit nombre déterminé de mailles, dont on peut donner la mise en œuvre générique suivante, de manière plus ou moins complète et dans un ordre divers :

• Identifier les composants élémentaires : triangle, quadrilatère, pentagone, etc. ;

• Prendre en compte le caractère régulier en dimension 2 : des polygones réguliers ;

• Voir qu'ils sont superposables ;

• Commencer à en assembler un, deux, puis trois ensuite, etc. ;

• S'assurer d'avoir un début, une fin, le nombre de mailles qu'il faut ;

• Dénombrer les tiges : le dénombrement peut de se faire de manière désorganisée ou en suivant une réorganisation spatiale, et dans ce dernier cas plusieurs procédures sont à envisager :

– Par exemple, on peut d'abord compter toutes les tiges horizontales (soit deux par deux, soit toutes celles du haut puis celles du bas, etc.) puis les tiges verticales.

– Un élève peut aussi voir la répétition des composants et identifier le nombre de tiges ajoutées par composants (trois dans le cas de mailles carrées) puis multiplier ce nombre par le nombre de mailles en n'oubliant pas d'ajouter un pour la première maille.

– Une autre procédure est de compter selon un principe de récurrence : on peut compter tout d'abord les tiges de la première maille (4), puis on compte les tiges de la maille suivante soit en énumérant soit en ajoutant 3 d'un coup (7), et ainsi de suite (10).

Dans la suite nous nous intéressons aux raisonnements des élèves ayant compris le type de problèmes et entrant dans la tâche de généralisation : « Trouver une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaîne à mailles carrées pour n'importe quelle longueur de la chaîne ». Les stratégies des élèves par rapport à la généralisation peuvent se répartir en trois grandes catégories de raisonnements.

3.2. Les techniques σ2 basées sur des technologies de généralisation explicite

Ces techniques commencent en général par la mise en œuvre de techniques σ1 en examinant le cas d'un petit nombre de mailles un, deux, trois et éventuellement un nombre un peu plus grand. Une première étape consiste ainsi tout d'abord à examiner les premiers cas de nombre de mailles $n = 2, 3, 4, \ldots$ puis à comprendre que la manière de dénombrer peut se généraliser en considérant un nombre de mailles quelconque, même si on ne connaît pas ce nombre de mailles ou si on ne sait pas vraiment exprimer ce nombre indéterminé. Ici la généralisation porte sur une procédure de dénombrement mettant en relation la quantité cherchée avec la variable du problème, autrement-dit le nombre de mailles, en se basant comme dans le cas déterminé sur une réorganisation spatiale.

Par exemple, l'élève se base sur une décomposition du motif en distinguant les tiges horizontales et verticales. Ainsi, quand on a une quantité de mailles on prend 2 fois plus de tiges horizontales et on ajoute encore la même quantité de tiges que de mailles et encore une tige pour terminer le motif avec les tiges verticales. Cela conduit à des expressions, de registres divers, conformes à M1 = $2n + (n + 1)$. Mais, un élève de sixième année ne produira certainement pas une telle expression dans le registre (Duval, 1993) du langage algébrique. Par contre diverses expérimentations et travaux dans ce domaine suggèrent d'autres réponses dans un langage mixte qui associe langage mathématique et langage naturel. Les élèves peuvent ainsi produire des réponses comme : pour une quantité de mailles le nombre de tiges est 3 × mailles + 1. On peut s'attendre à une dénomination dans le registre verbal (comme « le nombre de tiges est 2 fois le nombre de mailles plus le nombre de mailles plus un ») ou un code mixte verbal-numérique (comme « Nombre de tiges = 2 × Nombre de mailles + Nombre de mailles + 1 ») ou encore avec des abréviations.

Une autre forme de présentation peut être attendue en exposant une méthode générale sur l'exemple générique au sens de Balacheff (1987). Par exemple, pour 143 mailles, il faut 3 fois 143 tiges et une tige de plus ce qui fait en tout : 430 tiges. Même si l'élève fait montre d'une conception procédurale (Sfard, 1991 ; Kieran, 1992) dans laquelle l'expression décrit un processus de calcul sur un cas déterminé, il est ici pour nous dans une procédure généralisatrice.

D'autres techniques σ2 sont à envisager en utilisant des décompositions spatiales différentes pour produire des ostensifs équivalents à M1. Par exemple, l'élève peut remarquer que si on a une quantité de mailles, on prend trois fois plus de tiges et on en ajoute une pour obtenir le dénombrement et proposer ainsi une expression M2 = $3n + 1$. En synthèse, pour n mailles, plusieurs modélisations sont possibles, produites par un dénombrement conforme à une configuration spatiale :

– M1 = $2n + (n + 1)$ en considérant le nombre de tiges horizontales d'une part et celui des tiges verticales d'autre part ;
– M2 = $3n + 1$ en considérant le nombre de mailles avec 3 tiges et en ajoutant une tige pour commencer ou terminer la chaîne ;
– M3 = $4n – (n – 1)$ en considérant le nombre de mailles à 4 tiges et en retranchant les tiges mises en double ;
– M4 = $4 + 3(n – 1)$ en considérant une première maille à 4 tiges et les tiges correspondant aux mailles suivantes à 3 tiges.

Les modélisations précédentes portent en elles-mêmes le principe de certaines procédures possibles par une méthode de dénombrement correspondant à une analyse de configurations spatiales. Ces techniques σ2 portent en elles-mêmes la validation, autrement dit une validation interne, basée sur l'analyse de la configuration spatiale. Une validation partielle sous forme de vérification avec les premiers cas est possible et peut paraître suffisante aux yeux des élèves.

La théorie algébrique élémentaire (qui n'est pas toujours à la portée des élèves) permet de démontrer que ces diverses expressions algébriques représentent un même nombre que dénote (Drouhard, 1992) l'expression simplifiée $3n + 1$.

3.3. Les techniques σ3 basées sur des technologies de généralisation implicite

Ici c'est la méthode générale pour passer d'une quantité de mailles à la suivante qui est mise en avant. Elle est associée aussi à un principe de récurrence que nous avons vu avec les techniques numériques. Par exemple, les élèves peuvent faire des dessins pour une maille, deux mailles, jusqu'à cinq ou six mailles et compter les tiges sur les dessins. La généralisation pourrait se traduire de cette façon : quand on ajoute une maille, on ajoute une tige en largeur et deux tiges en longueur, on ajoute donc trois tiges. L'invariant se focalise sur le passage de la quantité de mailles à celle augmentée d'une unité (de mailles). Elle pourrait se traduire par un opérateur du type : Pour trouver le nombre de tiges pour $n + 1$ mailles, j'ajoute trois au nombre de tiges pour n mailles. Ici aussi un langage mixte devrait être utilisé dans ce type de procédure. Cette généralisation demande de calculer au fur et à mesure les quantités obtenues à partir du premier cas et se trouve rapidement limitée pour un nombre de mailles assez grand. On notera quand même qu'un invariant est avancé mais n'est pas opératoire. Ici aussi le recours spontané à l'usage d'une lettre parait peu probable, mais cela dépendra de la mémoire didactique de la classe.

3.4. Les techniques σ4 basées sur des technologies de généralisation par investigation et induction

Les élèves déterminent les quantités de tiges des premiers cas en faisant plusieurs dessins pour une maille, deux mailles, jusqu'à cinq ou six mailles ou un dessin qu'ils complètent au fur et à mesure. Ils observent les quantités obtenues et conjecturent une relation générale par induction. Par exemple, ils obtiennent des résultats comme dans le tableau 1.

Mailles	1	2	3	4	5	6	7	8
Tiges	4	7	10	13	16	19	22	25

Tableau 1. Calculs des premiers cas organisés en tableau.

L'élève généralise les résultats sur les petits nombres en faisant apparaître une relation numérique liée au nombre de mailles de départ. Ils peuvent ainsi remarquer la récurrence indiquée précédemment $T(n + 1) = T(n) + 3$ mais cette fois-ci en observant les quantités numériques et en faisant une induction numérique et non sur la configuration spatiale comme dans la catégorie précédente.

Ils peuvent aussi remarquer que les résultats obtenus pour la deuxième ligne sont des multiples de trois augmentés d'une unité. Cela peut conduire à des expressions conforme à $M2 = 3n + 1$ mais encore une fois cette conjecture est obtenue par observation et induction des expressions numériques. Il sera sûrement plus difficile d'induire des expressions conformes à $M1 = 2n + (n + 1)$ ou $M3 = 4n – (n – 1)$ ou encore $M4 = 4 + 3(n – 1)$.

3.5. Extension du type de problème et analyse des variables didactiques

Même si on peut aussi penser que l'histoire dans laquelle est inséré le problème peut être un facteur intéressant, son influence est difficile à apprécier et demanderait une étude à elle seule. Nous ne regardons pas des macro variables comme le contexte, ici le choix d'un dénombrement d’objets relativement familiers (les bijoux) présentés sous forme schématiques de dessins. Nous nous intéressons aux variables didactiques principales dans le cadre du contexte choisi.

• La variable « nombre de mailles » : L’examen des cas particuliers et le nombre N de mailles à étudier au début peuvent jouer un rôle sur les procédures des élèves. Ainsi on peut distinguer plusieurs domaines relativement à cette variable pour une forme donnée :

– N non fixé : l’élève examine les premiers cas de sa propre initiative et rentre dans les catégories suivantes ou essaie de généraliser directement.

– N petit (< 10 en général) : une procédure de dénombrement systématique peut être envisagée. Ensuite là aussi les différentes catégories peuvent être envisagées.

– N grand (43 ou 44) : ici la procédure précédente doit être abandonnée mais les élèves peuvent peut-être mimer les procédures de dénombrement direct et aller vers les procédures de généralisation explicite.

– N très grand (200, 1000, …) : l’élève doit déjà se projeter vers la généralité pour pouvoir répondre à la question et entrer dans l’une des procédures proposées.

• La variable « Forme de la maille » : comme indiqué plus haut, le problème proposé sera étendu à d’autres formes, une variable didactique importante sera donc la forme F de la maille de la chaîne ; triangulaire, carrée, pentagonale, etc. Cette variable conduit évidemment à des expressions différentes en lien avec le nombre de tiges de la maille mais peut jouer un rôle sur le raisonnement même d’analyse et de dénombrement d’une formule générale pour un type donné.

Deux grands types de raisonnements peuvent être anticipés. Les élèves recommencent sur chaque forme la procédure sur les premières formes de manière quasi-indépendante même si on peut penser que l’expérience et la familiarisation avec le type de problèmes conduisent à faire évoluer le raisonnement. Ou alors ils peuvent induire une formule ou une expression en la modifiant en prenant en compte les variations sur la forme. Par exemple, pour le facteur trois qui apparaît pour la forme carrée les élèves pourraient induire qu’ils doivent maintenant considérer un facteur quatre pour des formes pentagonales. Les élèves pourraient se convaincre en testant avec un cas au sens de l’exemple crucial de Balacheff (1987). Il se pose ainsi un problème de validation à étudier dans les réalisations didactiques.

4. La trame de la séance observée

Il s’agit ici d’identifier des traces relativement objectives de ce qui est observé de la séance. La trame est construite à partir de toutes les données, notamment pour nous, une vidéo et une narration de la séance (sous forme d’un document écrit). Ainsi dans le tableau 2 situé en annexe chaque phase est indiquée par le repérage des instants relativement aux deux données précédentes (sous la forme Instant de la narration/Instant de la vidéo), sa fonction a priori et les tâches repérées des élèves ainsi que la modalité de travail (individuel, en groupe ou collective). Les deux données utilisées n’ont pas été synchronisées, d’autant que nous ne disposons pas de la vidéo complète sur toute la séance. Nous utilisons comme repérage temporel principal les instants de la narration qui semblent plus conforme au déroulement effectif de la séance. Ainsi la séance comporte deux parties avant et après la récréation, et le minutage de la séance est réinitialisé à partir de la phase 8 correspondant à la reprise après la récréation. Le détail de la trame est fourni dans le tableau 2 en annexe.

Nous nous intéressons maintenant aux mathématiques développées dans cette séance à travers la troisième étape de notre méthodologie.

5. La description et l'analyse des praxéologies mathématiques

Nous utilisons ici encore la modélisation de l'activité mathématique par la notion de praxéologie constituée de quatre dimensions articulées (type de tâches, technique, technologie, théorie) et la grille d'organisations mathématiques que nous avons mise en évidence dans l'analyse a priori (section 3).

5.1. Les tâches et types de tâches proposés dans la séance

Nous allons montrer que plusieurs types de tâches sont enchâssés dans cette séance et que ce choix est important pour le développement des processus de généralisation.

Les élèves sont confrontés dans les trois premières phases à un premier type de tâches ponctuel, puis à une première tâche de généralisation. Ainsi ils doivent tout d'abord dans les phases 1 et 2 travailler sur le type de tâches :

> Tcn : Calculer le nombre de constituants élémentaires (Tiges) d'une chaîne à mailles carrées (c) connaissant le nombre de mailles.

Pour ce type, le professeur propose aux élèves différents spécimens en jouant sur la variable N du nombre de mailles de la chaîne :

– calcul pour 1, 2, 3, 5 mailles (phase 1) ;
– calcul pour 9 mailles (phase 2) ;
– calcul pour 45 puis 44 mailles (phase 3).

La fin de la phase 2 et la phase 3 se concentrent sur la tâche de généralisation évoquée dans l'analyse a priori

> tca : Trouver une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaîne à mailles carrées pour n'importe quelle longueur de la chaîne.

Précisons nos notations : la 1re lettre est T pour Type ou t pour tâche, la 2^{e} lettre désigne la forme, ici c pour carrée, la 3^{e} lettre est, soit n pour numérique, soit a pour algébrique (nous poursuivons dans la suite la même logique de notation).

Les phases 4 et 5 amènent à jouer sur la variable forme et le professeur propose maintenant des tâches analogues avec le cas d'une chaîne à mailles triangulaires. Les élèves étudient ainsi le type de tâches :

> Ttn : Calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaîne à mailles triangulaires connaissant le nombre de mailles.

Les différents cas suivants sont proposés pour la variable *N* nombre de mailles :

– calcul pour 1, 2, 3, 4, 5 mailles (phase 4) ;
– calcul pour 44 mailles (phase 5).

Puis les élèves travaillent sur la tâche de généralisation.

> tta : Trouver une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaîne à mailles triangulaires pour n'importe quelle longueur de la chaîne.

Le scénario se poursuit de manière analogue avec le cas d'une maille hexagonale dans les phases 6 et 7, faisant rencontrer le type de tâches Thn à travers le calcul pour 44 mailles (phase 6) :

> Th44 : Calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaîne à mailles hexagonales connaissant le nombre de mailles : 44.

Puis la tâche de généralisation (phase 7) :

> tha : Trouver une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaîne à mailles hexagonales pour n'importe quelle longueur de la chaîne.

Dans les phases 8 et 9 le professeur demande aux élèves de choisir leurs propres formes de mailles avec la contrainte suivante : la forme doit être différente des précédentes. En plus de la consigne « trouver une phrase mathématique pour calculer le nombre de tiges pour une chaîne de 44 mailles » (document Narration), il précise aussi à la suite d'une question d'un élève à propos de la longueur des tiges :

> « Les tiges doivent être toutes égales et les mailles, elles sont toutes de la même forme. C'est pourquoi je te demande de dessiner une maille et toutes tes mailles vont être identiques. Et elles vont s'attacher par un côté. 4 minutes. »

Cela amène les élèves, selon les groupes, à deux tâches de généralisation de même type :

> toa : Trouver une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaîne à mailles octogonales pour n'importe quelle longueur de la chaîne ;
>
> tpa : Trouver une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaîne à mailles pentagonales pour n'importe quelle longueur de la chaîne.

Le professeur demande ensuite de trouver une phrase mathématique à envoyer au bijoutier qui permettra de calculer le nombre de tiges pour n'importe quelle chaîne. Les différentes tâches tca, tta, tha, toa et tpa vont en fait alimenter le travail des phases 10 et 11, qui les font alors apparaître comme des spécimens d'un nouveau type de tâches :

> Ta : Trouver une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaîne à mailles pour n'importe quelle forme et pour n'importe quelle longueur de la chaîne.

La succession des tâches et types de tâches fait apparaître la structure d'enseignement de cette séance comme un réseau de tâches enchâssées en parallèle et en série, pourrait-on dire. Ainsi, après avoir fait travailler les élèves, dans chaque cas de forme de mailles, sur un type de tâches ponctuelles du type Tcn, Ttn et Thn à travers différents spécimens le professeur les amène à se placer sur les tâches respectives de généralisation tca, tta et tha. Même si la réalisation des différentes tâches est proposée successivement, nous analysons le début de la structure comme parallèle dans la mesure où il y a une répétition en jouant sur la forme de la maille (carrée, triangulaire et hexagonale) avec la même structuration (étude sur les premiers termes au niveau du nombre de mailles 1, 2, 3 et 5, puis 44 et 45, puis cas général). Ce premier réseau parallèle peut être schématisé comme dans la figure 2 :

•Tcn → tca
•Ttn → tta
•Thn → tha

Figure 2. Réseau parallèle des premières tâches dans les sept premières phases.

Nous observons que l’étude commence par des types de tâches Tfn (“f” comme forme et “n” comme numérique) que nous qualifions de numérique dans la mesure où il s’agit tout d’abord de considérer un nombre déterminé de mailles et de produire la quantité de tiges correspondante. Mais à chaque fois, le contrat conduit, pour chaque forme f, à terminer l’étude avec une tâche de généralisation tfa (“a” ici comme algébrique).

La structure parallèle aurait pu se poursuivre strictement sur les phases suivantes 8 et 9, avec un choix de la forme a priori réservé aux élèves, mais pour la suite l’étude se réalise directement sur les tâches de généralisation toa et tpa à propos des formes octogonale (o) et pentagonale (p) comme le précise le professeur à un élève : « il doit faire une phrase mathématique plus générale, pas seulement pour le cas de 44 mailles » (Document Narration, instant 0:09:55 après la récréation). Le nouveau réseau peut être schématisé comme dans la figure 3 avec cet ajout en parallèle sur les tâches de généralisation laissant en vide les types de tâches numériques :

N → A   **A**

•Tcn → tca
•Ttn → tta   } →
•Thn → tha

… → toa
… → tpa

Figure 3. Poursuite du réseau de tâches en parallèle (phases 8 et 9).

Les phases 10 et 11 font alors apparaître les différentes tâches précédentes tca, tta, tha, toa et tpa comme de simples spécimens d’un nouveau type de tâches de généralisation Ta avec la recherche d’une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d’une chaîne à mailles pour n'importe quelle forme et pour n’importe quelle longueur de la chaîne. Le réseau se complexifie alors en série en le schéma de la figure 4 :

N → A   **A**   **→**   **A**

Généralisation du 1er degré (1 variable)   **Généralisation du 2e degré (2 variables)**

•Tcn → tca
•Ttn → tta
•Thn → tha

… → toa   } →   **Ta**
… → tpa

Figure 4. Poursuite du réseau de tâches en série (phases 10 et 11).

Il engage les élèves dans un processus de généralisation de degré encore supérieur en considérant les deux variables « forme de la maille » (F) et « nombre de mailles » (*N*). Cette première analyse montre que les praxéologies ponctuelles s’agrègent en des praxéologies locales, voire régionales, emboîtées autour du type de tâches Ta et permet de mettre au jour une structuration mathématique complexe et emboîtée. Nous poursuivons la caractérisation de l’organisation mathématique construite en analysant les techniques et technologies associées aux différents types de tâches identifiés.

5.2. Les praxéologies mathématiques produites par les élèves

Les tâches isolées et les types de tâches sont réalisés par des techniques de résolution souvent, au début, embryonnaires ou en voie de constitution dans le processus d'enseignement-apprentissage. Nous décrivons les éléments principaux des techniques élaborées par les élèves et repérables dans les données de la séquence « bijoutier ».

– Techniques associées aux types de tâches numériques Tcn, Ttn et Thn

Dans le cas des calculs sur un petit nombre de mailles carrées (un à cinq, puis neuf parfois) en début de séquence, les élèves utilisent certainement des techniques conformes à σ1 basées sur des technologies numériques comme nous l'avions indiqué dans l'analyse a priori (section 3). Le professeur ne demande pas la procédure des élèves et la classe se met rapidement d'accord sur le nombre de tiges pour un, deux et trois, puis cinq :

> « Il compte avec les élèves, les tiges qui composent une maille, deux mailles et trois mailles. Puis il ajoute deux mailles de plus (cinq mailles) sans les afficher sur l'écran. […] Il demande à une élève le nombre de tiges obtenues. Elle dit 16 et il vérifie que tous sont d'accord. »

Visiblement on n'est pas dans une tâche problématique, comme on peut encore le voir avec la construction d'une chaîne de neuf mailles :

> « Il suit en particulier l'équipe 4 : ils en comptent 22. Il leur demande de vérifier. Ils recomptent et obtiennent 28. Il fait le tour des équipes, revient ensuite en grand groupe et demande si quelqu'un a autre chose que 28. Aucun. Il leur fait constater que c'est facile si l'on peut les compter. » (Document Narration)

Dans le cas d'un calcul pour un grand nombre de mailles carrées (le professeur propose au début 45 mailles), les élèves commencent à expliciter leur technique, comme dans l'équipe 4 :

> « E[4.3] explique que pour deux mailles, il faut faire $2 \times 3 + 1$, pour trois mailles $3 \times 3 + 1$, pour 5 mailles… E[4.4] trouve que c'est compliqué alors que E[4.1] suggère que pour 45 mailles, il faut faire 45×3 et que le terme +1 est pour commencer la chaîne, car la première maille comprend 4 tiges. » (Document Narration)

On est déjà ici sur des techniques σ2 basées sur des technologies de généralisation explicite, la généralité dans la constitution spéciale de la chaîne est perçue et utilisée pour exprimer la réponse dans le cas d'un grand nombre déterminé de mailles.

• L'équipe 3 envisage une autre décomposition : « E[3.1] explique à E[3.3] qu'elle a calculé 1 fois 4, et pour les autres mailles 1 fois 3 et donc … E[3.2] récapitule : $1 \times 4 + 44 \times 3$ » (Document Narration). Puis quelques minutes après que le professeur demande de travailler sur 44 au lieu de 45, l'équipe confirme sa procédure : « E[3.1] dit encore 1 fois 4 est égale à 4, et 43 fois 3… » (Document Narration). On note ici encore comment cette équipe évolue d'une technique de dénombrement de type σ1 basées sur des technologies numériques vers une technique de type σ2 basées sur des technologies de généralisation explicite consistant à voir la configuration comme un carré avec 4 tiges, puis un nombre (ici 43) de composants de 3 tiges.

• L'équipe 6 explicite une procédure pour 45 mailles, qu'on pourrait qualifier de proportionnalité :

> « 3 des élèves s'entendent pour dire au bijoutier de faire 5 fois la commande pour 9 mailles, soit 5×28 tiges. E[1.2] fait remarquer que ce ne sont pas tous les nombres de mailles qui sont multiples de 9. » (Document Narration)

L'erreur ne sera pas relevée lors du travail de groupe.

– Techniques associées aux tâches de généralisation tca, tta, tha, toa et tpa

Le professeur précise à plusieurs moments « qu'il veut un message à dire au bijoutier, pour qu'il sache comment trouver le nombre de tiges, et ce, pour n'importe quelle longueur de chaîne à mailles carrées » ou « il ne veut pas seulement le nombre de tiges, mais aussi le message mathématique pour aider le bijoutier à trouver le nombre de tiges à commander pour d'autres longueurs de chaînes » et encore il rappelle qu'après avoir trouvé la réponse pour 44 mailles, ils doivent écrire un message pour tout nombre de mailles. On note ainsi ce geste du professeur, vraisemblablement, pour faire entrer les élèves dans les tâches de généralisation tca, tta, tha, toa et tpa.

Dans le premier travail de groupes à propos des mailles carrées et d'un nombre, considéré comme déjà grand, 44 ou 45, on a vu que certains élèves avaient compris qu'il fallait décrire la procédure de calcul effective, et non pas se limiter à donner la quantité de tiges nécessaire.

Pour cette tâche, au niveau de l'équipe 4 : « E[4.4] explique qu'il lui dirait qu'à chaque maille il faut trois tiges, mais qu'il faut en ajouter une pour la première. » Cet élève n'arrive pas, du moins au début de la phase 2 de la séance, à produire une technique de généralisation explicite. Il associe bien la correspondance sans pouvoir exprimer globalement la quantité nécessaire. Vers la fin de cette phase, l'élève débouche sur cette généralisation explicite en oralisant « multiplier nombre de mailles par trois plus un pour le premier ». La généralisation explicite, signe d'une pensée algébrique, semble en route dans cette équipe. Finalement il va modifier son message sous la demande du professeur de griffonner ce message sur sa feuille pour produire « × nombre de m. par 3 et + 1 pour 1er » puis, après une remarque du professeur à propos du terme « 1er », l'élève finit par formuler : « trois fois nombre de mailles plus un ». Cette généralisation est passée par l'abstraction d'une configuration générale où le « plus un » avait encore la signification de la 1ère tige. Finalement, dans la phase 3 où un bilan est proposé, cette équipe produit au tableau le message « 3 × nombre maille + 1 = chaîne », qui sera transformé par le professeur en « 3 × nb mailles +1 = nb tiges de la chaîne », qui propose que « nombre dorénavant on va le simplifier : "nb" » (figure 5).

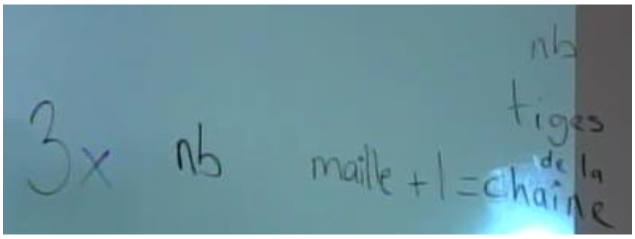


Figure 5. Message de l'équipe 4, abrégé par le professeur.

Dans la phase 2, l'équipe 2 entre aussi dans une généralisation explicite conforme à la modélisation M4 = 4 + 3(n – 1), du moins pour l'élève E[2.4], qui dit à voix haute « 3× nombre de mailles – 1 + 4 ». Il s'ensuit un échange fourni avec le professeur pour amener l'élève à écrire le message en tenant compte des priorités des opérations. Dans le bilan collectif de la phase 3 l'élève E[2.4] de cette équipe ira écrire son message (figure 6) au tableau sous la forme « (nb mailles – 1)×3(+4)= nb de tiges de la chaîne » qui sera corrigée par le professeur.

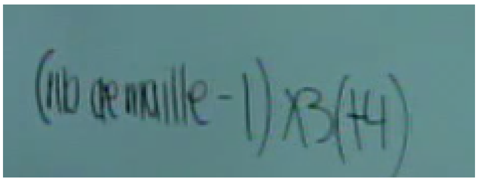


Figure 6. Message de l'équipe 2.

Une élève d'un autre groupe n'arrive pas à comprendre le message et ne semble pas entrer dans cette pensée algébrique. Elle n'arrive pas à décontextualiser l'écriture et reste focalisée sur l'interprétation de l'expression « moins une maille », exprimant son incompréhension pour ce message.

L'équipe 5 semble voir le processus opératoire général mais bute sur l'expression de cette généralité en se demandant « comment exprimer ce (le nombre de mailles) qui est multiplié par 3 ».

Les deux messages précédents, conformes aux modélisations M2 = $3n + 1$ et M4 = $4 + 3(n - 1)$, sont validés par le professeur et la classe par retour aux premiers cas numériques, et constituent alors une référence pour la suite.

Ainsi dans la phase 4, à propos des mailles triangulaires, la dévolution de la tâche de généralisation tta est réussie et les élèves essaient d'élaborer un message général. L'élève E[1.1] explicite l'élaboration de la technique en expliquant qu'elle se base sur l'adéquation numérique avec les premiers cas : « […] si tu fais deux fois le nombre de mailles plus un, car 2 × 2, 4, +1, 5 ». Mais surtout l'idée lui est venue du message de l'équipe 4 à propos des mailles carrées : « L'autre chaîne avait quatre côtés, ils ont enlevé un et ils ont mis trois, alors moi, vu qu'il y a trois côtés, j'ai enlevé un et ça m'a fait deux. » On a ici une démarche par analogie validée numériquement. Le professeur l'invite même à expliciter cette démarche dans la phase 5 de bilan à partir du 1er message pour le calcul des mailles carrées (3 × nb de mailles + 1) : « soustraire 1 au nombre de côtés d'une maille ». Nous reviendrons sur l'attention du professeur à propos de cette élaboration qui conduit au message : « 2 × nb de mailles + 1 = nb de tiges » de même type de modélisation que M2.

Dans ce bilan, nous trouvons aussi une modélisation du type M4 proposée à la classe par l'équipe 3 par l'élève E[3.2] : « (nb mailles – 1) × 2 + 3 = nb de tiges dans la chaîne ». Ce message est validé par le professeur et les élèves par un essai pour les cas 3 et 5.

Les deux premières tâches de généralisation tca et tta (mailles carrées et triangulaires) sellent le scenario et les 3 autres tâches tha, toa et tpa (mailles hexagonales, octogonales et pentagonales) se déroulent de la même manière de la phase 6 à la phase 9 avec des messages du même type que les modélisations M2 et M4 des chaînes à mailles carrées. Par exemple pour l'octogone, des groupes donnent le message « (nb de mailles – 1) × 7 + 8 = nb de tiges », tandis que pour les pentagones des groupes c'est le message « (nb de mailles – 1) × 4 + 5 = nb de tiges » qui est avancé.

– Techniques associées au type de tâches Ta

Comme déjà indiqué, dans les phases 10 et 11 le professeur propose aux élèves de se situer au niveau du type de tâches de généralisation Ta pour lequel les tâches précédentes (tca, tta, tha, toa et tpa) ne sont que des spécimens. Le professeur présente ainsi le travail demandé :

À chaque coup on a trouvé une phrase mathématique qui permettait de trouver le nombre de tiges. Maintenant ce que je veux que vous me trouviez, je veux avoir une phrase mathématique qu'on va pouvoir envoyer au bijoutier et dans cette phrase peu importe la commande du client, c'est-à-dire que le client qu'il décide que sa maille est triangulaire, carrée qu'elle est de forme hexagonale, pentagonale, octogonale, peu importe la forme de sa maille, le bijoutier va pouvoir prendre cette formule là et dire ah là parfait j'aurai besoin de tant de tiges.

Après un travail de groupes de huit minutes environ dans la phase 10, les élèves livrent leurs *phrases mathématiques* demandées par le professeur. On retrouve ici deux types de formules généralisant les formes M2 et M4 vues dans les cas particuliers de formes :

G2 : (nb côtés de la maille – 1) × nb de mailles + 1 = nb de tiges

G4 : (nb de mailles – 1) × (nb côtés – 1) + nb côtés = nb de tiges

Pour la formule G1, une élève explique qu'ils ont observé que, dans la formule « 2 × nb de mailles + 1 = nb de tiges » du cas triangulaire, le « 2 » représente le nombre côtés de la maille moins 1. Le professeur pousse un peu le raisonnement en disant « donc vous avez remplacé votre 2 … d'où il vient ce 2 là … c'est justement le nombre de côté de la maille moins 1 ».

Le professeur poursuit la demande d'explicitation du raisonnement pour la formule G2 en mettant en parallèle au tableau (voir figure 7) la formule pour le pentagone pour bien faire ressortir le rôle joué par les différentes variables et explicite lui-même le raisonnement supposé des élèves : « on part de la formule précise pour ce type de mailles-là et puis on généralise avec une formule qui va nous permettre de trouver ». Et il compare les deux formules en précisant que la deuxième est un peu moins évidente à voir.

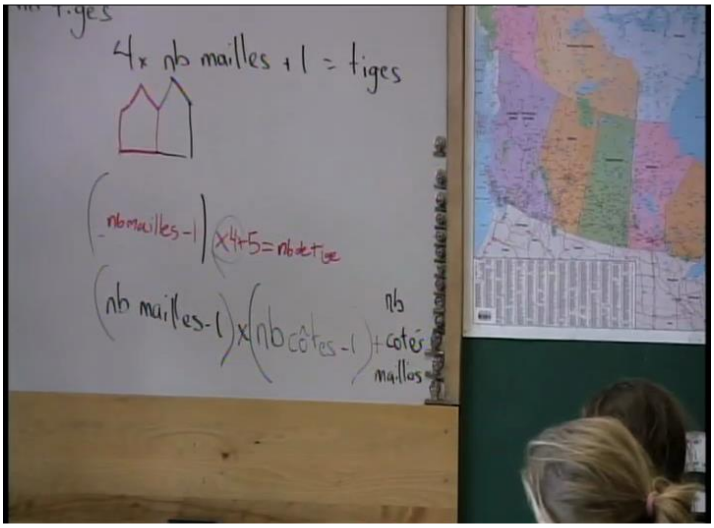


Figure 7. Message G4 pour la tâche de généralisation TA.

– Technologies associées aux différents types de tâches de généralisation

Nous rappelons que nous utilisons le concept de technologie au sens de Chevallard (1999), autrement-dit le discours sur la technique qui permet de la justifier, éclairer, produire.

En dehors des connaissances liées au choix du contexte géométrique constitué essentiellement des polygones et des méthodes élémentaires de dénombrement, les élèves doivent avoir une idée intuitive des notions de suites et d'algorithmes créant un rapport personnel de type *programme de calcul*. Ils doivent aussi maîtriser les connaissances sur le numérique, notamment sur les nombres entiers et les opérations de l'arithmétique avec le vocabulaire et les différents registres sémiotiques permettant de manipuler et traiter les calculs sur ces nombres.

Les notions de variable et de dépendance entre variables peuvent aussi émerger de ce travail sans qu'une formalisation soit possible. Ces situations font ressortir le besoin d'utiliser un langage intermédiaire entre le langage formalisé de l'algèbre et le langage numérique sur les nombres. Ce langage est parfois introduit par le professeur comme « *Nb* » pour désigner une variable numérique.

Les connaissances et outils précédemment indiqués vont fournir des ressources aux élèves pour entrer dans un processus de généralisation, favorisé par la situation.

6. Conclusion sur l'analyse de cette situation de généralisation

Nous soulignons ici l'apport d'une analyse praxéologique qui a permis de mettre au jour la structure complexe de la situation proposée avec la succession des tâches et types de tâches numériques et de généralisation que nous avons qualifiée de réseau de tâches enchâssées en parallèle et en série. Cette structure a permis à une classe et sûrement à de nombreux élèves de cette classe d'entrer dans un processus de généralisation qui est un des aspects spécifiques de la pensée algébrique. Le choix de la structuration mathématique complexe et emboîtée du réseau de tâches et types de tâches est important pour le développement des processus de généralisation. Je fais l'hypothèse qu'il permet ainsi d'engager les élèves dans un processus de généralisation de degré supérieur par la rencontre programmée d'un type de tâche de généralisation à deux variables (forme de la maille et nombre de mailles).

La situation permet une dévolution de ce processus en commençant par un moment de première rencontre ou de reprise avec les types de tâches numériques (Tcn, Ttn et Thn) mobilisant des techniques σ1 basées sur des technologies numériques. Les productions des élèves attestent une articulation numérique-algébrique bien ajustée en jouant sur la variable *nombre de mailles*. À travers le réseau dit en parallèle, se met en place une première rencontre vers les tâches respectives de généralisation tca, tta, tha, toa et tpa. Ainsi le passage de l'étude des premiers cas du nombre de mailles (entre 1 et 9) à celui d'un nombre comme 44 ou 45 force les élèves à faire évoluer leurs procédures vers des techniques de généralisation explicite. Ce saut informationnel (Brousseau, 1998) fait ainsi fonctionner ces valeurs numériques comme des exemples génériques (Balacheff, 1987) et les élèves ne considèrent plus ce spécimen comme un cas déterminé mais comme un représentant d'une variable, montrant ainsi un aspect de la compétence algébrique. La structure de l'étude amène alors des moments d'exploration et d'émergence de techniques du type de tâches de généralisation à deux variables (taille de la chaîne et forme de la maille) Ta, comme on l'a vu, associés à un moment de construction d'éléments du bloc technologique-théorique associé.

Dès les premières tâches, le langage verbal et divers registres sémiotiques sont sollicités pour dire cette généralisation et participent de cette construction de techniques et d'éléments technologiques, l'aspect sémiotique fort de cette situation faisant ainsi apparaître une caractéristique du travail algébrique. Pensée algébrique et praxéologies de généralisation apparaissent comme deux versants d'un enjeu commun vers l'entrée dans l'algèbre.

Références

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation, *Educational Studies in Mathematics*, *18*(2), 147-176.

Bednarz, N. & Dufour-Janvier, B. (1992). L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une caractérisation du scénario actuel et des problèmes qu'il pose aux élèves. *Actes du colloque international du 20 au 22 mai 1992 : didactique des mathématiques, formation normale des enseignants*. École normale supérieure de Marrakech. (pp. 21-40).

Bednarz, N. & Dufour-Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. Dans N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.) *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 115-136). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Booth, L. (1984). Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire. *Petit x, 5,* 5-17.

Bronner, A. (1997). *Étude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carrée*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Bronner, A. (2006). Installation et régulation par l'enseignant de l'espace parole-pensée-actions-relations. Gestes d'étude, Gestes professionnels, événements et ajustements. Dans *Journées d'études IVDA 2005*. Presses Universitaires de Franche-Comté.

Bronner, A. (2007). *La question du numérique : Le numérique en question*, Habilitation à Diriger les Recherches, Université Montpellier 2.

Brousseau, G. (1998). Théorie des situations didactiques. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x, 19* 43-75.

Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Troisième partie. Voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x, 23,* 5-38.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques, 12*(1).

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(2), 221-266.

Combier, G. Guillaume, J.C. & Pressiat, A. (1996). *Les débuts de l'algèbre au collège. Au pied de la lettre !* Paris : INRP

CREM (2001). *Rapport d'étape sur le calcul*.

http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/Rapport%20calcul.pdf

Drouhard, J.-P. (1992). Les écritures symboliques de l'Algèbre élémentaire. Thèse de doctorat, Université Paris 7

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *5,* 37-65.

Grugeon, B. (1995). *Étude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : BEP et Première*. Thèse de doctorat, Université Paris 7.

Grugeon, B. (2000). L'algèbre au lycée et au collège. *Actes des journées de formation de formateurs.* Boisseron, 4-5 juin 1999. IREM : Université de Montpellier 2.

Kieran, C. (1994). A functional approach to the introduction of algebra: some pros and cons. Dans J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.). *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 1 (pp. 157-175).

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. Dans D. A. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York : Macmillan.

Coulange, L., Dorier, J.L., Drouhard J.P. & Robert A. (2012). Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. *Recherches en didactique des mathématiques*, H-S.

Marchand, P. & Bednarz, N. (1999). L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une analyse des problèmes présentés aux élèves. *Bulletin AMQ*, *XXXIX*(4), 30-42.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematics conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1-36.

Squalli, H., Suurtamm C. & Freiman, V. (2012). Preparing Teachers to Develop Algebraic Thinking in Primary and Secondary School. *Préparer les enseignants au développement de la pensée algébrique au primaire et au secondaire*. Canadian Mathematics Education Study Group 2012.

Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre. Dans Laborde, C. (Ed.) *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et d'informatique* (pp. 189-200). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26(2), 257-277.

Radford, L. (2015). La pensée mathématique du point de vue de la théorie de l'objectivation. *Actes du congrès Espace Mathématique Francophone (EMF)*. Alger, octobre 2015.

http://emf2015.usthb.dz/gpdf/EMF2015GT3RADFORD.pdf.

Squalli, H. (2000). *Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base*. Thèse de doctorat, Université Laval.

Squalli, H. (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. *Actes du congrès Espace Mathématique Francophone (EMF)*. Alger, octobre 2015.

http://emf2015.usthb.dz/gpdf/EMF2015GT3SQUALLI.pdf

Squalli, H., Mary, C., & Marchand, P. (2011) Orientations curriculaires dans l'introduction de l'algèbre : cas du Québec et de l'Ontario. Dans J. Lebeaume, A. Hasni, & I. Harlé, *Recherches et expertises pour l'enseignement scientifique. Technologie – Sciences – Mathématiques* (pp. 65-78). Louvain La Neuve, Belgique : De Boeck Supérieur.

Annexe : Trame de la séance

Phases	**Instants Narration/ instants Vidéo**	**(Fonctions de la phase et) tâches du professeur et des élèves**	**Modalités de travail**
1	0 à 16 min 11 / 0 à 2 min 45 (puis	Présentation de la situation générale, de la chaîne à	Collective / Groupe pour le

	coupure de la vidéo)	mailles carrées et calcul du nombre de tiges pour 1, 2, 3, 5 / Calcul pour 9 mailles	cas de 9 mailles (2 min environ)
2	16 min 11 à 40 min 15 / (pas de vidéo)	Calcul du nombre de tiges pour 45, puis 44, mailles et explicitation du programme de calcul général (cas des chaînes à mailles carrées)	Groupe (appelé équipe au Québec)
3	40 min 15 à 49 min 43 / 2 min45 à 10min	Retour sur la chaîne à mailles carrées : Bilan et débat	Collective
4	49 min 43 à 57 min 40 / (pas de vidéo)	Présentation de la chaîne à mailles triangulaires, calcul du nombre de tiges pour 44 mailles et explicitation du programme de calcul général	Collective / Groupe
5	57 min 40 à 1h04 min 42 / 10 min à 14 min 30	Retour sur la chaîne à mailles triangulaires : Bilan des réponses du problème	Collective
6	1h04 min 42 à 1h08 min 59 / (pas de vidéo)	Présentation de la chaîne à mailles hexagonales, calcul du nombre de tiges pour 44 mailles et explicitation du programme de calcul général	Collective / Groupe
7	1h08 min 59 à 1h14 min05 / 14 min 40 à 16 min 40	Retour sur la chaîne à mailles hexagonales : Bilan du travail des élèves	Collective
	Récréation		
8	4 min à 11 min 23 / (pas de vidéo)	Créer sa propre chaîne à mailles, calcul du Nb de tiges pour 44 mailles et explicitation du programme de calcul général	Collective / Groupe
9	11 min 23 à 17 min 04 /16 min 40 à 19 min 55	Retour sur les propres chaînes à mailles octogonales et pentagonales : Bilan du travail des élèves	Collective
10	17 min 04 à 25 min 30 / 19 min 55 à	Rechercher une expression commune dans tous les cas de formes de chaîne	Collective / Groupe

	21 min 04		
11	25 min 30 à 31 min 36 / 21 min 04 à 26 min 07	Retour sur la généralisation : Bilan	Collective

Tableau 2. Trame de la séquence « Bijoutier ».