ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i4p322-337

Enseignement et apprentissage de l'algèbre abstraite à l'Université : vers un paradigme du questionnement du monde

THOMAS HAUSBERGER[1]

Abstract. It is discussed in this article what may be the study of Abstract Algebra at University in the paradigm of "questioning the world". This leads to the distinction between "top-down" and "bottom-up" approaches of the teaching of algebraic structures and the consideration of particular praxeologies in abstract algebra that are called "structuralist praxeologies". Building on this Reference Epistemological Model, it is argued that questioning the world in the context of abstract algebra should be about setting up a Study and Research Path which presents a good vitality of the fundamental particular-general and objects-structures dialectics. This point of view is illustrated on an example which consists in an innovative use of a transcript of a discussion on a forum; the pertinence and difficulties of such an approach are discussed.

Résumé. Nous discutons dans cet article ce que pourrait être l'étude de l'algèbre abstraite à l'Université dans le paradigme du questionnement du monde. Ceci nous amène à distinguer des approches « top-down » et « bottom-up » de l'enseignement des structures algébriques et à considérer des praxéologies particulières en algèbre abstraite que nous nommons « praxéologies structuralistes ». À partir de notre modèle épistémologique de référence, nous soutenons le point de vue qu'un questionnement du monde en algèbre abstraite doit s'apparenter à un parcours d'étude et de recherche qui présente une bonne vitalité des dialectiques fondamentales particulier-général et objets-structures. Nous illustrons ce point de vue sur un exemple présentant un usage innovant d'une retranscription d'échanges sur un forum et nous discutons la pertinence et les difficultés d'une telle approche.

1. La problématique de l'enseignement et de l'apprentissage de l'algèbre abstraite à l'Université

L'enseignement de l'algèbre abstraite à l'Université (notamment les structures algébriques de groupe, d'anneau et de corps) pose problème : selon une tirade célèbre, « the teaching of abstract algebra is a disaster, and this remains true almost independently of the quality of the lectures » (Leron & Dubinsky, 1995). Les difficultés sont en effet reconnues par de nombreux auteurs (Nardi, 2000, Lajoie et Murat, 2004, Durand-Guerrier et al., 2015, Hausberger, 2013) et reflètent un problème de « transition » (Gueudet, 2008), qui a lieu cette fois, par comparaison avec la transition lycée-université, à l'intérieur d'une même institution.

Comment expliciter ce phénomène ? De nombreuses difficultés sont à lier à la nature épistémologique particulière du savoir enseigné (le « challenge de la pensée structuraliste », Hausberger, 2012) et ses conséquences didactiques que l'on peut analyser au sein du cadre épistémologique des savoirs FUGS (formalisateur, unificateur, généralisateur, simplificateur ; Robert, 1987, voir également Hausberger, 2012, p. 430). L'étude de la disponibilité chez les étudiants des prérequis nécessaires à l'apprentissage des théorie algébriques abstraites, notamment la théorie des groupes (Durand-Guerrier et al., 2015) apporte également d'autres

[1] IMAG, Université de Montpellier, France – thomas.hausberger@umontpellier.fr

El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza
Eje 3. *Cuestionar el mundo: avances hacia un nuevo paradigma*

facteurs explicatifs. Pour autant, l'impact de l'organisation didactique est également à étudier : nous faisons l'hypothèse que l'approche majoritaire « top-down », c'est-à-dire un enseignement frontal des structures qui se présente comme un discours théorique (propre à la contemplation, selon l'étymologie de *theoria*), contribue à faire des apprenants des spectateurs plutôt que des acteurs. En d'autres termes, l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre abstraite à l'université se situe souvent dans ce que l'on appelle, en Théorie anthropologique du didactique (TAD), le « paradigme monumentaliste » (Chevallard 2013).

Face à un tel constat, nous discutons dans cet article ce que pourrait être une étude de l'algèbre abstraite dans le cadre du paradigme du questionnement du monde (Chevallard 2013), qui fait l'objet des développements récents de la TAD. Pour cela, nous cherchons dans la pensée structuraliste à l'œuvre dans les théories des structures algébriques les raisons d'être des concepts, ce qui nous amène à considérer des praxéologies particulières en algèbre abstraite que nous nommons *praxéologies structuralistes*. À partir de ce modèle épistémologique de référence (MER), nous soutenons le point de vue qu'un questionnement du monde en algèbre abstraite doit s'apparenter à un parcours d'étude et de recherche (PER) qui s'insère dans une approche « bottom-up » (voir section 4 ci-dessous) de l'enseignement des structures algébriques et présente une bonne vitalité des dialectiques fondamentales particulier-général et objets-structures (voir paragraphe 5.3). L'examen d'un fil de discussion sur un forum de mathématiques à propos d'une question portant sur la structure de l'anneau des nombres décimaux nous permettra d'observer le développement de praxéologies structuralistes par un collectif hétérogène d'apprenants en dehors de la salle de classe. Nous discutons ensuite la possibilité d'utiliser ce média en tant que milieu afin d'engager des petits groupes d'étudiants dans un second PER en classe dédié à l'apprentissage de praxéologies structuralistes dans l'esprit d'une « pédagogie de l'enquête ».

2. Approche top-down et paradigme monumentaliste de l'étude de l'algèbre abstraite

L'observation des manuels et des polycopiés de cours (Guin, 2013 et Perrin, 1996, par exemple) montre que l'approche majoritaire de l'enseignement des structures algébriques est de type « top-down » : elle prend la forme d'un discours théorique mettant d'abord en place le bloc du logos (ou bloc technologico-théorique) L_i de l'organisation mathématique (ou praxéologie), puis articulant la théorie à la pratique (donc au bloc praxique, ou pratico-technique) P_i à travers les exercices (voir figure 1). L'histoire des problèmes qui ont vu naître la théorie est peu présente, ces derniers ne sont pas utilisés pour problématiser l'enseignement, par économie, par esthétisme, par le peu de distance entre les mathématiques enseignées et la pratique des mathématiciens au niveau des mathématiques universitaires, non que la pratique effective du savant ne procède d'un rapport dialectique entre la théorie et la praxis, mais par le fait que la communication des résultats de la recherche met l'accent sur l'élaboration théorique et la logique des preuves au détriment de la logique de la découverte.

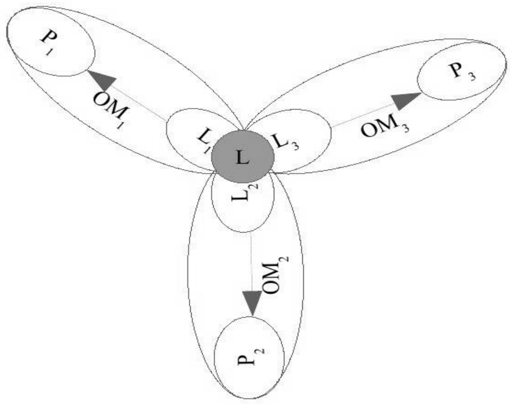

Figure 1. Mécanisme de genèse des organisations mathématiques dans une approche « top-down » (transposition didactique réalisée par trois enseignants-mathématiciens différents)

Face à un descriptif sommaire du « programme officiel »[2] du module, qui se présente sous la forme d'un contenu conceptuel que l'on peut assimiler à un bloc du logos L, incluant des notions théoriques (par exemple, celle d'idéal) et des technologies (par exemple, les théorèmes d'isomorphismes), l'enseignant-chercheur, dans son travail de transposition didactique, va intégrer ce bloc au sein d'un bloc théorique plus large $L_i = [\theta_i / \Theta_i]$ en relation avec son domaine de recherches et son expérience passée d'enseignement, pour enfin déterminer des blocs praxiques $P_i = [T_i / \tau_i]$ lorsqu'il choisira ses exemples et exercices d'application, ce qui complètera les praxéologies $[T_i/\tau_i/\theta_i/\Theta_i]$ (figure 1). À l'inverse, le « programme officiel », mis en place par un collectif d'enseignants-chercheur, aura tendance à coïncider avec l'intersection des L_i. Ceci explique que ce programme corresponde au « noyau structuraliste le plus dur », c'est-à-dire le plus dépouillé des traces de pratiques spécifiques à des catégories d'objets données.

Bien entendu, ce modèle sommaire a une valeur conjecturale. Une enquête approfondie au sein de l'institution « Université » serait nécessaire afin d'en examiner la pertinence et les limites. Sa fonction est de permettre la discussion du phénomène de construction des praxéologies en algèbre abstraite, en relation avec le processus de transposition didactique et la pratique des enseignants-chercheurs.

3. Un MER pour l'algèbre abstraite

3.1. Éléments d'épistémologie historique

La notion de structure provient de la constitution des mathématiques en tant que science des « relations entre objets », point de vue abstrait qui domine les mathématiques contemporaines depuis l'élaboration des axiomatiques formelles par Hilbert notamment. Ainsi que l'énonce Dieudonné (1987, p. 114) :

> Peu à peu se dégage une idée générale qui se précisera au XX^e siècle, celle de structure à la base d'une théorie mathématique ; elle est la conséquence de la constatation que ce qui joue le rôle

[2] Dans l'institution « Université » en France, le processus de transposition didactique est largement à la charge du mathématicien enseignant-chercheur, lequel bénéficie d'une grande autonomie pédagogique, même s'il est mis en place des comités d'enseignants-chercheurs qui localement établissent une division du savoir à enseigner en modules et proposent une brève description de ce contenu, le tout devant être validé par une commission au niveau national, composée également d'enseignants-chercheurs.

> primordial dans une théorie, ce sont les relations entre les objets mathématiques qui y figurent, plutôt que la nature de ces objets, et que dans deux théories très différentes, il se peut que des relations s'expriment de la même manière dans les deux théories ; le système de ces relations et de leurs conséquences est une même structure « sous-jacente » aux deux théories.

La pensée structuraliste se caractérise par une méthodologie et un style spécifique, qui font école à Göttingen autour de Noether dans les années 1920. Cette école *change la manière de prouver* en privilégiant les *preuves générales* limitant les calculs et en *mettant en avant les concepts*. Définir des concepts a pour objectif de reconstruire un domaine sur une nouvelle base, sur la base de concepts plus fondamentaux, plus généraux et plus « simples » :

> Il faut s'appliquer à réduire un domaine mathématique à ses concepts fondamentaux les plus généraux, donc les plus simples, puis à construire et à reconstruire à l'aide de ces seuls concepts (Hasse, 1930, pp. 26-27).

Il s'agit donc d'une *refondation mathématique*, portée par un projet qui relève également du didactique (permettre l'intelligibilité d'un contenu structuré). Cette reconstruction apporte une vision nouvelle de la matière mathématique et ouvre la voie à des constructions inédites, de nouveaux objets. En d'autres termes, *le didactique créé ici du mathématique*.

De ce fait, les raisons d'être des concepts sont à trouver dans l'examen des preuves classiques, dont ils apparaissent comme les « *ressorts* » (phase d'analyse). Par exemple, l'unicité de la décomposition en facteurs premiers dans les entiers est liée à la propriété que l'on énonce sous l'appellation « lemme de Gauss »[3] et son existence provient de l'impossibilité d'une chaîne infinie de divisibilité, c'est-à-dire du caractère « noethérien »[4] de l'anneau. On construit ensuite des théories déductives en combinant ces principes de façon à produire des systèmes axiomatiques fertiles (comme celui définissant un groupe) tels que les théorèmes sur les objets considérés apparaissent comme des conséquences logiques de ces derniers systèmes (phase de synthèse).

Ainsi que le souligne Bourbaki dans un manifeste célèbre intitulé « L'architecture des mathématiques » :

> Son trait le plus saillant [de la méthode] est de réaliser une économie de pensée considérable. Les structures sont des outils pour le mathématicien ; une fois qu'il a discerné, entre les éléments qu'il étudie, des relations satisfaisant aux axiomes d'une structure d'un type connu, il dispose aussitôt de tout l'arsenal des théorèmes généraux relatifs aux structures de ce type, là où, auparavant, il devait péniblement se forger lui-même des moyens d'attaque dont la puissance dépendait de son talent personnel, et qui s'encombraient souvent d'hypothèses inutilement restrictives, provenant des particularités du problème étudié. On pourrait donc dire que la méthode axiomatique n'est autre que le « système Taylor » des mathématiques (Bourbaki, 1998, p. 42).

En d'autres termes, Bourbaki met en avant la dimension outil (Douady, 1986) des structures mathématiques là où, dans l'enseignement actuel, ils apparaissent à travers une dimension objet prépondérante. Afin d'instaurer une dialectique outil-objet soulignant les *raisons d'être des concepts en tant que généralisateurs-simplificateurs*, les types de tâches ne doivent pas rester au

[3] Si a divise un produit bc et a est premier avec b alors a divise c.

[4] Dans un tel anneau, toute suite d'idéaux croissante pour l'inclusion est stationnaire.

niveau théorique (montrer une inférence dans le jeu axiomatique abstrait) mais attraper des objets concrets et montrer le gain du point de vue conceptuel. Comme nous allons le constater, outre la difficulté à mettre en avant une situation fondamentale dans le cas des savoirs FUGS (Rogalski, 1995), nous nous heurtons à la présence de méthodes élémentaires qui agissent comme un pôle attractif vis-à-vis de l'apprenant comparativement au pôle conceptuel abstrait souvent répulsif.

3.2. Praxéologies structuralistes

Prenons tout d'abord un exemple, relatif au type de tâches « démontrer qu'un anneau donné est intègre », dans le cas de l'anneau des entiers de Gauss $\mathbf{Z}[i]$ constitué des nombres de la forma $a + ib$, où a et b sont dans $\mathbf{Z}$. Cette tâche peut être traitée à différents niveaux, selon l'importance de la « dimension structuraliste ».

Au premier niveau (niveau 1), il s'agit de démontrer que la définition de l'intégrité est satisfaite, autrement dit qu'« un produit est nul si et seulement si un des facteurs est nul ». On écrit pour cela $(a + ib)(c + id) = 0$, ce qui conduit à un système un peu pénible à résoudre dans les entiers, d'où probablement une impasse pour un grand nombre d'étudiants. Par contre, lorsque l'on réalise que $\mathbf{Z}[i]$ est inclus dans l'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes et qu'un élément non nul est inversible donc simplifiable, la preuve devient « triviale » : $zz' = 0$ avec z non nul, donne, en multipliant par z^{-1}, la nullité de z'.

Au niveau 2, on utilise toujours l'inclusion de $\mathbf{Z}[i]$ dans $\mathbf{C}$ mais on invoque le résultat général que le sous-anneau d'un corps est intègre. Le bloc technologico-théorique, réduit dans le niveau 1 aux propriétés des nombres complexes, intègre maintenant des résultats abstraits généraux, des structures. C'est ce type d'organisation mathématique qui est visée, et non l'organisation mathématique restant au niveau de la théorie des objets.

Au niveau 3, on invoque qu'un corps est intègre et que l'intégrité est une propriété stable par sous-anneau. C'est le même bloc théorique que le niveau 2 en apparence mais la formulation de la réponse et son mode d'obtention est différent : on n'applique plus un théorème du cours, mais le mode de pensée structuraliste par rapport à la question posée : elle concerne l'intégrité ; on raisonne alors en termes de classes d'objets, de relation entre ces classes (anneau-corps) et de conservation de la propriété (intégrité) vis-à-vis des opérations structuralistes sur ces classes (passage à un sous-anneau).

Ainsi que le montre une étude plus exhaustive des praxéologies dans le domaine de l'arithmétique des anneaux abstraits (Hausberger, 2016a & 2016b), par exemple, ce phénomène est général en algèbre abstraite : chaque type de tâches présente une dialectique entre le particulier et le général, où l'on essaie soit de généraliser/adapter des preuves connues, soit de généraliser l'énoncé à démontrer et de démontrer cette généralisation en conjecturant qu'elle est vraie et porteuse de simplification. La pensée structuraliste raisonne ainsi en termes de classes d'objets, de relations entre ces classes et de stabilité de propriétés par des opérations sur les structures. Sur le modèle de l'exemple précédent, dès que le niveau 2 est atteint, nous pouvons parler de praxéologie structuraliste. De façon générale, une telle praxéologie va viser la réalisation de la tâche en se plaçant à un niveau de généralité qui soit porteur de simplification, en appui sur les concepts et sur l'outillage technologique structuraliste (théorèmes d'isomorphismes, théorèmes de structures, etc.). La méthodologie structuraliste vise ainsi à remplacer une praxéologie $[T / * / * / *]$ par une praxéologie structuraliste $[T^g / \tau^g / \theta / \Theta]$, où T^g désigne une généralisation de T.

Par exemple, il sera question dans le forum du type de tâches T : montrer qu'un anneau donné A est principal, dans le cas de l'anneau $\mathbf{D}$ des nombres décimaux. Plusieurs praxéologies structuralistes sont susceptibles d'émerger de cet exemple : il est possible, d'une part, de réaliser T à travers T_1^g : montrer que A est euclidien, en vertu de l'argument technologique suivant : tout anneau euclidien est principal. On peut, d'autre part, raisonner sur les résultats de conservation de la propriété considérée (la principalité) et les façons de relier $\mathbf{D}$ à des anneaux connus, via des opérations structuralistes. La consultation du manuel (Perrin, 1996), lequel consacre un paragraphe entier à la « stabilité des notions étudiées » (loc. cit. p. 50) nous apprend que, pour le passage à l'anneau des polynômes, si A est principal, en général $A[X]$ ne l'est pas (c'est le cas si et seulement si A est un corps) ; pour le passage au quotient, on se restreint aux idéaux premiers afin que le quotient soit intègre et alors le quotient d'un anneau principal est également principal (c'est même un corps) ; pour le passage aux sous-anneaux, il ne faut espérer aucune conservation, comme le montre l'exemple d'un sous-anneau intègre plongé dans son corps des fractions. Une première piste est alors d'utiliser l'isomorphisme $\mathbf{D}\simeq\mathbf{Z}[X]/(10X\text{-}1)$, cependant la principalité ne se transmet pas de $\mathbf{Z}$ à $\mathbf{Z}[X]$. Une seconde piste est de considérer $\mathbf{D}$ comme un sous-anneau du corps $\mathbf{Q}$. On peut alors démontrer que tout sous-anneau de $\mathbf{Q}$ est principal, c'est-à-dire réaliser T à travers T_2^g : montrer que tout sous-anneau d'un anneau principal donné est principal. Pour autant, cette généralisation n'éclaire pas les raisons de la conservation de la principalité dans le cas considéré, puisque le résultat est faux en général. On peut répondre à cette sollicitation en introduisant de nouvelles généralisations, sous la forme de tâches abstraites faisant intervenir des structures uniquement : par exemple, t_3^g : montrer que, si K désigne le corps des fractions d'un anneau principal A et si B est un anneau tel que $A\subset B\subset K$, alors B est également principal. Une autre réponse est proposée dans (Perrin, 1996), sous forme d'exercice (loc. cit. p.61) :

> Soit A un anneau euclidien, relativement à v. Soit $K = \mathrm{Fr}(A)$ et, pour s appartenant à A, $s \neq 0$, soit $A_s=\{x\in K|\ x=a/s^n,\ n\in\mathbf{N}\}$. Montrer que A_s est un anneau euclidien (modifier la fonction v en posant $v(s) = 1$).

C'est un cas particulier de localisé d'un anneau par un monoïde multiplicatif. Une réponse structuraliste est ainsi de mettre en avant la conservation du caractère euclidien d'un anneau, par localisation.

4. Approche *bottom-up* et questionnement du monde

4.1. Approche *bottom-up*

Notre première étape, dans la quête d'un nouveau paradigme pour l'étude de l'algèbre abstraite, vise à « inverser » le mode d'exposition, en accord avec la genèse historique des concepts : nous opposons à l'approche top-down une approche « *bottom-up* », où l'on se donne le temps des généralisations successives, de la motivation de la construction des concepts. L'organisation des moments de l'étude (Chevallard, 2002) est ainsi très contrastée entre les deux approches, ce qui rejaillit au niveau des organisations mathématiques. Bien que les praxéologies visées soient celles du programme, une approche *bottom-up* conduit à mobiliser des techniques de divers niveaux structuralistes (voir 3.2).

En effet, d'un point de vue praxéologique, l'enseignant pose d'abord un bloc praxique $[T / \tau]$ au sein d'une théorie (θ, Θ) en constitution, donc un bloc du logos partiel $[\theta_p / \Theta_p]$ (voir figure 2). La dialectique entre les deux blocs en relation avec l'application de la méthodologie structuraliste enrichit à la fois le bloc de la praxis (passage de $[T / \tau]$ à $[T^g / \tau^g]$, voir 3.2) et celui du logos, conduisant à un accroissement progressif du topos de l'étudiant qui est amené à s'approprier ou mettre en œuvre cette dialectique.

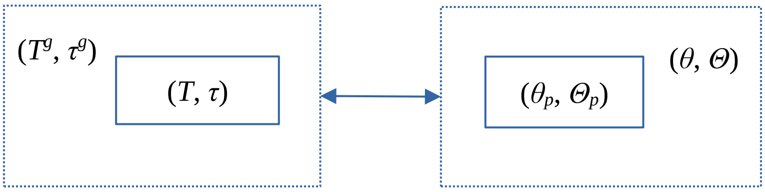

Figure 2. Mécanisme de construction-complétion progressive de praxéologies, par une dialectique entre théorie et pratique dans le cadre d'une approche « *bottom-up* ».

Cette approche vise en quelque sorte à faciliter une transition qui s'apparente à celle « de type 2 » identifiée par Winslow (2006) : étudiant les praxéologies en analyse au sein de l'institution Université, Winslow constate que la transition du concret à l'abstrait que requiert la transition secondaire-supérieur se traduit, au niveau praxéologique, par le développement de nouvelles praxéologies $[P' / L']$ dont le bloc praxique est construit sur le bloc du *logos* d'une praxéologie $[P / L]$ que l'étudiant maîtrise déjà. En algèbre abstraite, il s'agit davantage d'une réécriture de l'algèbre classique sur la base de nouveaux concepts. L'approche *bottom-up* vise à accompagner ce mouvement de généralisation et de réécriture, lequel conduit également à de nouveaux objets, de nouvelles questions, donc de nouveaux blocs praxiques.

Du point de vue didactique, se pose la question, cruciale, du choix du bloc du logos $[\theta / \Theta]$ à construire, lorsque $[T / \tau / \theta_p / \Theta_p]$ est posé, en fonction des différentes contraintes (institutionnelles, cognitives en lien avec les rapports individuels aux savoirs, etc.) et de l'écologie des savoirs. Nous discuterons plus en détail ces questions sur l'exemple du forum (les nombres décimaux).

Enfin, notre description de l'approche *bottom-up* peut paraître, sous certains aspects, antagoniste à une acception du paradigme du questionnement du monde selon laquelle un processus d'étude se doit d'être *ouvert*, c'est-à-dire détaché de la finalité que constituerait la rencontre de praxéologies données. Or il est clair que le contrat didactique de l'enseignant *y* avec l'institution université exige que les praxéologies rencontrées lors de l'étude ne se limitent pas aux techniques élémentaires mais mobilisent les praxéologies structuralistes. Nous considérons que c'est l'une des conditions pour que le processus d'enquête soit *abouti*, au sens où l'entend Chevallard lorsqu'il discute le contrat en vigueur dans le paradigme didactique du questionnement du monde :

> Dans ce paradigme, *y* aura rempli son contrat avec la société lorsqu'il aura fait enquêter *X* [le collectif d'apprenants] – de façon raisonnablement aboutie sous les contraintes existantes – sur une suite de questions Q_1, Q_2, ..., Q_n jugées importantes, voire vitales, et non lorsque *X* aura rencontré *in abstracto* certaines entités praxéologiques $\wp_1$, $\wp_2$, ..., $\wp_m$. Un système didactique scolaire aura ainsi à rendre des comptes sur les questions qu'on y aura étudiées plutôt que sur les praxéologies que cette étude aura conduit à rencontrer (Chevallard 2011, p. 98).

Lorsque les questions génératrices de l'étude ne se limitent pas à servir de prétexte à la visite des œuvres, mais au contraire motivent et guident l'étude, nous considérons que cette dernière se situe au sein du nouveau paradigme que vise la TAD. Par exemple, poser la question des « bons » anneaux qui jouent, vis-à-vis d'un corps de nombres (une extension finie du corps **Q** des nombres rationnels), un rôle analogue à celui des nombres entiers **Z** vis-à-vis de **Q**, constitue un contexte permettant d'inscrire et de problématiser la construction de nombreuses praxéologies structuralistes : on en vient alors à s'interroger sur l'intégralité, ou le caractère euclidien, de l'anneau des entiers de Gauss $\mathbf{Z}[i]$, exemple que nous avons pris pour illustrer le modèle des praxéologies structuralistes. En fait, il s'agit également de motiver, dans le questionnement, le passage de $[T / \tau]$ à $[T^g / \tau^g]$. C'est à ce niveau qu'intervient ce que nous appelons la « dialectique objets-structures ».

4.2. Questionnement du monde et dialectique objets-structures

Notre idée est la suivante : la formalisation est à la fois une mathématisation du monde (réel extra-mathématique) et, à un niveau supérieur d'abstraction, une réécriture conceptuelle des mathématiques antérieures (pré-structuralistes) en termes de structures, les objets mathématiques usuels faisant office de réel intra-mathématique. Dans cette perspective, questionner le monde en instaurant une dialectique fertile entre médias et milieux (Chevallard 2008), c'est questionner les objets mathématiques eux-mêmes de telle sorte que l'on puisse observer, faire fonctionner et développer une dialectique entre objets et structures, les concepts structuraux étant construits ou mobilisés à travers ce jeu du questionnement.

Comme nous l'avons vu lors de notre étude épistémologique, ce questionnement fondé sur la dialectique objets-structures est constitutif du sens des concepts structuralistes (raisons d'être en tant que ressorts) en relation avec la méthodologie structuraliste (raisons d'être en tant que production de concepts unificateurs-généralisateurs-simplificateurs). La dialectique objet-structure va de pair avec la dialectique particulier-général.

Ainsi que l'illustre bien le manifeste de Bourbaki, ce que nous apparentons à une démarche de questionnement du monde en algèbre abstraite reflète la pratique experte des mathématiciens (dans sa logique de découverte et non son contexte d'exposition). Que transposer de ce questionnement dans un contexte d'apprentissage ? Comment le susciter, dans le cadre d'une approche *bottom-up* des structures algébriques et prendre en charge toutes les questions de nature topogénétique, mésogénétique et chronogénétique inhérentes à cette démarche ?

Afin de répondre à ces questions et dans l'optique de développer une ingénierie, nous menons l'enquête sur un forum de mathématiques, que nous identifions en tant que lieu du débat mathématique : dans un tel milieu où se constituent des collectifs hétérogènes d'apprenants, peut-on observer des gestes de l'étude qui s'apparentent à un questionnement du monde en algèbre abstraite ? Ces collectifs développent-ils des praxéologies structuralistes, au sens où nous les avons définies et sommairement décrites précédemment ?

5. Une enquête (PER) sur un forum à propos de la structure algébrique des nombres décimaux

5.1. Présentation du forum et du fil de discussion

Le forum est accessible à l'adresse http://www.les-mathematiques.net. Il a été créé en janvier 2001 et est régi par une charte, rédigée par les principaux contributeurs du forum. Cette charte véhicule une intention didactique (mettre sur la piste, émettre une critique constructive). Le contenu mathématique n'est pas modéré (extérieurement au collectif de pairs). La structure du forum organise les échanges sous forme d'un fil de discussion.

Le fil de discussion qui nous concerne, intitulé « les nombres décimaux », est visible à l'adresse suivante : http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?3,318936,page=1. Les échanges ont eu lieu probablement pendant un temps assez court, en 2007. Le contenu n'a pas évolué depuis (pas de nouvelle intervention) mais il a été vu 6897 fois (au 30 mai 2015), ce qui constitue l'un des plus gros scores (avec un fil de discussion consacré aux suites de Cauchy dans **Q,** qui totalise 9595 vues). Ce fil, en tant que média (figé), sert ainsi de documentation aux visiteurs du forum (lecteurs) qui se posent des questions similaires.

L'intervention initiatrice du fil est le fait d'un contributeur (Mic) que nous noterons x, lequel met avant deux assertions et deux questions :

- $A_{x,0}$: **D** (nombres décimaux) est un sous-anneau de **Q**
- $A_{x,1}$: Tout sous-anneau de **Q** est principal
- $Q_{x,1}$: Comment démontrer $A_{x,1}$?
- $Q_{x,2}$: Comment définit-on le pgcd de deux décimaux ?

D'emblée, nous remarquons que les assertions $A_{x,0}$ et $A_{x,1}$ constituent les prémisses d'un syllogisme dont la conclusion est « **D** est principal », assertion notée A_x et qui est probablement visée par x. L'assertion $A_{x,1}$ est une généralisation de A_x (nous notons $A_{x,1} = A_x^g$), dans l'esprit de la méthode structuraliste : la preuve recherchée se place au niveau de généralité supérieur (A_x^g), reflétant la pratique experte des mathématiciens qui d'une part postulent que cette généralisation est porteuse de simplification, d'autre part considèrent qu'elle est éclairante quant aux « raisons profondes » (les ressorts) à l'origine du phénomène (la principalité de **D**). Alors que la question $Q_{x,1}$ se rapporte à l'exigence démonstrative relativement à cette propriété de principalité qui est affirmée, la question $Q_{x,2}$ lui est également liée : tant l'existence du pgcd que les diverses propriétés du pgcd que l'on peut énoncer ou prendre comme définition dépendent du type d'anneau dans lequel on se place[5]. Dans ce qui suit, nous considérons l'étude de ces questions par le collectif comme constituant un parcours d'étude et de recherche.

---

[5] Dans un anneau intègre, la relation de divisibilité est un préordre et le pgcd est défini aux unités près en tant que maximum pour ce pré-ordre de l'ensemble des diviseurs communs, mais son existence n'est pas garantie. Un pgcd existe toujours dans un anneau factoriel et il s'exprime en fonction des décompositions en éléments irréductibles ; dans un anneau principal, on peut définir un pgcd en tant que générateur de l'idéal somme et l'on dispose ainsi de coefficients de Bézout. Les anneaux euclidiens apportent des aspects effectifs : un pgcd peut être calculé à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

5.2. Analyse de la dynamique de l'étude

Nous avons analysé (Hausberger, 2016c) la dynamique des échanges en termes des dialectiques questions-réponses, média-milieux et individuel-collectif. Le fait qu'il s'agisse d'un PER mathématique, au niveau de l'enseignement supérieur (avec son exigence de preuve, outre le propos de la question $Q_{x,1}$ elle-même) et sur l'algèbre abstraite, nous a poussé à introduire les dialectiques supplémentaires suivantes : celle des preuves et des réfutations (point de vue logique) d'une part et les dialectiques particulier-général et objets-structures (point de vue structuraliste) d'autre part.

Les questions initiales Q_i appellent donc à la construction de réponses R_i ou à la mobilisation de réponses R_j déjà construites, à déconstruire en visitant des œuvres O_k afin de produire des réponses $R_i^{\heartsuit}$ en faisant émerger de nouvelles questions Q'_l.

Nos analyses montrent en fait que le système didactique est très labile : les $x_i \neq x$ (l'auteur de la question) présentent un très faible topos visible (sur les 29 interventions de 13 participants, 11 sont dues à x, chacun des autres participants intervenant au plus 3 fois). Le complémentaire de x, noté Y, constitue en quelque sorte un ensemble d'aides à l'étude pour x. D'un point de vue global, le système didactique est donc de la forme $S(x, Y, Q_x)$.

Localement, en notant les contributeurs par leur initiale (ou par deux lettres en cas d'ambiguïté), nous pouvons distinguer différents systèmes didactiques auxiliaires :

- $S(\{x,gu,to,f\}, \{d,tr\}, Q_{x,1})$
- $S(bs, \{to,br\}, Q_{bs})$
- $S(x, \{bs,ol,om,n\}, A_{to})$
- $S(x, co, A_{ol})$
- $S(\{x, ga\}, tr, Q_{tr})$

où les questions et assertions discutées sont :

- $Q_{bs} = Q_{x,1}^{g}$: tout sous-anneau d'un anneau principal est-il principal ? Le contributeur *br* y répond même à travers une généralisation Q_{bs}^{g} de la question : il donne une classe de contre-exemples à l'assertion « toute propriété remarquable des anneaux (euclidien, principal, factoriel, noethérien, de Bézout) est stable par sous-anneau » (le même « cas d'école » que (Perrin, 1996), voir 3.2).
- A_{to} : $\mathbf{Z}[X]$ n'est pas principal, destiné à fournir également un contre-exemple à la question Q_{bs} qui porte sur une assertion universelle
- A_{ol} : l'idéal $(2, X)$ de $\mathbf{Z}[X]$ n'est pas principal
- Q_{tr} : que vaut pgcd(0,6 ; 34,8) ? Cette question a été formulée par *tr* après avoir répondu à la question $Q_{x,2}$ portant sur la définition du pgcd de deux décimaux : *tr* y répond d'ailleurs à travers une généralisation $Q_{x,2}^{g}$ de la question, il définit le pgcd dans un anneau intègre général (œuvre O_1) et il énonce le théorème d'existence du pgcd dans un anneau principal (œuvre O_2). La question Q_{tr} vise ainsi au développement d'une praxéologie dont le type de tâches est le calcul du pgcd et dont le bloc technologico-théorique contient $\{O_1, O_2\}$. Ceci conduit à la production par x de premières réponses $R_{x,1}$ (pgcd = 0,2) et $R_{x,2}$ (pgcd = 0,6), puis à une réponse $R_x^{\heartsuit}$ (pgcd = 6), à la suite de celle $R_{ga}^{\heartsuit}$ (pgcd = 3) donnée par *ga*.

Ainsi, vis-à-vis de certaines questions dérivées, certains contributeurs se rangent-ils également au rang des étudiants, à côté de x, tandis que d'autres vont adopter la posture d'aides à l'étude.

Les niveaux de généralités les plus élevés (question Q_{bs}) ne sont pas investis par x (ce dernier n'apparaît pas dans le système $S(bs, \{to,br\}, Q_{bs})$, du moins au niveau des traces observables de l'étude de cette question par le collectif). La question A_{to} est l'occasion d'une pluralité de preuves, dont certaines mobilisent des œuvres telles que le théorème important suivant sur les idéaux d'un anneau principal : « dans un anneau principal, tout idéal premier est maximal » (œuvre O_3) ou nécessitent encore des compléments (faisant appel aux théorèmes d'isomorphismes notamment).

5.3. Conclusions

Dialectique des preuves et des réfutations. Nous notons une grande vitalité des échanges en termes de preuves et de réfutations : pluralité des réponses et des preuves, d'indications et de compléments de preuves, ouverture vers des questions connexes. La multiplicité des preuves (favorisée par la présence du collectif), y compris celles qui ne débouchent pas, contribue largement à la visite des œuvres. Les preuves les plus directes et élémentaires sont les moins riches. Certaines assertions sont données sans preuve ou avec des preuves incomplètes (tout comme dans la littérature mathématique où le niveau de l'argumentation dépend de nombreux facteurs).

Dialectique particulier-général. La reformulation du problème avec un niveau de généralité supérieur (passage de A à A^g) apparaît comme une démarche employée à plusieurs reprises par certains membres du collectif (probablement des étudiants avancés). Ceci reflète les démarches expertes des mathématiciens en algèbre abstraite et participe du développement de praxéologies structuralistes.

Dialectique médias-milieux. La liste des concepts (anneau noethérien, euclidien, idéal premier, etc.) et théorèmes (O_2,O_3, etc.) atteste de la visite d'œuvres majeures de l'algèbre abstraite. La mobilisation des œuvres dans un contexte de preuve, la convocation de nouvelles œuvres afin de combler les trous des preuves ou de réfuter des preuves, qui constituent dans ce contexte la dialectique des médias et des milieux, attestent de l'appropriation de ces œuvres par le collectif.

Dialectique objets-structures. La mise en relation d'objets et de structures, dans un rapport dialectique est, dans le contexte spécifique de l'algèbre abstraite, un second indicateur de l'appropriation des œuvres. L'examen de la structure des objets, des généralisations éventuelles des énoncés et des preuves, de l'insertion de ces dernières dans la théorie constituée en tissu axiomatique fait des structures axiomatiques un point de vue conceptuel généralisateur-simplificateur pour démontrer des propriétés sur les objets. Réciproquement, un contrôle sémantique sur les énoncés axiomatiques s'exerce en les mettant à l'épreuve des exemples connus, donc des objets.

6. Vers un questionnement du monde en algèbre abstraite ?

6.1. Formulation du problème

Dans le formalisme de la TAD, il s'agit de discuter sous des contraintes K les conditions C de rencontre $\mathfrak{R}$ des étudiants X avec les praxéologies structuralistes $\wp$, ce que l'on note $\mathfrak{R}(K, C, \wp, X)$. Notre étude des praxéologies structuralistes, en appui sur l'épistémologie historique, a montré que ces dernières proviennent d'un mouvement de réécriture de l'algèbre classique : les concepts d'algèbre abstraite acquièrent leur sens en tant que concepts FUGS, donc via les dialectiques particulier-général et objets-structures. Ces praxéologies sont liées à la méthode structuraliste, laquelle consiste en un ensemble de techniques transversales aux différentes structures algébriques (théorèmes d'isomorphismes, théorèmes de structure, combinatoire de structures, raisonnements en termes de conservation de propriétés par des opérations structuralistes) et pose la généralisation et l'unification comme des points de vue fertiles et simplificateurs. De ce fait, nous soutenons qu'une rencontre de ces praxéologies, lorsqu'elle est censée éclairer les raisons d'être des concepts, ne peut s'effectuer de façon immédiate, mais au contraire de façon graduelle et échelonnée. Ceci motive la mise en œuvre de parcours d'étude et de recherche en algèbre abstraite, les PER, par rapport à la notion d'AER, ayant également été introduits de façon à produire une rencontre non immédiate, graduelle et échelonnée avec tout un ensemble de praxéologies.

Afin de quitter le paradigme monumentaliste dominant en algèbre abstraite, nous plaçons parmi les contraintes *K* une insertion du PER dans le cadre d'un enseignement bottom-up des structures algébriques, tel que nous l'avons esquissé au paragraphe 4.1. Cette approche suscite d'emblée des questions de nature topogénétique et mésogénétique : afin d'assurer le fonctionnement des dialectiques particulier-général et objets-structures dans le cadre d'une construction progressive des concepts (l'élaboration théorique du cours), la question du rapport entre topos offert et topos possiblement investi (voir 6.3 ci-dessous) devient cruciale ainsi que celle de la constitution d'un milieu suffisamment riche pour que la question mise à l'étude conduise au développement des praxéologies structuralistes (donc ne se limite pas à l'usage de méthodes élémentaires).

Enfin, le questionnement du monde en algèbre abstraite que nous défendons dans cette communication est celui, exposé au paragraphe 4.2, du questionnement des objets mathématiques à l'aune des structures en cours d'élaboration. La question *Q* mise à l'étude concernera donc un domaine d'objets, l'enjeu didactique étant de créer les conditions *C* afin que s'instaure un rapport dialectique fertile entre objets et structures conduisant à la rencontre de praxéologies structuralistes utiles pour produire une réponse $R^{\heartsuit}$. Se greffe également un nouvel enjeu : outre celui de la question *Q*, celui de l'abstraction et de la généralité en tant que vecteurs de compréhension et de simplification. Cet enjeu se place au niveau de la Discipline, au sein de l'échelle de co-détermination didactique de la TAD, mais il serait également à examiner au sein des niveaux supérieurs.

6.2. La stratégie du média-milieu

Nous appelons *média-milieu* le fil de discussion sur les nombres décimaux présenté au paragraphe 5, lequel constitue un média *M* portant la trace de son fonctionnement en tant que milieu, lors de l'élaboration du média. Nous avons analysé ce processus d'élaboration en termes de PER et de dialectiques, et mis en évidence le développement de praxéologies structuralistes par le collectif d'apprenants.

Dans une démarche d'élaboration d'activités (travail d'ingénierie) s'inscrivant dans ce nouveau paradigme de questionnement du monde en algèbre abstraite, à construire, nous proposons d'utiliser le média-milieu en tant que milieu lors d'une activité en classe s'apparentant à un second PER. Ce n'est plus $Q = Q_{x,1} \cup Q_{x,2}$ qui est soumis au débat mais le média *M* lui-même, polarisé par une question de l'enseignant Q_M relative à *M* et que l'on peut résumer en ces termes : quelles connaissances sur les nombres décimaux et sur les anneaux généraux peut-on extraire de ce média-milieu ? La question Q_M nécessite ainsi l'étude de Q tout en amenant l'apprenant à identifier à la fois des propriétés d'objets et des résultats de structure, donc à faire fonctionner la dialectique objets-structures. Cette dernière étant vecteur de simplification et de compréhension (les ressorts des preuves), nous faisons l'hypothèse que la mise en regard des objets et structures conduira, à l'opposé d'une énumération structurée de différentes œuvres, à un éclairage des raisons d'être des praxéologies structuralistes.

Les caractéristiques intéressantes suivantes du média-milieu permettent d'appuyer notre stratégie :

- Le média-milieu est susceptible de servir de milieu car les réponses ne sont pas institutionnalisées et sont en partie incomplètes ; ce n'est pas une fiction didactique mais un pan de réalité. Le média-milieu favorise la dévolution de la question Q car elle a déjà été réalisée au sein du forum ; les contributeurs ont le statut de pairs.
- Sans le média-milieu, le milieu est trop pauvre pour produire une résolution de Q à l'aide des praxéologies visées ; l'enrichissement du milieu par le média-milieu permet la discussion de conceptions erronées d'une part et de praxéologies avancées d'autre part.

Afin d'outiller les étudiants dans l'analyse du media-milieu, par petits groupes de 3-4 étudiants, le professeur organise le travail via l'introduction d'un contrat spécifique d'annotation par des sigles portant sur la compréhension (?), la vérité des assertions (V et F), la validité des preuves (repérer une erreur E et la corriger si c'est possible, compléter par un argument manquant X, valider la preuve CQFD), l'appropriation et le questionnement (Q et R pour respectivement une question ou une remarque suscitée par un passage donné). La réponse à la question Q_M constitue une phase de synthèse relativement à cette phase d'analyse. L'enseignant conserve une posture de directeur d'étude tout au long du PER.

Alors que l'enseignement de l'algèbre abstraite s'apparente souvent à une visite d'œuvres dont l'appropriation par les étudiants est difficile, un tel usage des forums serait-il une piste valable pour que « la soumission à l'autorité cède la place à une culture partagée du questionnement » (Chevallard, 2008) ?

6.3. Discussion

Le but de ce dernier paragraphe est de discuter les potentialités d'une telle approche. La notion importante que nous nous proposons d'examiner est celle de topos (Chevallard, 2002) : l'algèbre abstraite s'apparente souvent à une visite d'œuvres parce que l'étudiant se retrouve incapable d'accomplir les gestes d'étude qui sont attendus de lui, si bien que le *topos investi* par l'étudiant par rapport au *topos offert* à l'étude est très faible. La praxéologie d'annotation du média-milieu est-elle susceptible de produire une « augmentation du topos » des étudiants, du moins du topos collectif ?

Une des difficultés de l'enseignement de l'algèbre abstraite consiste justement en la dévolution des praxéologies structuralistes, qui mobilise comme on a pu le constater des gestes spécifiques. Ceci conduit de nombreux enseignants à évaluer le savoir sur la base de types de tâches qui s'apparentent à des applications directes du cours ou à des questions traitées en travaux dirigés. Nous faisons l'hypothèse que la répartition topogénétique entre les groupes d'étudiants et l'enseignant effectué dans le PER d'annotation du média-milieu réalise un certain équilibre : il n'est pas attendu des étudiants de reconstruire une preuve complète qui résulterait en un topos offert trop important comparé aux capacités d'investissement par les étudiants, de sorte que l'enseignant se trouverait placé dans la fonction de correcteur d'exercices ; à l'inverse, le milieu est suffisamment ouvert pour placer les étudiants dans une posture active et non en simples lecteurs de preuves.

Nous avons cependant constaté, au niveau des gestes accomplis par les participants du forum, que les niveaux de généralité les plus élevés (relatifs à $Q_{bs} = Q_{x,1}{}^{g}$ et $Q_{bs}{}^{g}$) ne sont pas investis par x. En sera-t-il de même lors de ce second PER ? Seule la réalisation de l'ingénierie en classe permettra d'y répondre. Nous pouvons cependant apporter quelques éléments d'analyse a priori qui mettent en évidence l'importance d'un travail didactique approfondi au niveau des contenus mathématiques des situations proposées à l'étude.

Nous avons souligné qu'il s'exerce toujours en algèbre abstraite une tension entre l'emploi de méthodes élémentaires (dans notre cas, liées à l'arithmétique des entiers) et l'attaque des conjectures par des points de vus conceptuels et généralisateurs, ce qui constitue un changement de paradigme. Un argument d'économie pousse dans un sens tandis qu'un argument de simplification pousse dans l'autre, autant que le caractère simplificateur puisse être rendu visible. Est-ce le cas dans le contexte de l'activité autour des décimaux ?

L'apport de $A_{x,1} = A_{x,0}{}^{g}$ par rapport à $A_{x,0}$ ne se situe pas au niveau de la simplification de la preuve mais de la compréhension mathématique du phénomène, c'est-à-dire des « ressorts » de la preuve : l'existence d'une preuve générale utilisant uniquement la propriété que **D** est un sous-anneau de **Q** est considérée par le mathématicien structuraliste comme une mise en évidence des « raisons profondes » à l'origine du phénomène. Dans la tension entre logique de l'économie et apports intellectuels, l'étudiant est-il sensible à cet argument ? Fait-il sens pour lui ? Par ailleurs, Q_{bs} et $Q_{bs}{}^{g}$ portent sur deux assertions erronées, si bien que l'on peut se poser la question de la valeur que donne un étudiant à un raisonnement visant à démontrer qu'une assertion est fausse ainsi qu'à une méthode de pensée qui conduit à énoncer des généralisations abusives. Ceci suscite de façon évidente un problème de contrat. Notons qu'il existe cependant des généralisations qui sont des assertions vraies et mathématiquement éclairantes, comme celles décrites en fin du paragraphe 5.2. Ces dernières n'ayant pas émergé sur le forum, il est probable que leur introduction dans le milieu nécessite un travail didactique supplémentaire.

7. Conclusion

Nous avons esquissé dans cet article une analyse praxéologique des savoirs enseignés en algèbre abstraite en appui sur une analyse épistémologique de la pensée structuraliste. Nous avons proposé des modalités possibles pour une « pédagogie de l'enquête » en algèbre abstraite et discuté les difficultés que l'on peut anticiper. Ce travail fournit ainsi des pistes pour se diriger vers un paradigme du questionnement du monde en algèbre abstraite dans un contexte actuel où le paradigme monumentaliste dominant présente un constat d'importantes difficultés rencontrées par les étudiants dans leur apprentissage.

Le PER d'annotation du média-milieu dont il a été question dans cet article a été expérimenté en classe. Nous avions annoncé lors du congrès CITAD5 que les résultats obtenus faisaient l'objet d'un article en cours. Ce dernier étant publié à ce jour (Hausberger, 2016b), nous y renvoyons le lecteur pour la présentation et la discussion des résultats. Cette première expérimentation et les apports théoriques présentés ici ouvrent de nombreuses perspectives : l'investigation des praxéologies structuralistes en algèbre abstraite est à poursuivre, en raffinant encore la décomposition des gestes et démarches structuralistes, en appui d'une part sur l'épistémologie contemporaine et d'autre part sur l'étude de manuels, et particulièrement de manuels anciens au sein desquels la méthodologie structuraliste n'a pas encore été naturalisée. Le rôle des dialectiques particulier-général et objets-structures est à approfondir, notamment leurs modalités de fonctionnement dans les cours et les manuels. Il s'agit ensuite de développer des ingénieries se donnant pour objectif de faire fonctionner ces dialectiques. Le travail d'ingénierie sur les PER engageant des savoirs formels abstraits à l'Université en appui sur le contenu de forums est une piste prometteuse qui nécessite également le développement d'outils théoriques afin d'en évaluer l'impact sur les apprentissages.

Références

Bourbaki, N. (1998). L'architecture des mathématiques. Dans F. Le Lionnais (Éd), *Les grands courants de la pensée mathématique* (pp. 35-47). Paris : Hermann. (Ouvrage original publié en 1948)

Chevallard Y. (2002). Organiser l'étude. 1. Structures & fonctions. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Éds), *Actes de la XIe école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 3-32). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (2008). Un concept en émergence : la dialectique des médias et des milieux. Dans G. Gueudet & Y. Matheron (Éds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2007* (pp. 344-366). Paris : IREM de Paris 7 et ARDM.

Chevallard, Y. (2011). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. Dans C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck & F. Wozniak (Éds), *En amont et en aval des ingénieries didactiques, 15e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 81-108). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2013). L'évolution du paradigme scolaire et le devenir des mathématiques : questions vives et problèmes cruciaux. Dans A. Bronner, C. Bulf, C. Castela, J.-P. Georget, M. Larguier, B. Pedemonte, A. Pressiat & E. Roditi (Eds), *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage, 16e école d'été de didactique des mathématiques* (pp.85-120). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Dieudonné, J. (1987). *Pour l'honneur de l'esprit humain : les mathématiques aujourd'hui*. Paris : Hachette.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques 7*(*2*), 5-31.

Durand-Guerrier, V., Hausberger, T. & Spitalas, C. (2015). Définitions et exemples : prérequis pour l'apprentissage de l'algèbre moderne. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 20*, 101-148

Guin, D. (2013). *Algèbre II : Anneaux, Modules et Algèbre multilinéaire*. Collection Enseignement Sup L3M1M2. Les Ulis : EDP Sciences.

Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary–tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics 67*(*3*), 237-254.

Hasse, H. (1930). Die moderne algebraische Methode. *Jahresbericht der DMV 39*, 22-34.

Hausberger, T. (2012) Le challenge de la pensée structuraliste dans l'apprentissage de l'algèbre abstraite : une approche épistémologique. Dan*s Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21*[e] *siècle, Actes du colloque EMF2012* (pp. 425-234). Genève : Université de Genève.

Hausberger, T. (2013) On the concept of (homo)morphism: a key notion in the learning of abstract algebra. Dans B. Ubuz, C. Haser & M.-A. Marioti (Eds), *Proceeding of the Eighth Congress of the European Society of Research on Mathematics Education* (pp. 2346-2355). Ankara (Turkey) : Middle East Technical.

Hausberger, T. (2016a). A propos des praxéologies structuralistes en Algèbre Abstraite. Dans E. Nardi, C. Winsløw et T. Hausberger (Eds). *Proceedings of the First Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (pp. 296-305). Montpellier : University of Montpellier and INDRUM.

Hausberger, T. (2016b). Comment développer des praxéologies structuralistes en algèbre abstraite ?*, Recherches en Didactique des Mathématiques 36*(*1*), 97-142.

Hausberger, T. (2016c). Dimensions collaboratives et dialectique média-milieu : : un questionnement didactique autour d'une retranscription d'échanges sur un forum de mathématiques. Dans G. Gueudet & Y. Matheron (ÉEds), *Actes de la 18*[e] *École d'été de Didactique des Mathématiques* (pp. 613-622, Cédérom). Grenoble : : La Pensée Sauvage.

Lajoie, C. & Mura, R. (2004). Difficultés liées à l'apprentissage des concepts de sous-groupe normal et de groupe quotient, *Recherches en Didactique des Mathématiques 24*(*1*), 45-80.

Leron, U., & Dubinsky, E. (1995). An abstract algebra story. *American Mathematical Monthly 102*(*3*), 227-242.

Nardi, E. (2000). Mathematics Undergrates' Responses to Semantic Abbreviations, 'Geometric' Images and Multi-level Abstractions in Group Theory. *Educational Studies in Mathematics 34*, 169-189.

Perrin, D. (1996). *Cours d'algèbre*. Paris : Editions ellipses.

Robert, A. (1987). De quelques spécificités de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement post-obligatoire. *Cahiers de didactique des mathématiques n°47*. Paris : IREM de Paris 7.

Rogalski M. (1995) Que faire quand on veut enseigner un type de connaissances tel que la dialectique outil-objet ne semble pas marcher et qu'il n'y a apparemment pas de situation fondamentale ? L'exemple de l'algèbre linéaire. *Séminaire DidaTech n°169* (pp. 127-162). Grenoble : Université Joseph Fourier.

Winsløw, C. (2006). Transformer la théorie en tâches : la transition du concret à l'abstrait en analyse réelle. Dans R. Rouchier et al. (Eds), *Actes de la 13*[e] *Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (pp. 1-12). Cédérom. Grenoble : La Pensée Sauvage.