ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i1p382-394

Análisis a posteriori de un REI-FP como herramienta de formación del profesorado

IGNASI FLORENSA[1]

MARIANNA BOSCH[2]

JOSEP GASCÓN[3]

Abstract. We present the development of an on-line teacher education course entitled "Nature of mathematical thinking". The main goal of the course is to provide teachers with tools permitting to carry out an epistemological and didactic questioning using as a main tool the reference epistemological model associated to a study and research path (SRP). The experience of the course allows us to explore the open questions in Florensa, Bosch and Gascón (2015) about the need of new epistemological tools to manage study processes as well as the relation between SRP and reference praxeological models.

Resumen. Se presenta el desarrollo de un curso en línea de formación del profesorado titulado "Naturaleza del pensamiento matemático". El curso tiene como objetivo aportar herramientas para el cuestionamiento epistemológico y didáctico utilizando como principal herramienta el modelo praxeológico de referencia asociado a un recorrido de estudio e investigación (REI). La experiencia del curso nos sirve de base para explorar las cuestiones abiertas expuestas en Florensa, Bosch y Gascón. (2015) sobre la necesidad de nuevas herramientas epistemológicas para la gestión de procesos de estudio, así como sobre las relaciones entre REI y modelos praxeológicos de referencia.

1. Introducción

1.1. Investigación sobre formación del profesorado, PCK y MKT

Recientemente el *Education Committee of the European Mathematical Society* (2012) ha llevado a cabo una revisión sobre el conocimiento que debería tener el profesorado. Los *Solid Findings in Mathematics Education on Teacher Knowledge* destacan que los profesores necesitan un alto nivel de *content knowledge* (CK), pero que el CK no es suficiente.

De hecho, muchos investigadores como Guy Brousseau (1997) han puesto de manifiesto la necesidad de más conocimientos que los matemáticos para enseñar matemáticas. Lee S. Shulman (1987) y la noción de *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) es uno de los enfoques teóricos que establecen qué conocimientos ajenos a los considerados como matemáticos son necesarios. El PCK se puede entender como una amalgama de conocimientos pedagógicos y matemáticos. El estudio de los procesos de enseñanza no puede tener lugar sin considerar de manera explícita el contenido a enseñar y aprender.

[1] Escola Univ. Salesiana de Sarrià (EUSS), Barcelona, Spain iflorensa@euss.es
[2] IQS School of Management, Univ. Ramon Llull, Barcelona, Spain – marianna.bosch@iqs.url.edu
[3] Dep Matemàtiques, Univ. Autònoma de Barcelona, Barcelona, Spain – gascon@mat.uab.cat

El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza
Eje 4. *La formación docente ante el reto de la profesionalización del oficio de profesor: aportes de la TAD*

Tomando el PCK como punto de partida, Deborah L. Ball y sus colaboradores tratan de aclarar el concepto y generan uno nuevo: el *Mathematical Knowledge for Teaching (*MKT) (2008). Este trabajo trata de responder de manera explícita a la pregunta: ¿Qué conocimientos matemáticos, habilidades y características son necesarias para gestionar las tareas y los problemas de la enseñanza de las matemáticas? El resultado principal son los seis dominios del MKT y la necesidad de medirlo.

Una importante contribución del MKT es el enriquecimiento de lo que se suele pensar como « las matemáticas (escolares) » con nuevos componentes relacionados con la actividad (dificultades, conceptos erróneos) de los profesores y estudiantes. La perspectiva planteada por el MKT supone que las « matemáticas » no son sólo las matemáticas a enseñar ni las matemáticas que realmente se enseñan. De esta forma, se rompe con la concepción tradicional de los conocimientos matemáticos como algo que los maestros ya saben y sólo tienen que transmitir. Esta propuesta incluye una dimensión matemática específica en la experiencia profesional de los maestros. Sin embargo, incluso si la investigación sobre la base del MKT parece poner el análisis del conocimiento en el núcleo de la formación del profesorado y enriquece su concepción tradicional, siempre se limita al « conocimiento de los maestros ». El MKT no cuestiona la propia naturaleza, selección y organización de los conocimientos necesarios para ser enseñados y, por lo tanto, no se propone la consiguiente construcción de concepciones alternativas que deben tomarse como referencia.

1.2. La TAD y la formación del profesorado

Este cuestionamiento es precisamente lo que la TAD se propone hacer. En este marco, el problema de la formación del profesorado se abordó en primer lugar, durante la década de 1990, en la aplicación de los *séminaires de didactique* durante el segundo año de la formación de profesores en el IUFM de Marsella (Chevallard 2006, Chevallard, 2007). Estos cursos destacan por su intento de incluir el paradigma del « cuestionamiento del mundo » en la formación docente. Se basan en un trabajo colectivo orientado a estudiar las preguntas profesionales planteadas, precisamente, por los profesores en formación. La recogida de más de 7000 preguntas planteadas por los profesores-estudiantes durante el período 2000/2006 (Cirade, 2006) muestra que muchas de ellas implican aspectos matemáticos que no se pueden reducir al MKT.

Durante estos últimos años, la formación del profesorado en el marco de la TAD ha evolucionado desde el estudio de las *praxeologías de la profesión docente* (Cirade, 2006) hacia el diseño y la implementación de lo que llamamos *recorridos de estudio e investigación para la formación del profesorado* (REI-FP) (Ruiz Olarria, 2015). Los REI-FP son un dispositivo de formación basado en la estructura de los *recorridos de estudio e investigación* (REI) y la combinación de un cuestionamiento teórico y práctico de la actividad matemática escolar (Barquero, Bosch y Romo 2015; Ruiz-Olarria, 2015). Su objetivo es integrar el análisis praxeológico matemático con el didáctico, incluyendo el diseño de una propuesta de enseñanza, el estudio de sus condiciones de existencia y los análisis *in vivo* y *a posteriori*. Este dispositivo de formación se estructura en cinco módulos:

M_0: *Explicitación de la razón de ser del REI-FP*. Se parte de una pregunta generatriz del tipo: « ¿Cómo enseñar un contenido matemático específico? ». Esta se pretende responder, al menos parcialmente, al final del proceso de estudio. Este primer módulo se desarrolla mediante la búsqueda de información disponible incluyendo los resultados de la investigación, las directrices del currículo y otras propuestas de innovación. M_0 se mantiene abierto durante todo el REI-FP y recoge los resultados de los otros módulos.

M_1: *Vivir un REI*. Se propone a los profesores actuar como estudiantes de un REI que se presenta como una posible respuesta a M_0. El objetivo es hacer que los profesores se familiaricen con una actividad matemática normalmente desconocida y que podría existir en cierta medida en un aula ordinaria. Los formadores actúan como « profesores » del REI, guiando el proceso de estudio e investigación con un contrato didáctico mucho más abierto que el tradicional.

M_2: *Analizar el REI vivido*. Una vez que los estudiantes han vivido un REI, se les pide analizarlo desde una perspectiva praxeológica, didáctica y ecológica, centrándose en el problema de las condiciones y las limitaciones existentes para implementar este tipo de dispositivos de enseñanza en las instituciones escolares.

M_3: *Diseño de un REI* para un grupo específico de estudiantes considerando el trabajo realizado en las fases anteriores y un determinado conjunto real de restricciones institucionales.

M_4: *Experimentación, gestión y análisis in vivo* y *a posteriori* del REI diseñado.

1.3. Un REI-FP sobre modelización matemática

El curso que se presenta en este trabajo se realizó en marzo de 2015 con el título *Naturaleza del pensamiento matemático* y se centra en el análisis epistemológico de la actividad matemática desarrollada durante un REI-FP en el que participaron los estudiantes en octubre de 2014. Ambos cursos son parte de un Master en Educación Matemática en línea coordinado por el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA) de México.

El curso inicial se presenta en detalle en B. Barquero et al. (2015). El REI-FP vivido tomó como cuestión generatriz la siguiente:

¿Cómo enseñar modelización matemática y regresión en secundaria?

Durante el desarrollo del M_1, los estudiantes vivieron un REI basado en la pregunta generatriz Q_0:

¿Cómo hacer un pronóstico de ventas para una empresa textil, teniendo en cuenta las ventas semanales en varias tiendas y la evolución de los beneficios?

A continuación, los estudiantes tuvieron que adaptar el REI para que un colega lo pudiera implementar en una clase real. El análisis de las diferencias existentes entre el REI « vivido » y el « planificado » puso de manifiesto las limitaciones que existen en el trabajo diario del profesorado sin que sean conscientes de ellas. Finalmente, los profesores-estudiantes experimentaron y adaptaron el REI en sus clases, antes de preparar un análisis praxeológico matemático-didáctico y ecológico de todo el proceso.

2. Cuestión de investigación

El curso: *Naturaleza del pensamiento matemático* se diseñó tomando como punto de partida las preguntas abiertas expuestas en Ignasi Florensa et al. (2015) con el fin de obtener material empírico y validar algunas de las hipótesis formuladas de manera preliminar. Estas preguntas se sitúan en la relación entre el Modelo Praxeológico (o epistemológico) de Referencia (MPR) que se utiliza para diseñar y analizar el REI y las necesidades de « herramientas epistemológicas » para los profesores y estudiantes que llevan a cabo un REI. Las preguntas pueden formularse como sigue:

- ¿Qué grado de explicitud del MPR debe adoptarse en el análisis, diseño e implementación de procesos de enseñanza y aprendizaje? ¿Depende de los participantes de las comunidades a las que se dirige (estudiantes, profesores, matemáticos)? Concretamente, ¿qué forma material puede tomar un MPR?: ¿Arborescencia de praxeologías? ¿Mapa de preguntas y respuestas? ¿Esquema herbartiano?
- ¿Cómo transformar un MPR dado, en diferentes REI que puedan vivir en diferentes instituciones? ¿Cómo ponerlo a disposición de las instituciones escolares, en particular a disposición de la profesión de los profesores?

¿Qué nuevos conceptos o herramientas necesitan los maestros y los estudiantes para describir y gestionar la dinámica de la actividad matemática que se llevará a cabo en los procesos de estudio (análisis *in vivo)?* ¿Cómo hacer que estén disponibles en la institución docente y para los participantes en el proceso didáctico?

¿Cómo tener en cuenta la interrelación entre el MPR y los fenómenos didácticos que aparecen en la aplicación de estas nuevas organizaciones didácticas?

3. El curso: Naturaleza del pensamiento matemático

3.1. Las matemáticas cómo actividad humana

El curso presentado es una de las asignaturas pertenecientes a la Maestría en Educación Matemática del CICATA. Este máster existe desde el año 2000 y está dirigido a maestros en activo de toda América Latina. Todas las actividades de la Maestría se llevan a cabo en línea.

Los autores de este trabajo colaboran con CICATA en un proyecto de investigación sobre la aplicación de los REI-FP. Consideramos el curso titulado *Naturaleza del pensamiento matemático* como una actividad interesante permitiendo experimentar sobre las relaciones entre la epistemología y la didáctica y para introducir a los profesores-estudiantes en la dimensión epistemológica de los análisis didácticos. El título podría verse como una restricción forzando la adopción de un enfoque cognitivo para el curso. Nosotros nos aprovechamos del título con tal de abordar la cuestión de las diferentes formas posibles de concebir las matemáticas y su influencia sobre las prácticas de los maestros. Nuestra propuesta fue incluir el concepto de « pensamiento matemático » en un marco más amplio: las matemáticas entendidas como una actividad humana y modelizadas como praxeologías.

Esta perspectiva más amplia, sin negar un aspecto cognitivo en las matemáticas, incluye muchos otros aspectos tales como la necesidad de cuestionar el saber a enseñar, la dimensión colectiva e institucional de cualquier actividad humana, la naturaleza dinámica de la generación de conocimiento, entre otros.

3.2. Emancipación epistemológica de la concepción dominante sobre las matemáticas en la institución escolar

El objetivo del curso es proporcionar a los profesores-estudiantes herramientas propias de la TAD para llevar a cabo un análisis de la actividad matemática que les permita emanciparse de la concepción escolar dominante sobre las matemáticas. Por eso, la noción de MPR y el esquema herbartiano son cruciales para nosotros como educadores y diseñadores, a pesar de que ambas nociones no se definían explícitamente en el curso. Lo que se trabajó en detalle es el MPR concreto construido durante el curso. Con este objetivo, se les pide a los maestros-estudiantes construir una representación parcial del MPR basada en un diagrama que recoge las preguntas y respuestas que aparecen durante el REI y que llamamos mapas de preguntas-respuestas. El MPR subyacente de la actividad matemática llevado a cabo durante el módulo M_1 es el MPR presentado en Lidia Serrano (2013) y que se basa en el proceso de modelado descrito por Berta Barquero (2009).

Hasta la fecha, la noción de MPR se ha utilizado como una herramienta de investigación para proporcionar construcciones alternativas de los contenidos matemáticos que se van a impartir. Se han formulado como secuencias o arborescencias de praxeologías (García 2005, Sierra 2006, Ruiz-Munzón 2009) en el que el paso de una a la otra está motivado por cuestiones derivadas de las limitaciones de los primeros. La descripción del REI en términos generales establecidos por el esquema herbartiano destaca la dinámica del proceso de estudio haciendo hincapié en el papel de las cuestiones como el origen de la construcción de respuestas (praxeologías).

De acuerdo con la propuesta de Carl Winslow, Yves Matheron y Alain Mercier (2013), para el curso presentado se adoptaron los mapas de preguntas-respuestas como la representación material del REI y, por lo tanto, dichos mapas actuaron como MPR parcial. El REI es un proceso de investigación y por lo tanto parece apropiado pedir a los profesores-estudiantes modelizar el conocimiento matemático movilizado como una secuencia de preguntas (a partir de una « cuestión generatriz ») y sus respuestas derivadas. Estos mapas se han utilizado en múltiples contextos: desde el ámbito de la investigación con el fin de analizar los trabajos de los estudiantes (Jessen, 2014) hasta cursos de formación de maestros, donde los profesores los utilizan para analizar su propio trabajo (Ruiz-Olarria 2015; Barquero et al 2015). Con el fin de enriquecer esta descripción, los mapas propuestos en este curso incorporan una descripción de la dialéctica *medio-media* (Chevallard 2009).

El hecho de considerar las secuencias de preguntas y respuestas como modelo de conocimiento que se genera no es nuevo. Tiene sus bases en los diálogos socráticos y se ha vuelto a considerar, por ejemplo, en las teorías de programas de investigación científica de Lakatos. Es destacable el uso de esta aproximación en el *Interrogative Model of Inquiry* (IMI) iniciado por Hintikka (1982). El IMI modeliza los procesos de investigación como juegos, donde un investigador (o un grupo de investigadores) somete a una fuente de información (la naturaleza, una base de datos, una comunidad de investigadores) a una serie de preguntas estratégicamente organizadas (Hakkarinen y Sintonen 2002). De hecho, Sintonen (2004) establece que cualquier programa de investigación puede ser modelizado utilizando el IMI.

En algunos trabajos, se propone una clasificación en términos del « tipo de preguntas » y del « tipo de respuestas », de manera que se complementa el modelo de Hintikka. Por ejemplo, Sintonen (2004) propone clasificar las preguntas como « gran pregunta inicial », « grandes preguntas » y « pequeñas preguntas ». Otro de los criterios de clasificación es propuesto por Hakkarainen y Sintonen (2002) y se hace en términos de « cuestiones principales », « preguntas de investigación subordinadas » y « preguntas tipo necesito entender ».

Otro aspecto considerado en el diseño del curso es que los profesores sean conscientes de la importancia de los marcos teóricos para elaborar su propia concepción de las matemáticas, en lugar de asumir los modelos dominantes sin cuestionarlos.

3.3. Descripción del curso

La comunicación y el intercambio de información entre profesores y estudiantes (y entre estudiantes) tienen lugar en una plataforma Moodle. La página web incluye al inicio del curso un vídeo de bienvenida de 4 profesores, así como el objetivo del curso, y una breve descripción de las cuatro actividades con su programación temporal. El curso tiene una duración de 4 semanas. Cada semana se lleva a cabo una actividad diferente. Un foro general abierto durante todo el curso está disponible para que los estudiantes planteen cualquier pregunta.

Cada actividad tiene una sección específica en la plataforma y se presenta a través de diferentes formatos: vídeos, documentos de texto o entradas en foros.

El curso se divide en cuatro actividades principales. En la primera actividad (ver figura 1), se pide a los estudiantes trabajar en cinco equipos y generar el mapa de preguntas-respuestas que surgió cuando vivieron el módulo M_1 como estudiantes. El mapa generado se utiliza como una herramienta de análisis durante las actividades posteriores. Con el fin de crear el mapa de preguntas-respuestas, los estudiantes tienen explicaciones específicas y material de apoyo de los formadores. En primer lugar, a los estudiantes se les proporciona un borrador del inicio de un mapa de cuestiones y respuestas fundamentado en el MPR de los profesores. Este inicio de mapa de cuestiones y respuestas elaborado por los formadores recoge las cuestiones y respuestas obtenidas en el análisis del foro en línea del curso anterior. En segundo lugar, se proporcionan artículos científicos en los que los mapas de pregunta-respuesta se presentan como una herramienta de análisis epistemológico (Jessen, 2014; Barquero, Bosch, y Gascón, 2013). Una vez que los estudiantes presentan una primera versión del mapa, los educadores ilustran el uso de la dialéctica *medio-media* (Chevallard, 2006a) como un primer paso para que los estudiantes completen su mapa. La introducción de la dialéctica se hace con extractos de la conferencia de Chevallard con ocasión de la aceptación de un Doctorado Honoris Causa en Córdoba, Argentina en 2013.

La segunda actividad (ver figura 2) se centra en el uso de los mapas de preguntas-respuestas para analizar los documentos curriculares. Durante la primera fase de la actividad se pide a los estudiantes recoger documentos tales como libros de texto, extractos de los planes de estudios, todos relacionados con el ámbito de las « funciones » y la « regresión ». Estos dominios aparecen en el primer curso cuando los profesores diseñan y experimentan el REI con sus alumnos. La segunda fase consiste en el análisis de los documentos recopilados y su comparación con el REI vivido y experimentado. Se propone este análisis en términos de praxeologías, su articulación y su razón de ser. Otro aspecto, que se pide analizar, es el grado de conexión entre el ámbito de las funciones y de la regresión.

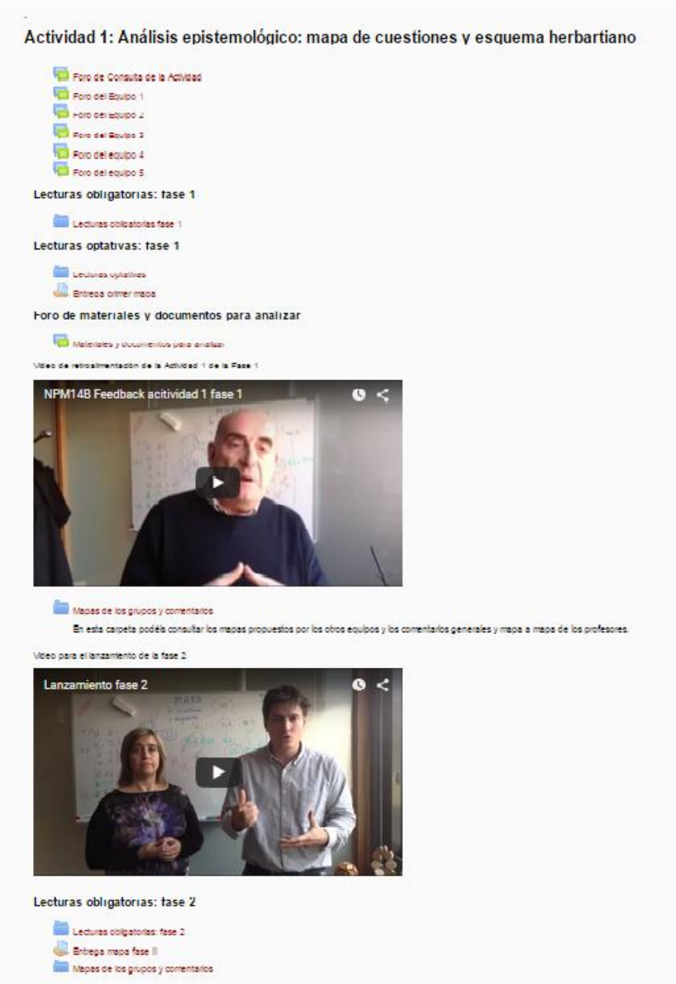

Figura 1. Organización del Moodle relativa a la primera actividad

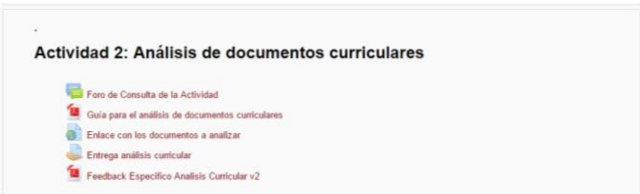

Figura 2. Organización del Moodle relativa a la segunda actividad

En la tercera actividad (ver figura 3) se pide a los estudiantes ampliar el mapa de la primera actividad o proponer nuevas preguntas generatrices y sus mapas de preguntas-respuestas. El principal objetivo es promover por parte de los estudiantes la introducción de nuevas preguntas y respuestas con el fin de incluir todos los requisitos del plan de estudios en los campos de funciones y regresiones no considerados previamente.

Figura 3. Organización del Moodle relativa a la tercera actividad

La última actividad (ver figura 4) se centra en poner de relieve la importancia de tener una noción explícita de la concepción de la « Naturaleza del pensamiento matemático », y más concretamente de la propia actividad matemática (es decir un MPR explícito) al abordar las cuestiones de investigación didáctica. La actividad incluye el análisis de un libro de texto basado en los principios de la socioepistemología (Cantoral y Montiel, 2001) y su comparación con los principios de la TAD.

Figura 4. Organización del Moodle relativa a la cuarta actividad

Al final del curso se pide a los estudiantes rellenar una encuesta con el fin de recoger sus opiniones. La encuesta se estructura en cinco capítulos en las que se pide su opinión sobre: la organización del curso, el trabajo en equipo, el contenido y la estructura, las actividades y aspectos generales. Los cuatro primeros (preguntas de la cuatro a la nueve) aspectos son evaluados mediante varias preguntas utilizando una escala de Likert de cinco niveles (desde totalmente en desacuerdo a totalmente de acuerdo). El último elemento permite a los estudiantes escribir sugerencias y comentarios libres. Trece de los 16 estudiantes respondieron la encuesta completa.

4. Resultados

4.1. Mapas de cuestiones y respuestas

Como era de esperar, los mapas de pregunta-respuesta construidos por los estudiantes durante la primera actividad y complementados durante el curso presentan duplas de preguntas-respuestas similares aunque aparecen diferentes recorridos en cada mapa. De hecho, los mapas de todos los equipos comparten la parte inicial: todos tomaron la propuesta de los profesores como propia, sin modificar o incorporar preguntas o respuestas. Este fenómeno (ciega aceptación de la propuesta del maestro) puede ser visto como un efecto del contrato didáctico actuando entre los estudiantes y profesores.

Los cinco mapas presentan dos ramas principales: una incluyendo preguntas relacionadas con las familias de funciones y otra con preguntas relacionadas con la regresión. Las dos ramas no se conectaron en tres de los mapas, mientras que un grupo presentó una conexión en la aplicación software de la regresión.

Un punto destacable es la inclusión del trabajo « extra-matemático ». De hecho, dos de los grupos trabajaron sobre cuestiones relativas a aspectos tales como considerar nuevas variables como el PIB, la evolución salarial o la necesidad de definir las previsiones a corto y largo plazo. Estas dos preguntas jugaron un papel importante en los debates de la primera actividad.

Tres de los equipos tuvieron algunas dificultades al establecer una jerarquía entre las preguntas. De hecho, aspectos tales como: ¿Qué pregunta apareció primero?, ¿qué preguntas de las propuestas por uno de los miembros del equipo se toman en consideración por parte del equipo?, ¿qué ramas se abandonan?, eran problemáticas debido a la falta de criterios que permitieran clasificar las respuestas y preguntas. Los mapas de preguntas y respuestas superan el tiempo cronológico y establecen una nueva « cronología basada en la investigación », conocida como la c*hronogenesis*. Un criterio explícito de jerarquía permitiría establecer y describir esta nueva cronología. Consideramos que las cuestiones surgidas desempeñan diferentes funciones dependiendo de muchos factores.

La segunda fase del trabajo con los mapas invitaba a los estudiantes a incorporar la dialéctica *medio-media* en los mapas de preguntas-respuestas. Aunque la dialéctica *medio-media* es una noción difícil, los equipos la incorporaron sin grandes dificultades. Un debate interesante apareció en un equipo cuando analizaban la doble función como medio y media simultáneamente del software utilizado. Otro aspecto destacable es la facilidad para encontrar información en el *media* en comparación con las dificultades que los profesores en formación tuvieron al incorporar esta información al *medio*.

4.2. Papel de las matemáticas escolares

El análisis de los documentos de la matemática escolar, como currículo y libros de texto, realizado en la segunda actividad reveló hechos importantes. En primer lugar, la pobreza de las praxeologías escolares: el bloque teórico-tecnológico está ausente en los libros de texto que se limitan a proponer tareas mecánicas y algorítmicas. Un segundo hecho se hace explícito: existe un alto grado de desconexión entre bloques de contenidos, especialmente entre las funciones y la regresión ya que se consideran tradicionalmente pertenecientes a diferentes « temas ».

Otro aspecto interesante que surgió durante el análisis de documentos es la gran brecha existente entre las intenciones que se recogen en los programas tales como « trabajo matemático integrado » y « actividades de investigación » y los ejercicios y problemas propuestos.

4.3. Papel del enfoque teórico

Durante la tercera actividad, los estudiantes identificaron que el MPR adoptado desempeña un papel crucial en el diseño y gestión de procesos de enseñanza y aprendizaje. Especialmente destacable, es el informe de uno de los equipos que analizó algunos aspectos del enfoque socioepistemológico utilizando la dialéctica *medio-media*. Otro grupo puso de manifiesto las contradicciones encontradas en el libro de texto cuando trata de incorporar un enfoque funcional de la modelización matemática: realmente se centra en el momento del trabajo de la técnica.

Así, podemos ver el tipo de análisis crítico que la apropiación de las herramientas de la TAD permitió desarrollar.

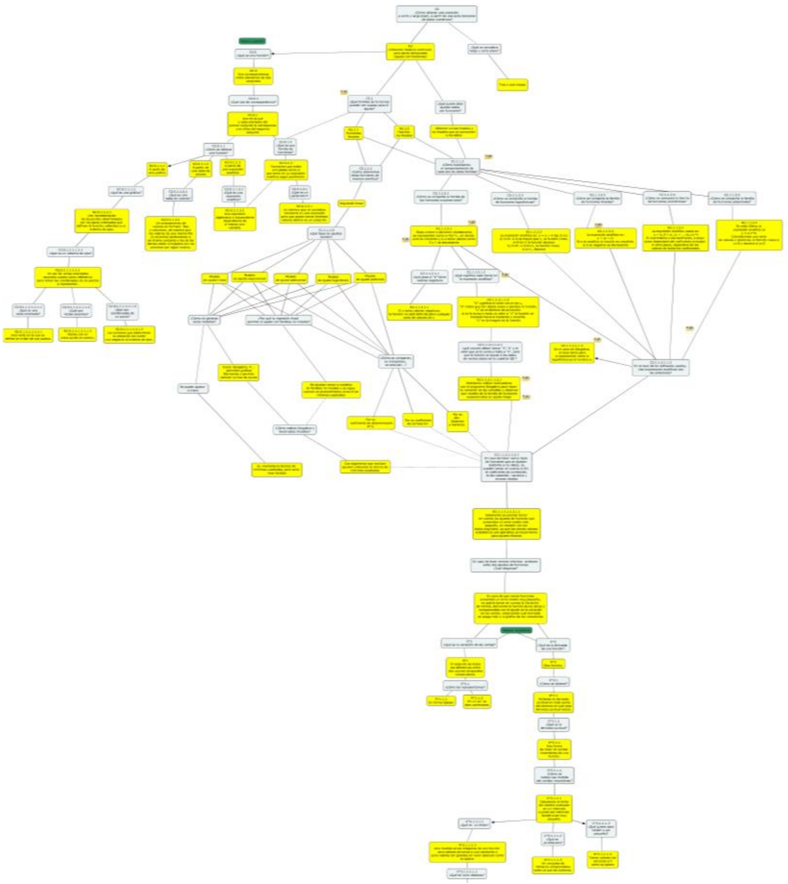

Figura 5. Ejemplo de mapa de pregunta-respuesta de uno de los grupos (para ver en detalle acceder a https://goo.gl/wgCVRQ)

5. Discusión

El uso de los mapas de pregunta-respuesta parece ser una herramienta potente para que los maestros analicen el conocimiento movilizado durante un proceso de estudio. De hecho, la construcción de los mapas es bastante natural para ellos para describir la trayectoria seguida durante la investigación. Por otra parte, mediante el uso de los mapas los estudiantes son capaces de describir aspectos matemáticos que normalmente pasan desapercibidos en las matemáticas escolares. Un buen ejemplo es la inclusión de preguntas contextuales relacionadas con el modelo.

Para los investigadores, los mapas también aparecen como una buena herramienta para conectar los diferentes bloques de contenidos. Sin embargo, a pesar de la experiencia real donde regresión y funciones fueron co-utilizadas, los maestros mostraron grandes dificultades para aceptar vías alternativas en comparación con las oficiales. Al final del curso, sólo un equipo conectó realmente el trabajo con la regresión y las familias de funciones. Podemos atribuir este confinamiento en temas desconectados a la fuerza del fenómeno didáctico etiquetado por Chevallard como « autismo temático » (Barbé, Bosch, Espinoza y Gascón 2005).

La incorporación de la dialéctica *media-medio* muestra que los estudiantes lograron incorporar esta noción sin mucho problema, a pesar de que consideraban esta fase la parte más difícil del curso. En segundo lugar, el hecho de obligar a los maestros a explicitar sus fuentes de información confirma que normalmente se mantienen dentro del universo matemático escolar y, consecuentemente, se concluye que es muy importante proporcionarles herramientas de emancipación.

Teniendo en cuenta los mapas generados como herramientas para el análisis didáctico, podemos decir que se revelan muy útiles cuando se utilizan como contrapunto de la matemática escolar. De hecho, la forma en que la actividad matemática se describe pone de manifiesto muchas de las restricciones y limitaciones de la institución escolar. Esto se debe a que los mapas incluyen una movilización dinámica de conocimientos, muestran caminos no fructíferos o abandonados, y el papel de los media y del medio. Estos aspectos están totalmente ausentes de los documentos escolares.

Mediante el análisis de los resultados de la encuesta, el 75% de los estudiantes indicó que el trabajo con los mapas de pregunta-respuesta les ayudó a entender la actividad matemática como algo dinámico y colectivo. La percepción de los estudiantes-profesores sobre el papel desempeñado por los mapas en el análisis de la actividad matemática escolar es mayoritariamente positiva: 72% de ellos acepta que los mapas ayudan a analizar y destacan aspectos tradicionalmente ausentes de la matemática escolar.

En conclusión, podemos afirmar que el uso de mapas de pregunta-respuesta como un dispositivo de formación del profesorado tiene muchos aspectos positivos. En primer lugar, permiten un grado de explicitud del MPR fácil de manejar por un docente en servicio en una formación a corto plazo, teniendo en cuenta que los mapas son una herramienta impuesta, pero construidos por ellos. En este uso en la formación docente, los mapas juegan el papel de la forma material del MPR. En consecuencia, utilizado por los maestros como una descripción del REI puede facilitar la aplicación de REI en diferentes instituciones. Obviamente, muchos puntos débiles aún deben mejorarse con el fin de asegurar mejores implementaciones de nuevas instituciones.

Agradecimientos

Financiado por el proyecto EDU2012-39312-C03-01 del Ministerio de Economía y Competitividad de España

Referencias

Ball DL, Thames MH, Phelps G (2008). Content knowledge for teaching; What makes it special? *Journal of Teacher Education*. *59* (5), 389-407.

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L., Gascón, J. (2005). Didactic Restrictions on the Teacher's Practice: The Case of Limits of Functions in Spanish High Schools. *Educational Studies in Mathematics 59*, 235-268.

Barquero B., Bosch, M. Romo, A. (2015). A study and research path on mathematical modelling for teacher education. In: *Proceedings of the 9th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. (CERME 9).

Barquero, B., Bosch, M., & Gascón, J. (2013). The ecological dimension in the teaching of mathematical modelling at university. *Recherches en didactique des mathématiques*, *33*(3), 307-338.

Barquero, B. (2009) *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas*. PhD Dissertation. Universitat. Autònoma de Barcelona.

Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics. Didactique des Mathématiques, 1970-1990. London: Kluwer.

Cantoral, R., Montiel, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático.* Mexico DF: Prentice Hall.

Chevallard, Y. (2009). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. In Margolinas, C. Abboud-Blanchart, M Bueno-Ravel, L (Eds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques. XVe école d'été de didactique des mathématiques* (pp 81-108). Grenoble, France. La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (2007). *Séminaire de didactique des mathématiques 2006-2007*. Aix-Marseille.

http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=141 Chevallard, Y. (2006). *Séminaire de didactique des mathématiques 2005-2006*. Aix-Marseille.

http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=168

Chevallard, Y. (2006a). Steps towards a new epistemology in mathematics education. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the 4th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 21-30). Barcelona: Universitat Ramon Llull.

Cirade, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques: entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel.* PhD Thesis. Université de Provence - Aix-Marseille

Education Committee of the EMS (2012). It is Necessary that Teachers are Mathematically Proficient, but is it Sufficient? Solid Findings in Mathematics Education on Teacher Knowledge. *Newsletter of the European Mathematical Society 83*, 46-50.

Florensa, I. Bosch, M. Gascón, J. (2015). The epistemological dimension in didactics: two problematical issues. In: *Proceedings of the 9th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. (CERME 9).

García, F. G.-H. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM*, *38*(3), 226-246.

Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación Matemática 25* (E), 99-123.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *RELIME, 4*(2), 129-159.

Hakkarainen, K. Sintonen, M. (2002). The Interrogative Model of Inquiry and Computer-Supported Collaborative Learning. *Science & Education*. *11*, 25-43.

Hintikka, J. (1982). A dialogical Model of Teaching. *Synthese 51*, 39-59.

Jessen, B. E. (2014). How can study and research paths contribute to the teaching of mathematics in an interdisciplinary setting? *Annales de didactique et de sciences cognitives, 19*, 119-224.

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional*. PhD Dissertation. Universitat Autònoma de Barcelona.

Ruiz-Olarría, A. (2015). *La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria: de las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza*. PhD Thesis. Universidad Autónoma de Madrid.

Shulman L (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review 57*(1), 1-23.

Serrano, L. (2013). *La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisis ecológico y propuesta didáctica*. PhD Dissertation. Universitat Ramon Llull. Barcelona.

Sierra, T. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas: los sistemas de numeración y la medida de magnitudes*. PhD dissertation. Universidad Complutense de Madrid.

Sintonen, M. (2004). Reasoning to Hypotheses: Where do Questions Come? *Foundation of Science 9*, 249-266.

Winsløw, C., Matheron, Y., Mercier, A. (2013). Study and research courses as an epistemological model for didactics. *Educational Studies in Mathematics 83*(2), 267-284.