ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i4p431-450

# El problema del análisis de la epistemología dominante en una institución: el caso del número en la educación infantil

ESTHER RODRÍGUEZ-QUINTANA[1]
FRANCISCO JAVIER GARCÍA[2]
MERCEDES HIDALGO-HERRERO[3]
TOMÁS ÁNGEL SIERRA[4]

**Resumen**. En este trabajo, situado en el marco de la teoría antropológica de lo didáctico, desde una perspectiva metodológica, abordamos el problema del análisis de la epistemología dominante, clarificando la noción de « modelo epistemológico-didáctico dominante » y proponiendo dimensiones y subdimensiones claves que deberían considerarse. Se determinan indicadores para el estudio de características claves en el caso del número y la numeración en Educación Infantil en España y se ejemplifica con la elaboración de un cuestionario dirigido a maestros.

**Abstract.** Within the framework of the Anthropological Theory of the Didactic, from a methodological perspective, we tackle the problem of analysing the dominant epistemology by clarifying the notion of « epistemological-didactic dominant model » and proposing key dimensions and subdimensions that should be considered. Indicators are determined in order to study key characteristics referred to the number and numbering in the Early Childhood Education in Spain. Moreover, the process is illustrated with the elaboration of a questionnaire addressed to teachers.

## 1. Introducción

En el marco de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD), uno de los elementos que nos permite detectar un fenómeno didáctico, en torno a un saber presente en una institución, es el análisis de la epistemología dominante en torno a ese saber. Dicha epistemología hace referencia a los diferentes modelos de representación institucional del saber matemático que se enseña. Además, cobra un valor fundamental para poder analizar de qué forma favorece y provoca restricciones en la forma de interpretar lo que se entiende por enseñar y aprender matemáticas en dicha institución (Gascón, 2001).

En este trabajo describimos la elaboración y puesta en funcionamiento de una posible metodología de análisis de *modelos epistemológico-didácticos dominantes* (MEDD) en una institución, es decir, de la forma en cómo las instituciones y sus actores interpretan y organizan la actividad matemática, incluyendo las concepciones y creencias sobre un saber matemático en

[1] Dpto. Psicología Evolutiva y de la Educación, Universidad Complutense de Madrid, España – estherrq@edu.ucm.es
[2] Dpto. Didáctica de las Ciencias, Universidad de Jaén, España – fjgarcia@ujaen.es
[3] Dpto. Didáctica de las Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid, España – mhidalgo@ucm.es
[4] Dpto. Didáctica de las Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid, España – tomass@edu.ucm.es

*El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza*
Eje 2. *El análisis praxeológico como herramienta de análisis e ingeniería didáctica*

el proceso de enseñanza-aprendizaje que sustentan sus profesores, mostrando una posible respuesta a la siguiente cuestión generatriz:

$Q_G$: ¿Cómo elaborar dispositivos que nos permitan identificar rasgos del modelo epistemológico dominante en torno a un saber matemático en una institución?

El proceso metodológico seguido lo concretamos para el caso del saber « número natural (aspecto cardinal) y la numeración » y de la institución « educación infantil ». Así, $Q_G$ se concreta en:

$Q_{GN}$: ¿Cómo elaborar dispositivos que nos permitan identificar rasgos del modelo epistemológico dominante en torno al número natural y la numeración en educación infantil (EI)?

El análisis del MEDD coexiste, en el proceso de investigación, con el desarrollo de un *modelo epistemológico de referencia* (MER), nutriéndose ambos mutuamente. El MER, que describiremos en el apartado 3.1, permite, entre otras cosas, identificar e interpretar fenómenos didácticos, así como buscar sus posibles explicaciones y soluciones (Gascón, 2014). También permitirá formular hipótesis sobre modelos epistemológicos posibles, así como caracterizar y explicitar los MEDD existentes en un momento determinado.

En nuestra investigación, pretendemos caracterizar rasgos del MEDD en la institución Educación Infantil (EI)[5] sobre la construcción de los primeros conocimientos numéricos (número cardinal y numeración), tratando así de encontrar posibles elementos de respuesta a las siguientes cuestiones:

– ¿en qué medida el modelo epistemológico que se propone en el MER está vigente?,

– ¿qué restricciones dificultan su puesta en práctica en la institución de EI?

En este artículo, nos centramos en abordar la primera cuestión, esto es, un enfoque del problema didáctico centrado en la dimensión económica, dejando para otro trabajo el estudio de la segunda cuestión, que hace referencia a la dimensión ecológica (Gascón, 2011).

## 2. El MEDD como constructo

Un concepto puede ser utilizado en investigación científica –pasando a denominarse constructo- cuando se define de tal manera que puede ser observado y medido y se puede relacionar con otros conceptos a través de hipótesis (Gras, 1980).

Por otro lado, los constructos conllevan propiedades subyacentes, que no pueden ser medidas de forma directa, sino a través de manifestaciones externas de su existencia, que permiten cuantificarlas (Kerlinger & Lee, 2002).

Podemos decir que el MEDD, como constructo, está dotado de enorme complejidad. Distinguir qué elementos lo componen y cómo se articulan entre sí constituye un problema abierto en la investigación en didáctica de las matemáticas. En un primer intento por avanzar en esta dirección, nos planteamos una nueva cuestión que nos ayudará a contestar a $Q_G$:

$Q_1$: ¿Qué elementos serían pertinentes para identificar rasgos de los modelos epistemológico-didácticos dominantes y cómo podemos organizar su estudio?

[5] En el sistema educativo español, la institución Educación Infantil abarca de 0 a 6 años, estando dividida en dos ciclos, a saber, 0 a 3 años y 3 a 6 años, y no teniendo carácter obligatorio, si bien prácticamente el 100% de los niños cursan el segundo ciclo.

El estudio de un constructo exige determinar cuáles serán los *indicadores*, entendidos como los elementos que se valorarán para caracterizar el constructo. Así mismo, para cada indicador será necesario determinar los diferentes valores posibles, es decir, las « señales » –observables y medibles– que permitirán identificar las características o propiedades de los diferentes valores que puede tomar cada uno de ellos.

### 2.1. Dimensiones y subdimensiones del MEDD

En el caso de constructos complejos, como este, será necesario establecer dimensiones, que se refieren a ámbitos o facetas en cada uno de los cuales se establecerán indicadores. Así, nos planteamos:

$Q_{11}$: ¿Qué dimensiones debemos considerar para estudiar el MEDD?

En el ámbito de la TAD, se postula que la unidad mínima de análisis es todo el proceso de transposición didáctica (Bosch y Gascón, 2005). Por tanto, proponemos inicialmente que las dimensiones a considerar sean aquellas que vienen determinadas por las diferentes etapas de la transposición didáctica (figura 1), es decir: el *saber sabio* (desarrollado por las instituciones productoras del saber), el *saber a enseñar* (generado en el sistema educativo por la « noosfera »), el *saber enseñado* (producido en la escuela, en el aula) y el *saber aprendido* (adquirido por la comunidad de estudio).

Por otro lado, también desde la TAD se postula que la investigación en didáctica necesita elaborar sus propios modelos epistemológicos de referencia (MER)[6], para evitar una excesiva sujeción a las diferentes instituciones observadas y, en particular, a aquellas que por su prestigio o su legitimidad sociales aparecen como dominantes (Bosch y Gascón, 2007). Por ello, la consideración de cada una de las dimensiones anteriores lo haremos desde la perspectiva de un MER explícito, que va a actuar como herramienta interpretativa para el investigador del proceso transpositivo que está analizando.

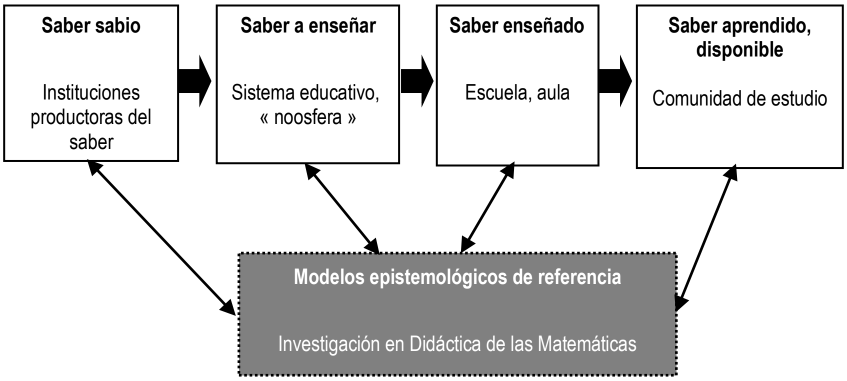



*Figura 1.* Etapas del proceso de transposición didáctica y su relación con el MER (Bosch & Gascón, 2007, p. 394)

Cada dimensión ofrece información valiosa al investigador para la reconstrucción de los MEDD en una institución determinada, y en un momento histórico determinado. Asimismo, cada una de

[6] Existe una dependencia mutua entre el análisis del modelo epistemológico dominante en cada una de las instituciones que intervienen en el proceso de transposición didáctica (que requiere utilizar un MER, esto es, un punto de vista propio elaborado por la investigación didáctica) y la propia construcción del MER (que requiere tomar en consideración datos empíricos provenientes de todas y cada una de las instituciones).

ellas impone condiciones y restricciones que deben ser identificadas, y que explican por qué las *cosas* son así, y no de otra forma.

Así, la dimensión del *saber sabio* permite estudiar cómo son interpretados por la institución *productora* del saber matemático los saberes que han sido elegidos para ser enseñados en una institución escolar determinada. Gascón (2001) ya puso en evidencia la influencia que los modelos epistemológicos generales de las matemáticas podrían tener sobre los MEDD en una institución escolar determinada. Pero, más allá, para cada saber o conjunto de saberes, será necesario identificar qué interpretación de los mismos ha sido priorizada desde la matemática sabia, y qué condiciones y restricciones impone esta decisión sobre el MEDD a determinar.

La dimensión del *saber a enseñar,* es decir, el modelo epistemológico dominante en la noosfera, puede ser reconstruida, principalmente, a partir de los programas oficiales (leyes de educación y currículos vigentes) y otros documentos curriculares, así como de los libros de texto, tanto del alumnado como las « guías docentes » destinadas al profesorado. Consideremos estas como subdimensiones a analizar en la determinación del MEDD (sin menoscabo de otras que podría ser pertinentes, como, por ejemplo, el análisis de marcos de referencia de las pruebas de evaluación externa de ámbito regional, nacional o internacional, o de páginas web y plataformas de recursos ampliamente usadas por el profesorado). A partir de ellas, se pueden determinar las praxeologías, que han sido propuestas para ser enseñadas en una institución, analizando cómo se conectan y articulan entre sí y qué tipo de actividad matemática representan. También se puede determinar cómo se concibe y estructura el proceso de estudio de estas praxeologías, y las condiciones y restricciones que generan sobre las siguientes etapas del proceso de transposición didáctica.

La dimensión del *saber enseñado* se corresponde con la interpretación que el profesorado hace del saber a enseñar (dimensión anterior), que cristaliza en un conjunto de decisiones, que lleva a cabo en el aula (praxeología didáctica), y en el desarrollo de una determinada actividad matemática por parte de los estudiantes (praxeología matemática). Para su determinación es necesario considerar los elementos empíricos que aparecen en el trabajo matemático desarrollado por los alumnos y el profesor en el aula. Posibles subdimensiones de esta etapa serían, por un lado, la actividad matemática realmente vivida en el aula (elementos praxeológicos movilizados, conexión, articulación e integración entre ellos) y, por otro lado, la estructuración del proceso de estudio llevada a cabo por el profesor (presencia de los diferentes momentos de estudio y articulación entre ellos).

Sin embargo, estos elementos son insuficientes. En la transformación que el profesorado hace sobre el *saber a enseñar* entra en juego un complejo sistema de praxeologías, de naturaleza matemática y didáctica, que constituyen el *conocimiento del profesor* y determinan cómo este interpreta este saber a enseñar y la forma de organizar su estudio en dicha institución. En Chevallard (2009) se postula el carácter colectivo e institucional de este saber:

> « Par delà des variations personnelles auxquelles la personne peut attacher un prix élevé qui participe souvent de ce que Freud a nommé le «narcissisme des petites différence», le rapport aux mathématiques des professeurs de mathématiques contient un noyau largement commun de conditions et de contraintes façonné par la profession à laquelle ils appartiennent. » (Chevallard, 2009, p. 12)

Desde esta perspectiva, se propone la noción del *equipamiento praxeológico de la profesión* (Cirade, 2006; Bosch y Gascón, 2009; Ruiz-Olarría, 2015) para modelizar este conjunto de praxeologías matemático-didácticas que, en una institución determinada y en un momento histórico concreto, determinan cómo la profesión interpreta el *saber a enseñar* y lo transforma para convertirlo en *saber enseñado*.

Finalmente, la dimensión del *saber aprendido* corresponde a la interpretación del conjunto de praxeologías matemáticas realmente aprendidas por los estudiantes, y que serán parcialmente observables a través de la actividad matemática que son capaces de llevar a cabo. Subdimensiones para caracterizar el saber aprendido podrían ser los registros de la actividad matemática de los estudiantes en sus cuadernos de trabajo de dentro y fuera del aula, así como la observación de dicha actividad por parte del investigador (directa, o a través de grabaciones en vídeo). También podrían aportar información relevante las respuestas que los estudiantes dan en pruebas de evaluación (internas y externas), si se tiene acceso a las mismas.

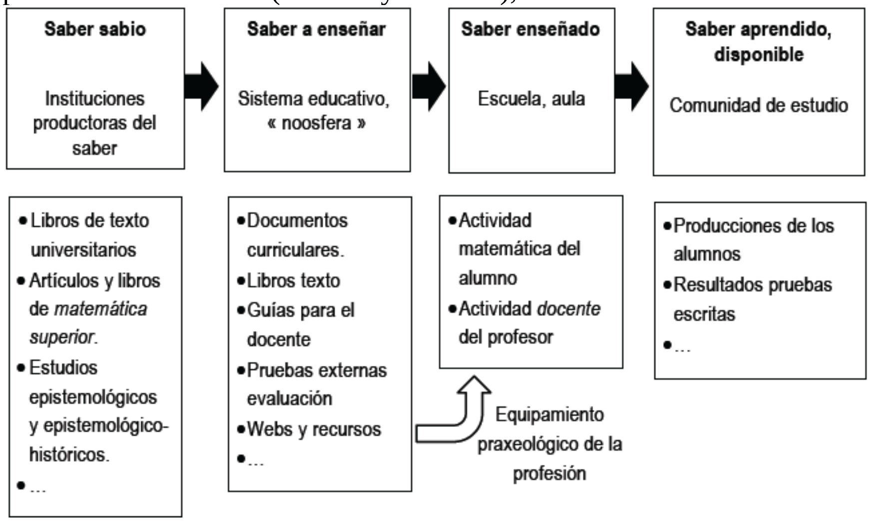



*Figura 2.* Dimensiones y subdimensiones en el estudio del MEDD.

### 2.2. Categorías e indicadores dentro de cada dimensión del MEDD

Además de las dimensiones y subdimensiones, debemos determinar las categorías, esto es, aspectos a valorar –elementos a observar– en cada una de las dimensiones consideradas, en relación con el constructo MEDD. Nos preguntamos entonces:

$Q_{12}$: ¿Qué categorías debemos considerar para estudiar el MEDD?

Las categorías objeto de análisis, en cada dimensión, harán referencia a la estructura de las *praxeologías* existentes y por tanto deben incluir información sobre los tipos de *tareas*, las *técnicas*, las *tecnologías* y las *teorías* que aparecen.

> […] la matemática escolar […] Como toda actividad humana, presenta dos aspectos inseparables: la práctica matemática que consta de tareas (materializadas en tipos de problemas) y técnicas útiles para llevar a cabo dichas tareas, y el discurso razonado sobre dicha práctica que está constituido por dos niveles: el de las tecnologías y el de las teorías (Gascón, 1998, p. 21).

Será necesario considerar también los momentos didácticos *de la actividad matemática* descritos por Chevallard, Bosch y Gascón (1997) (momento del *primer encuentro*, momento *exploratorio*, momento de *constitución del entorno tecnológico-teórico*, momento de *trabajo de* *la técnica*, momento de *institucionalización* y momento de *evaluación*). Es decir, será necesario estudiar la existencia y características de cada uno de estos momentos del proceso de estudio.

Una vez establecidas las categorías y dimensiones del constructo, corresponde concretar manifestaciones externas, empíricas y observables del constructo « modelo epistemológico-didáctico dominante ». Es entonces el momento de plantearse:

$Q_{13}$: ¿Qué indicadores debemos utilizar para estudiar el MEDD?

Los indicadores son propiedades manifiestas u observables que se supone que están ligadas empíricamente, aunque no necesariamente de forma causal, a una propiedad latente o no observable, que es la que nos interesa (Mora, 1971). Estos indicadores, definidos para las diferentes categorías de cada dimensión, deben estar definidos de modo operacional, es decir, especificando las acciones que hay que llevar a cabo para su medición.

Habrá que responder entonces al menos a qué tipo de tareas se proponen, cuántas tareas de cada tipo y en qué orden, qué técnicas se estudian, si se establecen relaciones entre las técnicas, si se muestran a través de su razón de ser, etc.

## 3. El caso del número natural en educación infantil

Analizar y determinar con precisión el MEDD, relativo a un conocimiento matemático en una institución determinada, es una tarea amplia y compleja. Como acabamos de ver, esta debe abarcar diferentes dimensiones y subdimensiones, una formulación pertinente de las categorías y de los indicadores a considerar, y una construcción adecuada de las herramientas que nos permitan contrastar empíricamente la presencia de dichos indicadores. Finalmente, un proceso de comparación y reconstrucción, que integre y articule todos estos datos en un modelo coherente y consistente de la actividad matemática escolar en torno a dichos saberes en dicha institución, así como con respecto a la forma de organizar su estudio.

Desde la TAD, conjeturamos la necesidad de disponer de un MER, construido *ad hoc*, de forma explícita, y como herramienta para interpretar, dar sentido y encontrar las posibles *razones de ser* que asigna la institución a la actividad matemática escolar. Su papel principal no es el de servir de modelo de la actividad matemática que se debería llevar a cabo en una institución determinada, sino de herramienta interpretativa, que permita identificar fenómenos didácticos, de acuerdo con la función fenomenotécnica de los MER descrita en Gascón (2014).

En este artículo nos centraremos en la institución Educación Infantil en España, en la época actual, y en la construcción del número y la numeración. Partiremos de los trabajos de Ruiz-Higueras (2005), Lacasta y Wilhelmi (2008) y García y Sierra (2015), que ofrecen rasgos importantes del MEDD en la dimensión del *saber a enseñar* (currículo y libros de texto). A partir de estos, nos centraremos en cómo determinar el equipamiento praxeológico de la profesión docente en torno al número natural y la numeración, considerando que este análisis es un paso necesario para poder analizar en el futuro la transformación que se produce en la Educación Infantil actual del *saber a enseñar* en *saber enseñado*.

Apoyándonos en el MER que esbozaremos en el siguiente apartado, formularemos algunos indicadores para intentar caracterizar este amplio y complejo sistema praxeológico, y describiremos las herramientas que han sido diseñadas para intentar contrastar de forma empírica dichos indicadores. Se trata de una posible respuesta a la cuestión:

$Q_{13N}$: ¿Qué indicadores debemos utilizar para estudiar el MEDD en torno al número natural y la numeración en la EI?

### 3.1. Un modelo epistemológico de referencia del número y la numeración en la escuela infantil

En el caso que tomamos como ejemplo en este trabajo –el estudio del número en educación infantil–, se parte de un MER del número natural en el ámbito de las *magnitudes y su medida* (García y Sierra, 2015; Sierra, 2006; Margolinas y Wozniak, 2012; Sierra y Rodríguez, 2012).

El MER parte de la cuestión generatriz inicial siguiente:

$Q$: Dada una colección finita, ¿cómo compararla con otra respecto de la *cualidad cantidad* o cómo construir otra colección que coincida con ella en relación con dicha *cualidad*?

Según las condiciones impuestas sobre las colecciones, surgen distintos tipos de tareas[7] que determinan diferentes organizaciones matemáticas. Así, una primera organización matemática ($OM_{inicial}$) vendrá determinada por los tipos de tareas:

$\pi_1$: Dadas dos colecciones finitas $C_1$ y $C_2$ presentes simultáneamente, manipulables, o al menos accesibles mediante gestos, compararlas atendiendo a la *cualidad cantidad*.

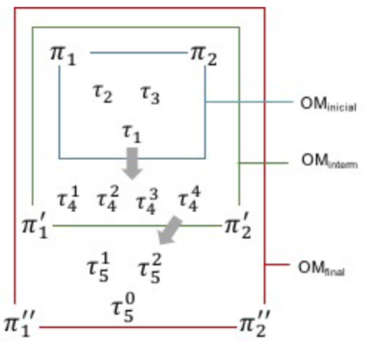
$\pi_2$: Dada una colección finita $C_1$, construir otra colección $C_2$ que sea equipotente a $C_1$, teniendo a la vista $C_1$.

Bajo las condiciones impuestas, dichos tipos de tareas permiten la emergencia de técnicas muy primitivas (marcadas por su carácter manipulativo o gestual). Por ejemplo, el establecimiento de una biyección entre ambas colecciones (técnicas $\tau_1$ y $\tau_2$, ver Tabla 1), bien para comparar, bien para construir la segunda colección a partir de la primera. Estas técnicas tienen un alcance muy limitado, lo que se pone de manifiesto cuando es necesario comparar y construir colecciones que están alejadas entre sí, y que no son visibles ni accesibles simultáneamente (tipos de tareas que denotamos como $\pi_1'$ y $\pi_2'$ respectivamente). Este cambio en las condiciones materiales de las tareas fuerza la evolución de las técnicas anteriores y genera una organización matemática intermedia ($OM_{interm}$) que es una ampliación de $OM_{inicial}$.

En la Tabla 1 describimos un conjunto de posibles nuevas técnicas, que utilizan colecciones intermedias construidas por biyección y que suponen la puesta en juego de la propiedad transitiva. Estas colecciones intermedias podrían ser colecciones de *objetos* ($\tau_4^1$), como los dedos de la mano, o de objetos pequeños que actúen a modo de cuentas (fichas, canicas, garbanzos, palillos…) y que sean transportables. También podrían ser colecciones de símbolos ($\tau_4^2$) como representaciones pictóricas de los elementos que componen la colección, o bien simbólicas, como « palitos », cruces, círculos, etc. E incluso colecciones de palabras ($\tau_4^3$), por ejemplo, nombrando los objetos de la colección, o alguna cualidad distintiva de los mismos (su color, en caso de que todos tengan color diferente, o el nombre de cada persona, en el caso de que sea una colección de personas) o la serie de palabras-número ($\tau_4^4$). Respecto a esta última, destacamos que incluso un recitado no estable, o desordenado, de palabras-número permite resolver con éxito esta tarea (por ejemplo, un niño que recita « *uno, tres, cuatro, dos* », señalando los elementos de la primera colección, y que luego vuelve a repetir las mismas cuatro

[7] Los tipos de tareas están basados en los que son descritos por Brousseau y sus colaboradores (véase Briand, Loubet y Salin, 2004; El Bouazzaoui, 1985; Martin, 2003; y Quevedo de Villegas, 1986).

palabras número, en el mismo orden o no, mientras que va cogiendo objetos para construir la segunda colección). Si bien estas técnicas permiten resolver con éxito una versión ampliada de los tipos de problemas iniciales, siguen teniendo aún un alcance bastante limitado, lo que se hace evidente, por ejemplo, cuando se consideran colecciones de mayor tamaño o es necesario realizar una comunicación escrita u oral.




| |
|---|
| $\tau_1$ : biyección o correspondencia término a término.<br>$\tau_2$ : biyección por pequeñas subcolecciones (dos a dos, tres a tres).<br>$\tau_3$ : estimación visual de la cantidad. |
| $\tau_4$ : construcción de una colección intermedia, usando la biyección ($\tau_1$ ).<br>$\tau_4^1$: construcción de una colección intermedia de "objetos" (dedos, fichas, palillos,….).<br>$\tau_4^2$: construcción de una colección intermedia de símbolos (analógicos o icónicos).<br>$\tau_4^3$: construcción de una colección intermedia de palabras, una por elemento (nombrando los elementos, o alguna característica distintiva de ellos, como podría ser el color).<br>$\tau_4^4$: uso de la serie numérica como colección intermedia. |
| $\tau_5$ : conteo (recitado de la serie de palabras número en orden estable, junto con el *principio cardinal*).<br>$\tau_5^1$: conteo, comunicando oralmente la medida de la colección mediante la última palabra-número recitada.<br>$\tau_5^2$: conteo, comunicando gráficamente la medida de la colección mediante cifras de la última palabra-número recitada. |
| $\tau_5^0$: medida instantánea de la colección (subitización). |

*Tabla 1*. Tipos de tareas y técnicas (García, Lendínez & Sierra, 2017)

La última ampliación praxeológica, que da lugar a la organización matemática final ($OM_{final}$), surge cuando imponemos la necesidad de comunicar la cantidad, que estaba implícita en los tipos $\pi'_1$ y $\pi'_2$. Llamaremos a este tipo de tareas:

$\pi''_1$: Dadas $C_1$ y $C_2$ alejadas y no visibles simultáneamente, es necesario compararlas atendiendo a la *cualidad cantidad* mediante un mensaje escrito u oral.

$\pi''_2$: Dada $C_1$, pedir por escrito u oralmente los objetos necesarios para construir otra $C_2$ que coincida con ella en cantidad, estando $C_1$ no visible ni accesible cuando se construye $C_2$.

Las técnicas basadas en el uso de colecciones intermedias de *objetos*, o en el recitado de palabras, permiten resolver con éxito tareas del tipo anterior siempre que hayan sido convenidas entre el emisor y el receptor del mensaje y las colecciones no sean muy grandes. Además, las basadas en símbolos intermedios permiten la comunicación por escrito respecto de la cantidad, siendo el germen de las primeras *numeraciones* que ponen en funcionamiento los niños (Ruiz-Higueras, 2005). Destaca la técnica que usa como colección intermedia la serie de palabras-número, recitadas en orden estable. El carácter cultural de esta serie, y la posibilidad de extenderla tanto como se quiera, hace que la técnica correspondiente sea más fiable, eficaz y económica. Si a dicha técnica se le añade el principio cardinal ( $\tau_5$), permite la evolución hacia la *técnica del conteo*, que emerge como la mejor estrategia en la EI, al permitir dar solución óptima a todos los problemas planteados, mediante el uso de una palabra-número o numeral, y que consideramos como la construcción de una *aplicación medida*.

Consideramos que el MER aquí esbozado se integra en un modelo epistemológicamente coherente y consistente con la construcción matemática de las magnitudes y de la aplicación medida, lo que Ruiz-Higueras (2005) denominó las diferentes « concepciones del número natural ». Ello nos permite utilizarlo como una herramienta eficaz de análisis del MEDD.

### 3.2. Equipamiento praxeológico de la profesión: indicadores

En el estudio del MEDD del número y la numeración en Educación Infantil, la forma en la que la profesión interpreta y describe la actividad matemática escolar en torno a estos objetos, así como la manera en la que interpretan y justifican sus prácticas docentes, juega un papel importante. Desde la TAD se propone modelizar el conocimiento del profesor desde una perspectiva colectiva e institucional, más allá de las diferencias individuales de los sujetos considerados (Chevallard, 2009). También se propone una modelización del mismo en términos praxeológicos, entendiendo que la forma en la que la profesión concibe, diseña, implementa, evalúa y justifica la enseñanza y el aprendizaje de determinados conocimientos matemáticos es un emergente de un conjunto de praxeologías matemáticas y didácticas, que constituyen el equipamiento praxeológico de la profesión (Bosch y Gascón, 2009; Ruiz-Olarría, 2015).

De esta forma, consideramos que poder describir rasgos importantes del equipamiento praxeológico actual de la profesión « maestro/a de Educación Infantil » nos permitirá avanzar de forma significativa en la caracterización del MEDD.

Con el fin de explorar cómo la profesión interpreta la enseñanza y el aprendizaje del número natural y de la numeración en la EI, hemos considerado un conjunto de indicadores, derivados del MER, a partir de los que hemos construido un cuestionario. A continuación, describimos algunos de estos indicadores, que pueden ser considerados conjeturas sobre el MEDD y que deseamos contrastar empíricamente, intentando justificar la pertinencia de los mismos, y vinculándolos con ítems concretos del cuestionario construido.

Según el MER descrito previamente, consideramos que un aprendizaje funcional y con sentido del número y de la numeración tiene su origen en tareas muy sencillas de comparación directa y construcción de colecciones cercanas y accesibles.

En torno a esta $OM_{inicial}$, hemos considerado los siguientes indicadores:

> $I_1$: frecuencia y papel en la Escuela Infantil del trabajo directo sobre colecciones para la construcción de magnitudes discretas y, en particular, previo a la construcción del conteo.

En concreto:

> $I_{11}$: frecuencia de las tareas de comparación directa (tipo $\pi_1$).
>
> $I_{12}$: papel que las tareas de comparación directa (tipo $\pi_1$) juegan en la construcción con sentido del número.
>
> $I_{13}$: frecuencia de las tareas de producción directa (tipo $\pi_2$).
>
> $I_{14}$: papel de las tareas de producción directa (tipo $\pi_2$) juegan en la construcción con sentido del número.
>
> $I_{15}$: grado de inducción al uso del conteo en tareas de comparación directa (tipo $\pi_1$) y de producción directa (tipo $\pi_2$) frente al fomento de un trabajo directo sobre las cantidades de magnitud, que haga emerger técnicas iniciales (más primitivas).

Consideramos como *Hipótesis 1*:

> El trabajo directo sobre los conjuntos para la construcción de magnitudes discretas, y previo a la introducción del conteo, estará prácticamente ausente en la EI. Las tareas de comparación directa y de producción directa serán escasas o jugarán un papel marginal. Así como, el uso del conteo se inducirá incluso cuando no es necesario, ocultando así el trabajo directo sobre la cantidad y la emergencia de técnicas iniciales primitivas.

En la $OM_{interm}$ la propiedad de la numerosidad empieza a emerger. Si bien todavía no se disponen de palabras ni códigos para expresarla, la construcción de colecciones intermedias, que pueden ser de naturaleza muy diversa pero que comparten el valor respecto de esta cualidad, hace que esta poco a poco vaya tomando forma.

En relación con esta $OM_{interm}$, formulamos el siguiente indicador:

> $I_2$: frecuencia y papel en la escuela infantil de tareas de comparación y producción de colecciones (tipo $\pi'_1$ y $\pi'_2$) que están alejadas y no son accesibles a la vez mediante la vista.

Consideramos, como sub-indicadores de este, los siguientes:

> $I_{21}$: frecuencia de las tareas de comparación de colecciones en los que estas están alejadas y no accesibles a la vez mediante la vista (tipo $\pi_1'$).
>
> $I_{22}$: papel que las tareas de comparación de colecciones en los que estas están alejadas y no accesibles a la vez mediante la vista (tipo $\pi_1'$) juegan en la construcción con sentido del número.
>
> $I_{23}$: frecuencia de las tareas de producción de colecciones en las que estas están alejadas y no accesibles a la vez mediante la vista (tipo $\pi_2'$).
>
> $I_{24}$: papel que las tareas de producción de colecciones en las que estas están alejadas y no son accesibles a la vez mediante la vista (tipo $\pi_2'$) juegan en la construcción con sentido del número.
>
> $I_{25}$: grado de inducción al uso del conteo en tareas de tipo $\pi_1'$.
>
> $I_{26}$: grado de inducción al uso del conteo en tareas de tipo $\pi_2'$.

Postulamos como *Hipótesis 2*:

> En la EI, las tareas de comparación y producción de colecciones alejadas y no accesibles a la vez serán prácticamente inexistentes. El uso del conteo se inducirá en este tipo de tareas, tomándose así esta técnica como la dominante, incluso cuando no es estrictamente necesaria.

De este modo, si se confirma esta hipótesis, al no dejar que aparezcan y luego fracasen las técnicas primitivas, no se permite la construcción funcional de las técnicas intermedias indirectas.

Finalmente, la conexión número-numeración, que es la que hace que el número emerja como objeto, ligado a la propiedad de numerosidad, toma sentido cuando se introducen actividades de comunicación. Aquí es cuando se construye el conteo como aplicación medida, y cuando el número, como medida de la numerosidad, emerge de forma explícita al elaborarse códigos y palabras que permiten su representación y comunicación. Etapa que se corresponde con la $OM_{final}$ en nuestro MER.

Respecto a esta $OM_{final}$, formulamos el indicador:

> $I_3$: frecuencia y papel de tareas de comunicación para comparar colecciones (tipo $\pi_1''$) o construir una colección igual en cantidad que otra dada, en ausencia de la primera (tipo $\pi_2''$).

Enunciamos como *Hipótesis 3*:

> Los tipos de tareas $\pi_2''$ están prácticamente ausentes. En ellos se tiende a dividir[8] la actividad matemática dando lugar, por un lado, a tareas aisladas de *medida de colecciones,* y por otro lado, a tareas aisladas de *producción de una colección a partir de una medida*, sin apenas relación entre ellas.

[8] Tal como aparece en los primeros resultados de análisis de libros de texto descritos en García y Sierra (2015).

Frente a esta división y aislamiento de los tipos de problemas, el conteo no puede emerger como evolución de técnicas anteriores, sino que debe ser impuesto como la técnica única. Se dificulta así que numeraciones intermedias (del tipo icónico) emergieran y que sean valoradas dentro de un proceso más amplio de construcción de lo numérico. Como consecuencia, se pone en riesgo la construcción funcional del número y de la numeración como mejor instrumento para aprehender y comunicar respecto de la cantidad en contextos de medida de colecciones.

Por ello, consideramos importante tener en cuenta los siguientes sub-indicadores del anterior:

$I_{31}$: frecuencia de tareas en las que, dada una colección, se pide expresamente que se mida.

$I_{32}$: papel que juegan en la construcción con sentido del número y de la numeración las tareas en las que, dada una colección, se pide expresamente que se mida.

$I_{33}$: frecuencia de tareas en las que, dada una medida (oralmente o a través de cifras escritas), se pide expresamente producir una colección que tenga dicha medida.

$I_{34}$: papel que juegan en la construcción con sentido del número y de la numeración las tareas en las que, dada una medida (oralmente o a través de cifras escritas), se pide expresamente producir una colección que tenga dicha medida.

$I_{35}$: frecuencia de tareas tipo $\pi_1''$ y $\pi_2''$ completas.

Finalmente, y en relación con el papel fundamental que juega el conteo en la construcción del número en la escuela infantil, así como el aprendizaje de los trazos de las cifras indo-arábigas, consideramos relevante indagar: (a) sobre cómo se introduce el conteo y qué papel juega en la actividad matemática que llevan a cabo los estudiantes en esta etapa; (b) acerca de las situaciones en las que los estudiantes tienen que producir (o a veces simplemente reproducir) la escritura de las cifras. Para ello, formulamos un nuevo indicador:

$I_4$: modo y momento de introducción de los elementos (objetos, gestos códigos…) que componen la técnica del conteo.

En concreto:

$I_{41}$: frecuencia de actividades de recitado de la serie de palabras número, aisladas de problemas reales respecto de la cantidad.

$I_{42}$: frecuencia de actividades en las que contar es un fin en sí mismo.

$I_{43}$: frecuencia de actividades de escritura de cifras, desligadas de cualquier problema respecto de las colecciones y las cantidades.

$I_{44}$: frecuencia de actividades de asociación entre palabras-número y cifras, desligadas de cualquier problema respecto de las colecciones y las cantidades.

Formulamos como *Hipótesis 4*:

Se producirá una introducción temprana y directa de los objetos, gestos y códigos que componen la técnica del conteo. Así, serán habituales actividades de recitado de la serie de palabras-número y de escritura de cifras –como de asociación entre palabras-número y cifras–, desligados de cualquier problema respecto de la cantidad. También, serán numerosas las actividades en las que contar es un fin en sí mismo.

En la *dimensión del « saber a enseñar »*, una fuente privilegiada son los libros de texto. En García y Sierra (2015) encontramos una síntesis de las conclusiones más importantes sobre el número en educación infantil tras el estudio de una muestra representativa de libros de texto.

En la *dimensión* « *saber aprendido* » se estudiarían los mismos indicadores, pero en las ejecuciones desarrolladas por los alumnos.

En la transición entre ambos, postulamos la necesidad de considerar a la profesión, ya que es la encargada de transformar el saber a enseñar en saber enseñado (ver apartado 2.1, Figura 2). Para intentar caracterizar el equipamiento praxeológico de esta, una técnica que consideramos adecuada es el diseño y la aplicación de un *cuestionario*.

## 4. Los cuestionarios en el estudio del MEDD

Nos planteamos ahora la siguiente cuestión:

$Q_{14}$: ¿Cómo diseñar un cuestionario para profesores que aporte información sobre el MEDD?

En el estudio del equipamiento praxeológico del profesor, consideramos de gran interés tanto los cuestionarios como los grupos de discusión.

El *grupo de discusión* es una técnica en la que un conjunto de sujetos debate sobre un determinado tópico propuesto por el investigador. En ellos, se suele reunir a entre siete y diez personas, desconocidas entre sí y con características homogéneas en relación al tema investigado, para que puedan desarrollar una discusión guiada en un clima no directivo (Krueger, 1991). En este caso, considerando los objetivos de la investigación, los grupos de discusión deberían estar constituidos por maestros de educación infantil, dado que sentirse de la misma « clase » hace que el clima de conversación sea cómodo y se pueda discutir con libertad, pudiendo incluso expresar ideas socialmente impopulares o provocadoras (Lederman, 1990).

Aunque en ocasiones los grupos de discusión se utilizan como único medio para obtener información, apoyándose en que se obtienen resultados similares a los que se obtienen mediante el uso de otros procedimientos (Ward, Bertrand y Brown, 1991), lo más habitual es que sean utilizados en la fase exploratoria para completar y perfilar cuestionarios (p.e., O`Brien, 1993; Creswell, 2009). Posteriormente, a través de la encuesta, se obtendrá información de una muestra más amplia, con mayor representación de la población de referencia y con un menor esfuerzo.

En lo que sigue, nos limitaremos al proceso de elaboración de un cuestionario, planteándonos en concreto:

$Q_{14N}$: ¿Cómo diseñar un cuestionario para profesores que nos dé información relevante sobre el MEDD en torno al número y la numeración en la institución de educación infantil?

El cuestionario se inicia con un bloque dedicado a solicitar información autobiográfica, que nos permitirá estudiar las características de los profesores que contesten, estableciendo en su caso análisis diferenciados en función de diversos factores, como la edad, la experiencia profesional, el género. Posteriormente se presentan los ítems relativos a la obtención de información sobre los indicadores propuestos en el apartado precedente. Con este objetivo, se utilizan tres bloques de preguntas:

– uno relativo al grado de acuerdo con una serie de afirmaciones sobre la actividad matemática a realizar en EI (medido con una escala tipo Likert con 4 valores posibles, desde totalmente en desacuerdo hasta completamente de acuerdo);

– otro en que deben valorar la frecuencia de un conjunto de situaciones o actividades en la etapa de EI (con 4 niveles, desde « nada » hasta « mucho »);

– un último tipo de cuestiones, relativas a un conjunto de tareas, propuestas en fichas o no, consideradas como representativas de un tipo de actividad matemática. Los enseñantes deben responder preguntas sobre la frecuencia con que se utilizan, sobre si las consideran adecuadas, y sobre los prerrequisitos y su grado de utilidad para desarrollar diferentes aprendizajes relacionados con el número.

Especialmente en el caso de que no se lleve a cabo un grupo de discusión previo a la elaboración de la versión definitiva del cuestionario, tiene mucho valor la administración de una versión piloto, donde se evalúe el nivel de comprensión de las preguntas planteadas y la interpretación de las mismas por parte del colectivo. Por ejemplo, esta revisión nos llevó a confirmar que las « tareas de enumeración » eran concebidas de un modo diferente al del contexto de investigación, por lo que se consideró necesario aclarar, en una nota al pie, que se trata de una tarea que consiste en pasar revista a todos los elementos de una colección una y sólo una vez.

Con la información de la revisión de la versión piloto, se construye la versión definitiva teniendo en cuenta los indicadores definidos.

En lo que sigue, describiremos, a modo de ejemplo, ítems utilizados para valorar el subindicador $I_{15}$ (relativo a la Hipótesis 1): grado de inducción al uso del conteo en tareas de comparación directa (tipo $\pi_1$) y de producción directa (tipo $\pi_2$) frente al fomento de emergencia de técnicas iniciales (primitivas) a través del trabajo directo sobre las cantidades.

*Grado de acuerdo con afirmaciones*

En el primer grupo de ítems, que comienzan por « En Educación Infantil, los niños deben… », en el que se indaga sobre qué tareas deben realizar los alumnos de EI, se solicita a los encuestados que muestren el grado de acuerdo (1 = totalmente en desacuerdo; 2 = en desacuerdo; 3 = de acuerdo; 4 = completamente de acuerdo) ante diversos tipos de afirmaciones.

En cuanto al tipo $\pi_1$, se planteó el ítem « comparar conjuntos según su cantidad, sin necesidad de usar el número ». Una respuesta cercana a 1 indica, con respecto a $I_{15}$, que se está produciendo una inducción al conteo, en tanto que valoraciones cercanas a 4 nos llevarían a deducir lo contrario.

En cuanto al tipo $\pi_2$, la tarea sobre la que se pedía valorar la importancia en EI de « construir un conjunto igual en cantidad que otro, sin necesidad de usar el número ». Aquí encontramos, de nuevo, que una valoración cercana a 1 nos llevaría a deducir que se está realizando una inducción al conteo, en tanto que 4 indicaría lo contrario.

*Frecuencia de tareas*

En el grupo de ítems encabezados con « Indique lo habituales que son, según su experiencia, las siguientes tareas en Educación Infantil » (siendo 1 = nada; 2 = poco; 3 = bastante; 4 = mucho), se incluyeron sendos ítems correspondientes a los tipos $\pi_1$ y $\pi_2$. Para el primero, « Determinar dónde hay más al comparar conjuntos estando ambos conjuntos visibles a la vez », una valoración de 4 se puede relacionar con una escasa inducción al conteo, ya que no es necesario usar esta técnica cuando las colecciones están cercanas y visibles simultáneamente. Para el segundo tipo, « Crear un conjunto que tenga un número de elementos previamente indicado mediante cifras (por ejemplo, construir un conjunto con 4 elementos) » de valoraciones cercanas a 4 se deduce una inducción al conteo.

*Actividades propuestas en fichas (libros de texto)*

En el *Grupo A de actividades de Educación Infantil* se solicita al encuestado que considere las siguientes fichas escolares (Figura 4), como ejemplos de tipos de fichas que proponen los libros de texto para realizar *comparación de colecciones*.


*Figura 4.* Fichas relativas a la comparación de colecciones.

Teniendo en cuenta los tipos de actividades mostrados en estas fichas, se pide a los enseñantes que respondan a diversas cuestiones. Entre ellas, que muestre su grado de conformidad (de « 1 = totalmente en desacuerdo » a « 4 = completamente de acuerdo ») con la afirmación « Para realizar fichas como estas, los niños tienen que ser capaces de contar los conjuntos que se les presentan ». Valoraciones cercanas a 4 se relacionan con una inducción al conteo.

Una vez preguntado el encuestado sobre la importancia o no de la realización de fichas del Grupo A, si la respuesta es afirmativa se le solicita que muestre el grado de acuerdo en si las actividades mostradas son importantes porque « son actividades de tipo prenumérico (como la seriación y la clasificación), que preparan a los niños para el aprendizaje posterior al número ». Si el encuestado se muestra totalmente en desacuerdo (1) se deduce que para realizarlas se induce al uso del conteo como técnica resolutoria, en tanto que si se muestra completamente de acuerdo (4) evidencia que no induce a su utilización.

En el caso de que no considere importante la realización de actividades del Grupo A, se plantea que valoren el grado de acuerdo con ciertas afirmaciones. Entre ellas, « Para resolverlas los niños usan el conteo y, por tanto, son muy sencillas ». Un total desacuerdo (1) con esta afirmación mostraría que no se induce al conteo como estrategia de resolución, mientras que un acuerdo completo (4) indicaría que sí, pues consideran que los niños ya saben contar y que no se pueden hacer antes de llevar a cabo dicho aprendizaje.

Para indagar sobre actividades de *producción de colecciones*, se incluye el *Grupo D de actividades de Educación Infantil*. Se solicita al encuestado que considere las siguientes fichas escolares (Figura 5), como ejemplos de tipos de fichas que proponen los libros de texto.

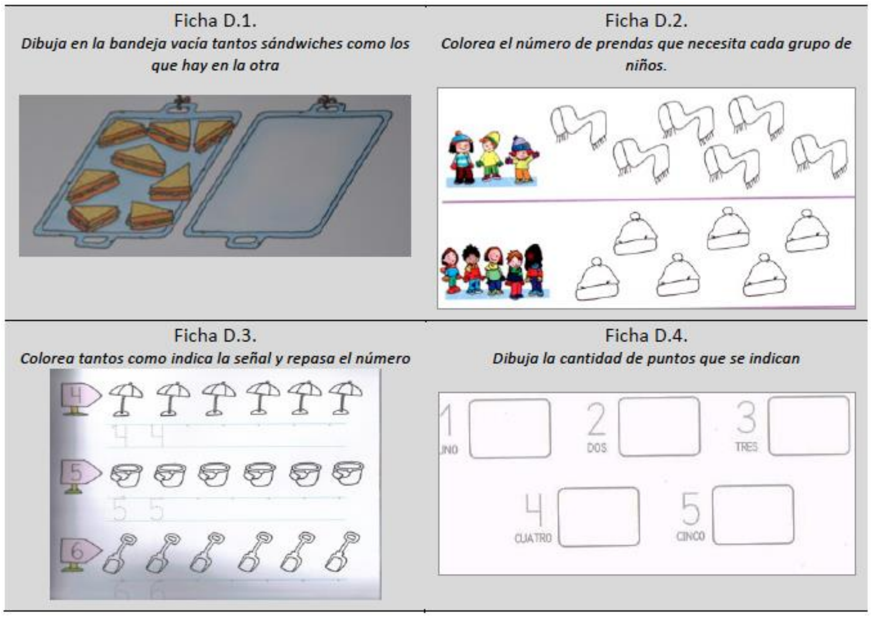



*Figura 5*. Fichas escolares sobre producción de colecciones.

Teniendo en cuenta los tipos de actividades mostrados en estas fichas, se pide a los enseñantes que respondan a diversas cuestiones. Con respecto al indicador $I_{15}$, se pregunta sobre si « Los niños que no sepan contar no podrán realizar con éxito las fichas D.1. y D.2. ». De un total desacuerdo (1) se deduce que no hay inducción al conteo, en tanto que un completo acuerdo (4) se puede interpretar que sí lo hay.

Posteriormente se cuestiona sobre si se considera que es importante hacer fichas del tipo de las mostradas en el Grupo D con los niños y niñas de EI. En caso de respuesta afirmativa, entre otros ítems se propone que se valore el grado de conformidad con la afirmación « los niños aprenden que contando se puede construir un conjunto que tiene la misma cantidad de elementos que otro ». Un alto grado de acuerdo (4) indicaría que el conteo es inducido para resolver este tipo de actividades.

En caso de que conteste que este tipo de fichas no son importantes en EI, el encuestado ha de mostrar el grado de conformidad con diversos ítems. Con respecto al indicador $I_{15}$, se incluyó « estas fichas son de aplicación del conteo, que se debe haber enseñado antes ». Un completo acuerdo (4) con esta afirmación permite concluir que el conteo es inducido como técnica de resolución.

Finalmente, para medir el indicador $I_{15}$ también se incluyeron ítems sobre el *Grupo E de actividades de Educación Infantil*, que abordan la *producción de colecciones*, en el que se fijaba la atención sobre la siguiente ficha (Figura 6).


*Figura 6*. Ficha sobre producción de colecciones

En relación con el contexto que en ella se presenta (personas y sombreros), al encuestado se le solicita que considere la siguiente actividad (Figura 7).

*El docente prepara una colección de muñecos en una mesa (Imagen 1) y una colección de sombreros en una caja (Imagen 2). Hay siempre más sombreros que muñecos. Los estudiantes tendrán que construir una colección de sombreros, a partir de los que ha preparado el docente, de manera que haya un sombrero, y sólo uno, para cada muñeco (esto es, que las colecciones de muñecos y de sombreros sean iguales en cantidad).*

Imagen 1. Colección de muñecos — Imagen 2. Colección de sombreros — Imagen 3. Cada muñeco con su sombrero

*Cuando hayan construido la colección de sombreros, los estudiantes serán responsables de comprobar si su respuesta es correcta, poniendo un sombrero sobre la cabeza de cada muñeco (Imagen 3). Eventualmente, si faltan o sobran sombreros (respuesta incorrecta), el docente dará a los niños una nueva oportunidad.*

*Figura 7.* Ejemplo de actividad de construcción de colecciones

En el marco de esta situación, se solicita al encuestado que considere diferentes tipos de actividades (Figura 8) y que conteste a preguntas propuestas para cada tipo de actividad.

***Actividad tipo 1***

La colección de muñecos y la de sombreros están sobre la mesa del niño, de manera que pueden verlos y manipularlos a la vez. El niño debe tomar los que necesite, ni uno más ni uno menos, para que cada muñeco tenga su sombrero.

*Figura 8.* Ejemplo de actividad tipo I

En relación con el indicador $I_{15}$, se solicita que muestre su grado de conformidad con la siguiente afirmación, teniendo como referencia la *Actividad tipo 1*: « Si los niños no saben contar no podrán realizar actividades como estas con éxito ». Un completo acuerdo (4) indicaría una inducción al uso de conteo como técnica para construir la colección.

Si el encuestado considera importante la realización de este tipo de actividades, se le cuestiona si es importante porque « los niños aprenden que contando se puede hacer un conjunto igual en cantidad que otro ». El acuerdo completo (4) muestra, de nuevo, un alto grado de inducción al conteo.

Por otro lado, si el encuestado considera que realizar este tipo de actividades no es importante, se indaga, para poder medir el indicador $I_{15}$, el grado de conformidad con la falta de importancia porque confunden a los niños, al poder usar técnicas no basadas en el conteo (p.e.: emparejamiento; reconocimiento súbito de la cantidad de elementos de los conjuntos; usar un conjunto intermedio, como los dedos de la mano o marcas en un papel, cuando no son capaces de contar o contar no tiene aún significado para ellos). De nuevo, un completo acuerdo muestra que se está realizando una inducción al conteo en la práctica docente.

## 5. A modo de síntesis

En el marco de la TAD, el análisis y la determinación de los modelos epistemológicos y didácticos dominantes constituye un problema central y fecundo de investigación, tanto para identificar fenómenos didácticos como para proponer posibles modelos alternativos para el estudio de determinados conocimientos matemáticos en una institución considerada. Según el patrón heurístico para la construcción de un problema de investigación a partir de un *problema docente* formulado por Gascón (2011), ello se corresponde principalmente con la *dimensión económica* de todo problema didáctico, que tiene que ver con « la observación y la descripción detallada de las OM y las OD que existen efectivamente en determinadas instituciones » (Gascón, 2011, p. 213).

Diversos trabajos de investigación realizados en la TAD (por ejemplo, en la educación secundaria, Bolea (2003) sobre el álgebra en secundaria; García (2005) sobre la proporcionalidad y las relaciones funcionales; Rodríguez (2005) sobre la resolución de problemas y la metacognición, y Cid (2016) sobre los números negativos) avalan la pertinencia y la fecundidad de esta línea de investigación.

Sin embargo, se echa en falta abordar este tipo de análisis desde un perspectiva teórica y metodológica, que contribuya a poner de manifiesto aspectos importantes que cualquier investigador debería tener en cuenta a la hora de llevar a cabo análisis de este tipo. Este artículo pretende ser una iniciación a dicho estudio. En particular, hemos comenzado a caracterizar la noción de « modelo epistemológico y didáctico dominante » como constructo dentro de la TAD, y lo hemos vinculado desde el punto de vista metodológico con la construcción previa de un MER, coincidiendo con Gascón (2011) en la necesidad que tiene el investigador de apoyarse en un MER construido *ad hoc*.

Ahora bien, caracterizar el constructo, aunque sea de manera provisional, no es suficiente para su estudio. Por ello, hemos propuesto un posible desglose del mismo en categorías e indicadores. Este desglose nos ha permitido identificar la importancia que tiene para el investigador la determinación del equipamiento praxeológico de la profesión docente para interpretar las prácticas docentes escolares. Entendemos que para poder describir y analizar el modelo dominante en torno a un saber en una institución docente, es necesario identificar cómo la profesión transforma el « saber a enseñar » en « saber enseñado », y considerar en qué medida esta transformación está condicionada por el equipamiento praxeológico disponible en la profesión en un periodo histórico determinado.

Así, en la segunda parte del artículo nos hemos centrado en la Educación Infantil en la actualidad, y en concreto en la enseñanza de los primeros conocimientos numéricos. Tras el esbozo de un posible MER en torno a estos, hemos propuesto un conjunto de posibles indicadores, que nos han servido como herramientas para elaborar un cuestionario con el que explorar rasgos importantes del MEDD en la EI en torno al número y la numeración.

La elaboración de estas herramientas abre así una línea de trabajo para los didactas, como muestran los primeros resultados descritos en (García, Lendínez & Sierra, 2017). Así mismo, se muestra la complejidad de la tarea y la necesidad de usar otras herramientas de diagnóstico (como pueden ser la de los grupos de discusión) y de combinar este trabajo con otros tipos de estudios como, por ejemplo, el análisis, por un lado, de libros de texto de EI descrito en García y Sierra (2015) y, por otro, de manuales utilizados en la formación de maestros de EI.

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado en el marco del proyecto EDU2012-39312-C03-02 del Plan Nacional de I+D+I (Ministerio de Economía y Competitividad)

## Referencias

Bolea, P. (2003). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. Zaragoza, España: Prensas Universitarias de Zaragoza.

Bosch, M. & Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. En Mercier, A. & Margolinas, C. (eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Bosch, M. & Gascón, J. (2007). 25 años de Transposición Didáctica. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa & F.J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 385-406). Jaén: Universidad de Jaén.

Bosch, M. & Gascón, J. (2009). Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 89- 113). Santander: SEIEM.

Briand, J., Loubet, M. & Salin, M.H. (2004). *Apprentissages mathématiques en maternelle* [Cédérom]. Paris: Hatier.

Chevallard, Y. (2009). *La TAD face au professeur de mathématiques*. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_TAD_face_au_professeur_de_mathematiques.pdf

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE UB-Horsori.

Cid, E. (2015). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos*. Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza.

Cirade, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques: entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel*. Tesis doctoral. Université de Aix-Marseille I.

Creswell, J. W. (2009). *Research Design: Qualitative, Quantitative and Mixed Methods Approaches*. California: SAGE Publications Inc.

El Bouazzaoui, H. (1985). *Étude de situations scolaires des premiers enseignements des nombres et de la numération*. Tesis Doctoral. Universidad de Burdeos.

García, F.J. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales.* Tesis doctoral. Universidad de Jaén.

García, F.J. & Sierra, T.A. (2015). Los modelos epistemológicos de referencia en el análisis de la actividad matemática en libros de texto: El caso del número en la escuela infantil. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 209-307). Alicante: SEIEM.

García, F.J., Lendínez, E.M. & Sierra, T.A. (2017). La enseñanza del número en la escuela infantil: Un estudio exploratorio del logos de la profesión. *Redimat, 6*(1), 33-54. doi: 10.4471/redimat.2017.2059

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 18*(1), 7-34.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4*(2), 129-159.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Relime, 14(2),* 203-231.

Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación Matemática, 25 años*, pp. 99-123

Gras, A. (1980). *Investigación del comportamiento. Métodos de investigación en ciencias sociales*. México: McGraw Hill Interamericana.

Kerlinger, F. & Lee, H. (2002). *Investigación del comportamiento. Métodos de investigación en ciencias sociales*. México: McGraw Hill Interamericana.

Krueguer, R.A. (1991). *El grupo de discusión. Guía práctica para la investigación aplicada*. Madrid: Pirámide.

Lacasta, E. & Wilhelmi, M.R. (2008). Juanito tiene cero naranjas. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L.J. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 403-414). Badajoz: SEIEM.

Lederman, L.C. (1990). Assesing Educational effectiveness: the focus group interview as a technique for data colection. *Communication Education, 38,* 117-127.

Margolinas, C. y Wozniak F. (2012). *Le nombre à l'école maternelle, une approche didactique*. Bruselas: De Boeck.

Martin, F. (2003). *Apprentissages mathématiques: jeux en maternelle. Livre du maître.* Burdeos: CRDP

Mora, M. (1971). *Medición y construcción de índices*. Buenos Aires: Nueva Visión.

O`Brien, K. (1993). Using focus groups to develop health surveys: an example from research on social relationships and AIDS- preventive behaviour. *Health Education Quarterly, 20*(3), 361-372.

Quevedo de Villegas, B. (1986). *Les situations et le processus dans l'apprentissage des nombres*. D.E.A. Universidad de Burdeos.

Rodríguez Quintana, E. (2006). *Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de matemáticas una propuesta integradora desde el enfoque antropológico*. Tesis doctoral. Universidad Complutense. Madrid.

Ruiz-Higueras, L. (2005). La construcción de los primeros conocimientos numéricos. En C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las Matemáticas para Educación Infantil*, pp. 181-219. Madrid: Pearson.

Ruiz-Olarría, A. (2015). *La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria. De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza*. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Madrid.

Sierra, T. Á. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas. Los sistemas de numeración y la medida de magnitudes*. Tesis Doctoral. Universidad Complutense. Madrid.

Sierra, T. Á. & Rodríguez-Quintana, E. (2012). Una propuesta para la enseñanza del número en la Educación Infantil. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 80*. pp. 25-52.

Ward, V.M., Bertrand, J.T. & Brown, L.F. (1991). The comparability of focus group and survey results. *Evaluation Review, 15*(2), 266-283.