ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i4p298-310

La notion de fonction : les praxéologies prescrites pour être enseignées lors de l'articulation entre le collège et le lycée à São Paulo

MARLENE ALVES DIAS[1]

SIRLENE NEVES DE ANDRADE[2]

TÂNIA MARIA MENDONÇA CAMPOS[3]

Abstract. This study aims at identifying regularities and differences in the proposals of national and state official teaching in order to help professionals in a reflection on the possible changes. For the analysis of the considered documents, we chose as a central theoretical framework the anthropological theory of didactics –ATD– and as auxiliary theoretical frameworks, the framing notion as defined by Douady and points of view as defined by Rogalski. The analysis in the documents considered shows that there is a gap in approaches in the same school year, which becomes even more evident when one considers the passage from college to high school.

Resumo. Este estudo tem por objetivo identificar as regularidades e diferenças nas proposições de ensino no nível nacional e do estado, para a noção de função, de forma a auxiliar os profissionais na perspectiva de uma reflexão sobre as possíveis mudanças. Para a análise dos documentos considerados, escolhemos como referencial teórico central a teoria antropológica do didático (TAD) e, como referenciais auxiliares, a noção de quadro definida por Douady e pontos de vista apresentados por Rogalski. A análise dos documentos considerados mostra que existe uma lacuna em abordagens dos conteúdos em um mesmo ano escolar, o que se torna ainda mais evidente quando se considera a passagem do ensino fundamental para o ensino médio.

Introduction

Depuis 1997, le ministère de l'éducation du Brésil a préparé des documents qui correspondent aux propositions nationales pour l'‘enseignement dans les différentes régions du Brésil. Ces documents ont été élaborés par des spécialistes de chaque domaine et servent de support aux auteurs des manuels scolaires, ainsi qu'aux secrétariats d'État à l'éducation pour préparer leurs propres projets.

Si les manuels scolaires ont été institués au niveau national, c'est-à-dire analysés et diffusés par le ministère de l'éducation, les secrétariats d'État peuvent concevoir leurs propres matériels. Ainsi, dans l'État de São Paulo, à partir de l'année 2008, le secrétariat de cet État a proposé un curriculum pour lequel des matériels spécifiques ont été élaborés pour chaque discipline.

Ces deux propositions éducatives subsistent aujourd'hui dans les écoles publiques de São Paulo et le secrétariat de l'État de São Paulo préconise qu'elles soient mises en œuvre de façon simultanée. Ce phénomène récent nous a conduits à étudier, pour ce qui est de la notion de

[1] Université Anhanguera, Brésil – maralvesdias@gmail.com
[2] Diretoria Regional Sul et Université Anhanguera, Brésil – sirlene-neves@hotmail.com
[3] Diretoria Regional Sul et Université Anhanguera, Brésil – taniammcampos@hotmail.com

El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza)
Eje 2. *El análisis praxeológico como herramienta de análisis e ingeniería didáctica*

fonction, quelles sont les difficultés que les enseignants peuvent rencontrer en suivant conjointement ces nouvelles propositions éducatives.

Cette étude a débouché sur les questions suivantes : a) comment s'opère l'articulation entre le collège et le lycée en ce qui concerne l'enseignement du concept de fonction d'après certains documents produits par le ministère et le secrétariat à l'éducation de São Paulo, y compris les manuels scolaires approuvés officiellement et les cahiers développés et distribués par le secrétariat de São Paulo ? b) quelle organisation mathématique est prescrite par ces documents ?

Ainsi, notre objectif est d'identifier, dans les propositions respectives de l'enseignement national et de l'État, les régularités et les différences en ce qui concerne la notion de fonction, dans le but de contribuer à une réflexion sur les modifications possibles : en effet il nous semble important de justifier ces modifications et de mettre en évidence les difficultés soulevées par l'articulation des deux injonctions proposées simultanément.

Remarquons tout d'abord que le choix d'étudier la notion mathématique de fonction est dû au fait que le concept de fonction fournit un certain nombre d'approches qui varient selon différents cadres et points de vue. En outre, dans un même cadre, cette notion peut être introduite par le biais de deux points de vue : « relation entre grandeurs » et « relation entre deux ensembles ».

Soulignons également qu'au Brésil, comme dans d'autres pays, l'étude de la notion de fonction a un rôle central dans l'éducation de base, en particulier dans le secondaire (élèves de 15-17 ans), bien qu'elle soit déjà introduite au cours de la dernière année de collège (élèves de 14-15 ans).

À partir des questions ci-dessus, des explications de notre objectif et du choix du concept mathématique à étudier, la problématique de notre recherche se rapporte à l'étude des praxéologies prescrites pour être enseignées au collège et au lycée, anticipant que les attentes institutionnelles du ministère de l'éducation et du secrétariat à l'éducation de São Paulo relèvent de deux approches qui ne sont pas toujours en harmonie.

Pour conduire notre recherche, nous avons choisi comme cadre théorique central la théorie anthropologique du didactique telle qu'on la trouve explicitée dans les articles de Yves Chevallard (1994, 2007) et de Marianna Bosch et Yves Chevallard (1999). Ce cadre est complété par les notions de cadre selon Régine Douady (1984) et de points de vue selon Marc Rogalski (2001).

1. Théorie anthropologique du didactique, cadre et points de vue

1.1. Théorie anthropologique du didactique

En ce qui concerne la théorie anthropologique du didactique, nous avons retenu les notions de praxéologie, d'objets ostensifs et non ostensifs et de niveaux de codétermination, dont nous rappelons brièvement les définitions.

La notion de praxéologie (Bosch et Chevallard 1999) est définie par le quadruplet $[T/\tau/\theta/\Theta]$: les types de tâches (T) nécessitent, pour être exécutées, une façon de faire appelée technique (τ). L'association types de tâches-techniques est un savoir-faire qui ne survit pas seul, mais requiert un environnement technologico-théorique, soit un savoir, constitué d'une technologie (θ), un discours rationnel qui justifie et rend la technique compréhensible, et d'une théorie (Θ) qui justifie et explique la technologie utilisée. Le système composé de types de tâches, techniques, technologie et théorie, [$T/\tau/\theta/\Theta$], est une praxéologie – locale lorsqu'il y a plusieurs types de tâches mais une seule technologie –, et articule une partie pratique, qui correspond à un savoir-faire, et une partie technologico-théorique, qui correspond à un savoir. La notion de praxéologie aide à mieux comprendre les problèmes liés au savoir à enseigner sous la forme proposée : quelles sont les praxéologies prescrites et quelles sont les technologies et les théories qui les justifient ?

Nous considérons aussi les notions d'objets ostensifs et non ostensifs définis par Y. Chevallard (1994) lors de l'analyse des praxéologies. Les objets ostensifs représentent les objets qui ont une forme matérielle, sensible, et qui peuvent être manipulés, tandis que les objets non ostensifs, appelés habituellement notions, concepts, idées, etc., ne peuvent être évoqués qu'à travers la manipulation des objets ostensifs associés, ce qui, selon l'auteur, témoigne d'une dialectique nécessaire entre eux.

Enfin, nous considérons la notion de niveaux de codétermination didactique qui aide à mieux comprendre rôle de l'enseignant dans le processus d'enseignement. Y. Chevallard (2007) introduit l'échelle suivante des niveaux de codétermination didactique :

sujets ↔ thèmes ↔ secteurs ↔ domaines ↔discipline ↔ pédagogie ↔ école ↔ société ↔ civilisation,

en indiquant que ces niveaux décrivent les interrelations entre les différents niveaux du système éducatif et que, si l'on modifie les conditions et les contraintes à un certain niveau, cela se répercutera sur tous les autres niveaux.

Après cette brève introduction aux notions de la TAD sur lesquelles nous nous basons pour notre étude, nous présentons maintenant la notion de cadre pour identifier les éventuelles lacunes de l'étude des fonctions lors de l'articulation entre le collège et le lycée.

1.2. La notion de cadre

Cette notion a été introduite par Régine Douady (1984) dans la perspective d'une théorisation didactique fondée sur une analyse épistémologique mettant en évidence :

- la dualité des concepts mathématiques en général et, avant toute chose, des outils implicites puis explicites de l'activité mathématique avant de prendre le statut d'objet et d'être travaillés en tant que tels ;
- le rôle joué par les changements de cadre dans l'activité et dans la production mathématique.

Cette analyse épistémologique l'a conduite à transposer les caractéristiques du fonctionnement des mathématiciens au domaine de la didactique *via* les notions de dialectique outil-objet et de jeux de cadre. R. Douady (1984) définit un cadre comme suit :

> [un cadre est] constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations. Ces images jouent un rôle essentiel dans le fonctionnement comme outil des objets du cadre. (p. 135)

Les jeux de cadres, organisés par l'enseignant, sont des transpositions didactiques de ces processus et sont vus par R. Douady comme des moyens privilégiés, à la fois pour susciter des déséquilibres cognitifs et pour permettre le dépassement de ces déséquilibres, vers des rééquilibrations de niveau supérieur.

Ainsi, la notion de cadre met l'accent sur le fait qu'un même concept est appelé à fonctionner dans différents environnements conceptuels et techniques et que le fonctionnement dans chacun de ces environnements présente des caractéristiques spécifiques. Les différences existantes étant précisément un des moteurs et outils de la création mathématique.

Pour ce travail, nous considérons les cadres suivants : cadre algébrique, cadre géométrique, cadre de la physique, cadre des situations contextualisées. Nous remarquons ici que les situations contextualisées sont celles que nous pouvons rencontrer au quotidien, comme par exemple celle qui consiste à demander aux étudiants de décrire, au moyen d'une fonction affine, le prix à payer lors d'une course de taxi, ce qui correspond à un exemple très utilisé au Brésil.

1.3. La notion de point de vue

La notion de point de vue est introduite par Marc Rogalski (2001) dans les termes suivants :

> Des points de vue différents sur un objet mathématique sont des manières différentes de le regarder, de le faire fonctionner, éventuellement de le définir. En ce sens, regarder un objet dans différents cadres, c'est avoir différents points de vue. Mais on peut avoir plusieurs points de vue dans un même cadre (p. 17).

Nous identifions, pour notre recherche, deux points de vue, à savoir : le point de vue « relation entre grandeurs » et le point de vue « relation entre deux ensembles ».

2. Méthodologie

En cohérence avec le cadre théorique et la question de la recherche, la méthodologie est axée sur :

- l'étude des propositions institutionnelles pour l'enseignement de la notion de fonction à travers les documents officiels du ministère de l'éducation et du secrétariat d'État à l'éducation,
- l'analyse d'un manuel scolaire d'un même auteur, allant de la fin du collège (élèves de 14 ans) au début du lycée (élèves de 15 ans), prescrit par le programme national du manuel scolaire,
- l'analyse du cahier de l'enseignant destiné au même groupe d'élèves et prescrit par le secrétariat d'État à l'éducation de São Paulo. Il convient de noter que le cahier de l'enseignant, ainsi que le cahier de l'élève, sont des manuels scolaire construits par les experts du secrétariat d'État à l'éducation.

Ainsi, nous nous proposons de réaliser une étude comparative des deux propositions, celle du ministère et celle de l'État de São Paulo, en vue de l'identification des régularités et des différences dans les praxéologies à enseigner. Remarquons que le cahier de l'élève est similaire au cahier de l'enseignant si on supprime les lignes directrices spécifiques à l'enseignant.

Pour l'analyse des manuels scolaires et du cahier de l'enseignant nous avons construit une grille d'analyse selon le modèle développé par Marlene Dias (1998) dans sa thèse de doctorat.

En annexe, nous présentons un exemple de l'application de la grille d'analyse sur un type de tâches de la première année du lycée sur la notion de fonction. Nous présentons ci-dessous ce que cette grille cherche à identifier.

2.1. La grille d’analyse

Le but de cette grille est d’identifier les praxéologies proposées ainsi que d’éventuels changements de cadres et de points de vue.

La grille d’analyse a été conçue comme un outil pour analyser les différents types de tâches en fonction des techniques proposées et des technologies et théories considérées. En outre, elle permet de déterminer les objets ostensifs et non ostensifs en jeu dans les tâches, les cadres utilisés dans l’énoncé et dans la résolution des tâches, ainsi que le point de vue adopté pour le développement de la tâche proposée.

Nous présentons ci-après les résultats de l’analyse des documents officiels, des manuels scolaires et du cahier de l’enseignant, réalisée grâce à la grille d’analyse.

3. Les résultats de l’analyse

En premier lieu, nous présentons les résultats de l’analyse des propositions prescrites par le ministère de l’éducation et par le secrétariat d’État à l’éducation de São Paulo pour l’enseignement de la notion de fonction aux élèves de dernière année de collège et de première année de lycée.

3.1. L’analyse des documents nationaux

Les propositions institutionnelles nationales pour le collège et le lycée sont présentées séparément. La proposition pour le collège date de 1997. Celle pour le lycée a pour origine un document sur les changements liés à un nouveau projet d’école de l’an 2000 ; elle est suivie par un autre document publié en 2002 qui présente les contenus à enseigner et une proposition de travail sur ces contenus, en considérant le développement de compétences. Ce dernier document a été augmenté en 2006 par l’insertion de quelques exemples afin d’aider les enseignants à comprendre le travail spécifié. Nous ne considérons ici que le document final de 2006.

Dans le document pour le collège, nous n’avons pas trouvé d’indications de propositions pour travailler les fonctions. Cependant, le développement de l’algèbre au collège nécessite d’établir une relation entre deux grandeurs et de modéliser dans des tâches intra et extra mathématiques sans l’aide d’une approche formelle : cela nous conduit à supposer que l’initiation à la pensée fonctionnelle, c’est-à-dire à penser en termes de relations, est implicitement présente, sans qu’il soit question d’utiliser une approche formelle, ce qui correspond à développer l’idée de fonction selon le point de vue « relation entre grandeurs ».

Le document analysé correspondant au lycée (Brésil 2006) propose de développer la notion de fonction à travers une approche formelle, en partant d’une reprise du travail déjà mené au collège : au collège, l’idée de fonction a été introduite et élaborée en tant que « relation entre grandeurs » à travers l’étude de tâches intra et extra mathématiques et en mettant l’accent sur la représentation graphique pour l’identification des propriétés. Par la suite, même si cette nomenclature n’a pas été utilisée dans la proposition, le point de vue est celui de « relation entre deux ensembles » : il est prévu d’introduire de façon intuitive la notion d’ensemble et leurs propriétés. Cette introduction permet un traitement formel, en particulier des propriétés des fonctions qui peuvent être justifiées algébriquement après avoir été visualisées à travers une représentation graphique. On propose également l’étude des fonctions affines, quadratiques, exponentielles, logarithmiques, trigonométriques et de leurs propriétés.

3.2. L’analyse du document de l’État de São Paulo

En 2008, le secrétariat de l’État de São Paulo, dans une tentative d’établir des conditions et des contraintes pour l’enseignement des contenus mathématiques, propose un curriculum minimal : dans cette nouvelle proposition il introduit les cahiers de l’enseignant et des élèves où le traitement des contenus est programmé par bimestre au cours de l’année. Remarquons ici que chaque état peut proposer un curriculum en suivant les indications du curriculum national.

Dans la dernière année de collège, l’étude de la notion de fonction est explicitement proposée au deuxième bimestre à travers le point de vue « relation entre grandeurs », en mettant l’accent sur les tableaux et les graphes de fonctions et sur l’introduction des fonctions affines et quadratiques à travers leurs représentations. La notion de proportionnalité est articulée à la notion de fonction.

En première année de lycée la proposition d’étude des fonctions suit les mêmes instructions que celles données pour la dernière année de collège, à savoir qu’il faut considérer le point de vue « relation entre grandeurs » et articuler la notion de fonction avec les notions de proportionnalité directe et inverse. L’accent est mis sur l’étude des graphes de fonctions en commençant par les fonctions affines et quadratiques, dont les propriétés doivent être saisies à travers leurs représentations graphiques. Soulignons l’importance du travail avec des exemples contextualisés, c’est-à-dire des situations extra mathématiques que nous pouvons rencontrer dans la vie quotidienne.

3.3. L’analyse des manuels

Les manuels que nous avons sélectionnés (Dante 2012a & 2012b) figurent parmi les éditions des manuels scolaires proposés par le programme national ; de plus, ce sont des ouvrages du même auteur, ce qui assure une certaine cohérence entre ces ouvrages.

Nous présentons d’abord l’analyse des manuels scolaires, suivie de l’analyse du cahier de l’enseignant, et finalement nous comparons brièvement les deux organisations prescrites pour le savoir à enseigner.

L’analyse du travail de Dante (2012a) pour la dernière année de collège, montre qu’on introduit en premier lieu les notions de nombre réel, d’équations et de systèmes d’équations du second degré, puis on propose un chapitre sur l’exploration de l’idée de fonction intuitivement introduit au travers des notions de variables dépendante et indépendante, c’est-à-dire, en utilisant le point de vue « relation entre grandeurs ». Par exemple : (prix (y), quantité (x)), (périmètre (y), côté (x)), (distance (y), durée (x)), etc.

Pour le développement du non ostensif fonction, l’auteur utilise différents registres ostensifs : tableau, algébrique (formule) et graphique. Pour l’étude des graphiques nous avons identifié le problème de la non-distinction entre variables discrètes et continues, ce qui, en général, conduit à ne considérer que les représentations continues pour les graphes de fonctions.

Sont encore introduits la notion de zéro d’une fonction et un processus géométrique pratique pour identifier les graphes des fonctions : on peut en déduire que les valeurs des variables doivent appartenir à l’ensemble des nombres réels. L’auteur se réfère donc implicitement au point de vue « relation entre ensembles » du fait que les fonctions sont définies de l’ensemble des réels dans l’ensemble des réels.

Après cette introduction de la notion de fonction, des types de tâches intra et extra mathématiques sont proposés pour être accomplis par des techniques de modélisation fonctionnelle comme « relation entre grandeurs ».

Lors du développement de l'idée de fonction affine, l'auteur suit la même structure, c'est-à-dire qu'il définit la fonction affine à travers le registre ostensif algébrique ($y = ax + b$, avec a et b réels et $a \neq 0$) et propose des types de tâches soit d'identification de cette fonction, soit intra et extra mathématiques. L'objet ostensif graphique est introduit suite au passage de l'objet ostensif algébrique à l'objet ostensif tableau : la construction graphique est faite dans un système cartésien orthogonal.

L'« *angle de la pente* » d'une droite est également traité, et cette connaissance est explicitement articulée à l'ostensif algébrique, c'est-à-dire l'angle de la pente est associé au coefficient a de l'expression $y = ax + b$. L'introduction de la fonction linéaire, comme cas particulier de la fonction affine, s'articule à la notion de proportionnalité dans un exemple du cadre de la physique, la proportionnalité y étant matérialisée par l'objet ostensif graphique.

De la même manière que pour la fonction affine, la fonction quadratique est introduite par sa loi de formation algébrique ($y = ax^2 + bx + c$, avec a, b et c réels et $a \neq 0$) et l'étude de sa représentation graphique est menée de la même façon. Les propriétés de la fonction quadratique sont considérées par la visualisation graphique lorsqu'on prend en compte la variation des coefficients. On étudie aussi l'intersection des paraboles avec les axes et la propriété des valeurs maximales et minimales à travers la détermination des coordonnées du sommet de la parabole.

Notons que dans cet ouvrage, l'utilisation des objets ostensifs algébriques, tableaux et graphiques, est proposée pour la résolution de problèmes intra et extra mathématiques, en mettant un accent particulier sur l'objet ostensif graphique en tant qu'outil de visualisation des propriétés des fonctions.

Dans l'ouvrage de Dante (2012b) pour le lycée, l'auteur, après avoir introduit intuitivement la notion d'ensemble, ses relations, ses opérations et ses propriétés ainsi que les ensembles numériques, passe au développement de la notion de fonction. Puis, il propose une reprise de la notion de fonction en tant que « relation entre grandeurs » avant d'introduire le point de vue « relation entre deux ensembles ». À partir de l'introduction de ce dernier point de vue, la notion de fonction est traitée formellement et ses propriétés sont définies par l'objet ostensif algébrique, ce qui permet de les démontrer.

Sont encore traitées les fonctions composées et inverses, et l'articulation entre les notions de fonction et de suite numérique est proposée.

Après le développement de la notion de fonction, vient l'étude de fonctions numériques particulières en commençant par la fonction affine définie comme une loi qui associe un nombre réel à un élément de l'ensemble des réels. Cela permet à l'auteur d'expliciter des cas particuliers et de proposer l'articulation de cette notion avec les notions suivantes : taux de variation, progression arithmétique, conversion d'une température d'une unité dans une autre, géométrie analytique, mouvement uniforme et proportionnalité. L'étude de l'objet ostensif graphique suit la même progression que celle du collège, l'auteur reprenant la notion d'angle de la pente d'une droite pour introduire le coefficient angulaire et le relier à l'étude de la monotonie de la fonction.

Les types de tâches proposés sont accomplis par des techniques justifiées par la définition des fonctions affines et leurs propriétés, et des tâches de modélisation sont proposées à travers des situations contextualisées.

L'étude des fonctions quadratique, exponentielle, logarithmique et trigonométrique suit la même structure.

4.4. L'analyse des cahiers des enseignants

Nous avons commencé cette analyse par *le cahier de la dernière année de collège (élèves de 14 ans*) dans lequel il est prévu d'introduire la notion intuitive d'ensembles, ses opérations, ses relations et ses propriétés, les notions de nombre réel, d'équations du second degré, de grandeurs proportionnelles et non proportionnelles. Par la suite, la notion de fonction est traitée en tant que « relation entre grandeurs ». L'étude des grandeurs directement et inversement proportionnelles commence par l'exploitation d'exemples pour lesquels sont fournis des tableaux et pour lesquels les auteurs considèrent la représentation algébrique correspondante $x/y = a$, $xy = b$, et $y = ax + b$, avec a et b réels.

Pour $y = ax + b$ les prescriptions pour l'enseignant soulignent qu'il n'y a pas de relation de proportionnalité entre y et x, mais qu'il est possible d'établir cette relation entre $y - b$ et x. L'étude est centrée sur la détermination d'une représentation algébrique entre deux grandeurs à partir d'exemples et à travers une représentation en tableau des grandeurs considérées. Il est également prescrit le passage de la représentation en tableau à la représentation graphique. Soulignons que l'auteur ne distingue pas les grandeurs discrètes et continues, de sorte que les graphes de fonctions sont toujours représentés par des courbes continues.

Les types de tâches utilisés pour l'introduction de la notion de fonction articulent cette notion avec celle de proportionnalité et organisent le passage de la représentation en tableau à la représentation algébrique et celui de la représentation en tableau à la représentation graphique. Ces types de tâches concernent la relation entre des grandeurs du quotidien et sont toujours introduits à l'aide d'exemples qui mettent l'accent sur la représentation en tableau (voir Figure 1 pour un exemple).

Conduisant une voiture, le conducteur doit être conscient de la distance parcourue par la voiture lorsque le frein est actionné. Le code de sécurité routière suggère une relation entre la distance de sécurité, c'est-à-dire la distance parcourue par la voiture après l'activation du système de freinage, et la vitesse de la voiture au moment du freinage. Le tableau suivant montre certaines valeurs trouvées sur une piste de test :

Vitesse : v (km/h)	0	10	20	30	40	50	100	120
Distance de sécurité d (mètres)	0	1	4	9	16	25	100	144

D'après le tableau, nous concluons que $d = k\,v^2$.

a) Quelle est la valeur de la constante de proportionnalité k ?

b) La voiture rencontre un obstacle à une distance de 83 m. Quelle devrait être approximativement sa vitesse maximale afin qu'elle n'atteigne pas l'obstacle ?
c) Quelle est la distance de sécurité lorsque la vitesse de la voiture est v = 80 km/h ?

Figure 1. Exemple d'une tâche sur la relation entre des grandeurs du quotidien. (São Paulo 2009, 9e année, v.1, p. 95)

Pour résumer, dans le cahier de la dernière année de collège (élèves de 14 ans) l'étude des fonctions est organisée autour de la notion de proportionnalité et en conséquence développe le point de vue « relation entre grandeurs ». Les fonctions affines et quadratiques ne sont pas explicitement abordées.

Dans *le cahier pour la première année de lycée (élèves de 15 ans)* il est prescrit de commencer par l'étude des ensembles numériques et des suites numériques puis d'introduire les progressions arithmétiques et géométriques et les mathématiques financières.

Après l'enseignement des notions ci-dessus, il est proposé d'étudier des fonctions comme « relation entre deux grandeurs » de façon articulée avec les notions de proportionnalité directe, inverse et directe avec le carré de la grandeur indépendante ($y = ax^2$, $a \neq 0$).

On revisite donc la notion de fonction telle que développée au collège. Par la suite, on s'appuie sur la représentation graphique pour l'étude de la monotonie et l'introduction de la notion de taux de variation.

Pour l'introduction d'autres propriétés de la fonction affine, on étudie des tâches concernant deux grandeurs liées à la vie quotidienne et à d'autres sciences (voir Figure 2 et Figure 3 pour des exemples).

Lorsque nous exprimons à travers les variables une situation d'interdépendance impliquant deux quantités directement proportionnelles, nous arrivons à une fonction de 1er degré. En général, une fonction du 1er degré est exprimée par une formule du type $f(x) = ax + b$, où a et b sont des constantes et $a \neq 0$. Il convient de noter qu'une fonction de 1er degré où $b = 0$ représente une proportionnalité directe entre $f(x)$ et x, puisque $f(x) = ax$. Quand $b \neq 0$, la différence $f(x) - b$ est directement proportionnelle à x, puisque $f(x) - b = ax$. Les droites A, B, C, D et E sont les graphiques des fonctions de type $f(x) = ax + b$. Déterminez les valeurs de a et b dans chacun des cinq cas présentés et indiquez la (les) représentation(s) de la variation des quantités directement proportionnelles.

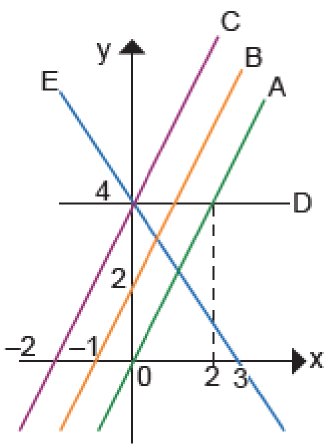
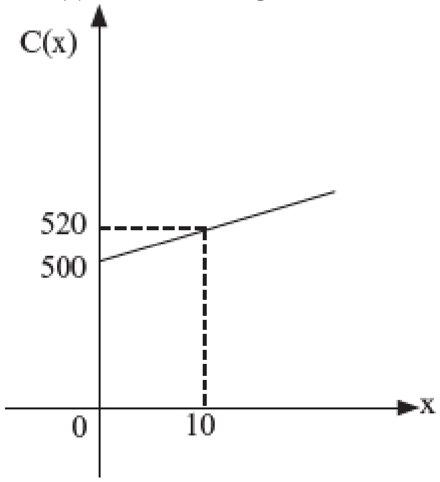


Figure 2. La notion de fonction affine associée à la notion de grandeurs directement proportionnelles. (São Paulo 2009 1ère année, v.1, p. 67)

Le graphique ci-dessous montre la relation entre la quantité *x* de litres de shampooing produit et le coût *C*(*x*), en *reais*, de la production domestique.



a) Quelle est la raison possible pour une dépense de 500 *reais* quand vous ne produisez pas encore de shampooing ?

b) Quelle est la fonction $C(x) = ax + b$ représentée par le graphique ? Cette représentation de l'interdépendance entre le coût *C* et la quantité produite *x* est-elle valable pour toute valeur de *x* ?

c) Quel est le coût pour produire 1 500 litres de shampooing ?

d) Combien de litres de shampoing peuvent-ils être produits avec R $ 10 000 ?

e) Quelle est la variation des dépenses pour la production de chaque litre supplémentaire de shampooing ?

Figure 3. Exemple d'une tâche d'application de la notion de fonction affine donnée par sa représentation graphique. (São Paulo 2009 1ère année, v.1, p. 68)

Les propriétés des fonctions affines et quadratiques sont visualisées graphiquement et à travers des exemples qui, en général, sont intra mathématiques.

Pour résumer, dans le cahier pour la première année de lycée (élèves de 15 ans) l'étude des fonctions est centrée sur la visualisation de leurs propriétés à travers l'objet ostensif graphique ; quand cela est possible, cette étude est articulée à la notion de proportionnalité. Le point de vue fonctionnel privilégié reste celui de « relation entre grandeurs ».

4.5. Types de tâches développés dans le manuel scolaire et le cahier pour la dernière année du collège

Nous présentons seulement les types de tâches introduits dans la dernière année de collège.

Le tableau 1 présente les types de tâches rencontrés dans les manuels scolaires et dans le cahier de l'enseignant.

Types de tâches (manuels scolaires – collège)	Types de tâches (cahier – collège)
T1 : Identifier les variables dépendantes et indépendantes pour une fonction donnée. T2 : Représenter une fonction à partir d'un tableau, d'une formule ou d'un	T'1 : Déterminer la représentation algébrique de grandeurs directement et inversement proportionnelles. T'2 : Construire le graphe de fonctions de deux grandeurs directement et

graphe de fonctions. T3 : Reconnaître le graphe des fonctions. T4 : Utiliser la notion de fonction pour déterminer la valeur d'une grandeur. T5 : Identifier une fonction affine par sa loi de formation. T6 : Construire le graphique d'une fonction affine donnée par son ostensif algébrique (formule). T7 : Étant donnée une fonction affine, déterminer l'angle de la pente d'une droite. T8 : Utiliser la notion de fonction affine pour déterminer la valeur d'une grandeur. T9 : Identifier une fonction quadratique par sa loi de formation. T10 : Construire le graphe d'une fonction quadratique donnée par son ostensif algébrique (formule).	inversement proportionnelles données à partir d'un tableau. T'3 : Établir une relation de proportionnalité entre deux grandeurs données par un tableau.

Tableau 1. Types de tâches à accomplir dans la dernière année du collège.

Le tableau 1 ci-dessus montre des propositions contradictoires : le cahier propose des praxéologies relevant seulement du point de vue « relation entre grandeurs », les techniques des types de tâches (T'1 à T'3) étant produites et justifiées par la théorie de la proportionnalité. Au contraire certains types de tâches du manuel requièrent des techniques justifiées implicitement par le point de vue « relation entre deux ensembles ». Comment les enseignants et les élèves peuvent-ils alors coordonner et articuler les praxéologies développées dans le manuel scolaire et dans le cahier ?

4. En guise de conclusion

Pour conclure, nous présentons les principaux résultats de l'analyse de l'articulation entre le collège et le lycée en ce qui concerne l'enseignement du concept de fonction en termes « de régularités et de différences » entre les préconisations de l'État de São Paulo et celles du Brésil.

Dans l'analyse du document national contenant des propositions pour le collège (Brésil 1997), il est implicitement mentionné qu'il faut développer la notion de fonction à travers le point de vue « relation entre grandeurs », préconisation respectée par le document de l'État de São Paulo (2008).

Le document national relatif au lycée (Brésil 2006), recommande de revisiter l'approche développée au collège, puis d'élargir cette approche par l'introduction du point de vue « relation entre deux ensembles » : cet élargissement autorise un traitement formel des propriétés des fonctions et leurs justifications, propriétés introduites à travers l'objet ostensif graphique au collège. Malgré les directives nationales au niveau du contenu considéré, le document du secrétariat à l'éducation de São Paulo ne présente aucune approche formelle pour le lycée.

Remarquons que, même s'ils permettent une liberté de choix, les deux documents laissent peu de place aux enseignants et ceux-ci se retrouvent confinés aux niveaux des thèmes et des sujets lorsque nous nous référons à l'échelle des niveaux de codétermination didactique. Les choix concernant les niveaux école, pédagogie, discipline, domaine et secteurs sont de la responsabilité des politiques et de la noosphère disciplinaire. Les enseignants sont donc souvent contraints de suivre les lignes directrices, et ceci d'autant plus que le nombre de macro-évaluations officielles que leurs élèves subissent pendant l'année est élevé : trois fois par an de la part du secrétariat à l'éducation de São Paulo, auxquelles s'ajoutent des évaluations nationales et internationales.

Nous avons approfondi l'analyse des documents officiels par l'examen du manuel scolaire et du cahier de l'enseignant pour tenter de comprendre les marges de manœuvre possibles pour les enseignants, à travers l'identification des praxéologies à enseigner.

Ainsi, nous avons montré qu'à l'origine le point de vue « relation entre grandeurs » est introduit et développé au cours de la dernière année de collège. Les techniques à enseigner sont justifiées par la proportionnalité dans les cahiers du collège et du lycée alors que dans les manuels, elles sont justifiées, au collège par l'objet ostensif graphique des fonctions, et au lycée par les propriétés des fonctions en s'appuyant sur l'objet ostensif algébrique, une fois introduit le point de vue « relation entre ensembles » au lycée.

Ceci nous conduit à considérer que les technologies développées dans le manuel du lycée sont associées à la théorie des ensembles, tandis que pour le manuel du collège et les cahiers du collège et du lycée, la théorie justifiant les technologies considérées est la théorie de la proportionnalité.

L'articulation du manuel avec le cahier étant de la responsabilité de l'enseignant, on peut comprendre les difficultés rencontrées par les professeurs mais aussi dans la formation initiale.

Références

Bosch, M., et Chevallard, Y. (1999) La sensibilité de l´activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(1), 77-124.

Brésil. (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais : matemática terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental*. Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica. – Brasília : MEC, SEF.

Brésil. (2006). *Parâmetros Curriculares Nacionais : Ensino Médio + : Ciências da Natureza e suas tecnologias*.

http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf

Chevallard, Y. (2007). *Le développement actuel de la TAD : pistes et jalons*.

http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=150

Chevallard, Y. (1994). *Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique*. Consulté le 10 Septembre 2015

http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/

Dante, L. R. (2012a). *Projeto Teláris – Matemática*. São Paulo : Ática.

Dante, L. R. (2012b). *Matemática contexto e aplicações*. São Paulo : Ática.

Dias, M.A. (1998). *Les problèmes d'articulation entre les points de vue « cartésien » et « paramétrique » dans l'enseignement de l'algèbre linéaire*. Thèse de doctorat, Université de Paris 7. France.

Douady, R. (1984). *Jeux de cadre et dialectique outil objet dans l'enseignement des mathématiques*. Thèse de Doctorat, Université de Paris 7. France.

Rogalski, M. (2001). Les changements de cadre dans la pratique des mathématiques et le jeu de cadres de Régine Douady. In *Actes de la journée en hommage à Régine Douady* (pp. 13-30). Paris : Didirem.

São Paulo (2008). *Proposta Curricular*. São Paulo : Secretaria de Educação do Estado de São Paulo.

São Paulo (2009). *Caderno do professor*. São Paulo : Secretaria de Educação do Estado de São Paulo.

Annexe

Grille d'analyse avec un exemple d'application.

Type de tâches (T) : Vérifier à l'aide d'un diagramme si deux ensembles donnés, qui répondent à une loi de mise en correspondance, représentent une fonction.

> Exemple : Étant donnés $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-1, 0, 1, 3, 4\}$ et la correspondance entre A et B, donnée par $y = x^2$, avec $x \in A$ et $y \in B$, faire un diagramme et dire si f est une fonction de A dans B. (Dante 2012b, v. 1, p. 75)

Technique (τ) : Représenter les ensembles donnés au moyen de l'ostensif diagramme de Venn, indiquer par des flèches la correspondance en observant la loi $y = x^2$ et interpréter le diagramme trouvé en utilisant la définition de fonction comme relation entre deux ensembles.

Technologie (θ) : La notion intuitive d'ensembles, leurs représentations, leurs opérations et leurs propriétés et la notion de fonction comme relation entre les ensembles, leurs représentations et leurs propriétés.

Théorie (Θ) : Théorie des ensembles et théorie algébrique des fonctions.

Cadre(s) en jeu sur le type de tâches : cadre algébrique.

Ostensifs en jeu sur le type de tâches : ostensif ensemble avec des éléments explicités, ostensif diagramme de Venn, ostensif algébrique (formule).

Points de vue en jeu sur le type de tâches : relation entre ensembles.