ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i4p464-479

El problema didáctico del cálculo diferencial elemental como confluencia de tres líneas de investigación desarrolladas en el ámbito de la TAD

CATARINA LUCAS[1]

JOSEP GASCÓN[2]

CECILIO FONSECA[3]

JOSÉ CASAS[4]

Abstract. This paper aims to show how the didactic problem of elementary differential calculus connects and develops three research lines deeply interrelated and resulting from various emerging works of the anthropological theory of the didactic (ATD). As a result of this confluence it arises a proposal for a possible rationale for the study of elementary differential calculus at the beginning of the Portuguese university education.

Resumen. Esta comunicación tiene como objetivo mostrar hasta qué punto el problema didáctico del cálculo diferencial elemental entronca y desarrolla tres líneas de investigación profundamente relacionadas entre sí y resultantes de diversos trabajos emergentes de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD). Como resultado de esta confluencia surge una propuesta de una posible razón de ser para el estudio del cálculo diferencial elemental en el inicio de la enseñanza universitaria portuguesa.

1. Introducción

Este artículo se ubica en el nivel educativo entre la última etapa de la enseñanza secundaria y el principio de los estudios universitarios del sistema educativo portugués, aunque las conclusiones a las que llegaremos no están forzosamente circunscritas a este espacio institucional.

Trataremos el problema didáctico del *cálculo diferencial elemental* (CDE) y, en particular, la *razón de ser* de dicho ámbito de la actividad matemática escolar, esto es, las cuestiones que, para ser respondidas, requieren de manera imprescindible del CDE y de las tareas que sólo pueden llevarse a cabo (de manera fiable y económica) con el concurso de las técnicas y tecnologías que forman parte del CDE. Se trata, en consecuencia, de las cuestiones y las tareas que dan sentido al estudio de dicho ámbito en la institución de referencia.

En este trabajo, denominamos «cálculo diferencial elemental» (CDE) al ámbito de la organización matemática escolar que bajo el nombre de «cálculo» se imparte habitualmente en la última etapa de la enseñanza secundaria y en el primer curso universitario de diferentes

[1] Departamento de Matemática Aplicada I, Universidad de Vigo, España – catarinalucas.mail@gmail.com
[2] Departamento de Matemáticas, Universitat Autònoma de Barcelona, España – gascon@mat.uab.cat
[3] Departamento de Matemática Aplicada I, Universidad de Vigo, España – cfonseca@uvigo.es
[4] Departamento de Matemática Aplicada I, Universidad de Vigo, España – jmcasas@uvigo.es

El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza
Eje 3. *Cuestionar el mundo: avances hacia un nuevo paradigma*

grados del sistema educativo portugués, español y de otros muchos países (cálculo diferencial e integral con funciones de una variable).

Hemos de distinguir entre la razón de ser «oficial» que la institución escolar estipula para el CDE (las funciones que le asigna) y otras posibles razones de ser alternativas. Puede darse el caso que, en base a una investigación didáctica relativa a un cierto ámbito de la actividad matemática, se sienta la necesidad de postular una razón de ser distinta de la que le asigna el currículo oficial, lo que comportará la necesidad de modificar profundamente las cuestiones y las tareas que se suponía que daban sentido a dicho ámbito de la actividad matemática escolar (en una institución determinada). Esta razón de ser alternativa provocará, inevitablemente, una reformulación de la estructura de dicho ámbito y de su relación con el resto de las organizaciones matemáticas escolares. Ello puede interpretarse como la asignación de una nueva razón de ser a cierto ámbito de la matemática escolar, por parte de un *modelo epistemológico de referencia* (MER) alternativo al modelo epistemológico dominante en la institución en cuestión.

Digamos, por último, que la razón de ser de un ámbito de la actividad matemática, en una institución determinada, no tiene por qué ser única puesto que, entre otros motivos, diferentes razones de ser de un mismo ámbito pueden situarse en diferentes áreas o sectores de la matemática escolar. Así, por ejemplo, la razón de ser del álgebra lineal que forma parte del primer curso de múltiples grados universitarios, puede situarse en el ámbito de las geometrías lineales, de la estadística o de la programación lineal, entre otros. Además, dentro de cada uno de dichos ámbitos, las cuestiones y las tareas que requieren de manera imprescindible el uso de las técnicas del álgebra lineal pueden elegirse y estructurarse de diferentes formas. Es por esta razón que hablamos de *una posible razón de ser* (en lugar de hablar de *la razón de ser*) del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional.

El objetivo principal de este trabajo consiste en mostrar que el problema didáctico del cálculo diferencial elemental y, más precisamente, la problemática en torno a la *razón de ser* del CDE, lejos de constituir un problema aislado, surge de la confluencia de tres problemáticas que han sido objeto de investigación por parte de la comunidad científica que trabaja en el marco de la TAD. Las tres problemáticas están relacionadas en mayor o menor grado con un *fenómeno didáctico* muy general que se pone de manifiesto en la *rigidez, incompletitud relativa, desarticulación* y hasta *atomización* de las organizaciones matemáticas escolares que viven en la enseñanza secundaria tanto española como portuguesa y, en especial, en la relación de dicho fenómeno con las restricciones que inciden sobre la génesis y el desarrollo de la actividad de *modelización matemática* en las citadas instituciones.

2. Primera problemática: la rigidez de la actividad matemática escolar como restricción al desarrollo de la modelización en Secundaria y Universidad

La primera y más básica de las problemáticas que están en el origen de nuestro problema didáctico surgió precisamente cuando se empezó a estudiar este fenómeno didáctico general que, como hemos dicho, se manifiesta en la rigidez, atomización, incompletitud relativa y desarticulación de las organizaciones matemáticas escolares que viven en la enseñanza secundaria (española y portuguesa) y las restricciones que dicho fenómeno comporta para la vida de la *modelización matemática* en el paso de Secundaria a la Universidad (Fonseca, 2004; Lucas, 2010).

En particular, en el trabajo de Cecilio Fonseca (2004) se pone de manifiesto la atomización de las organizaciones matemáticas y la rigidez del tipo de tareas y de técnicas que los alumnos utilizan en la enseñanza secundaria española. También se muestra la ausencia escolar del *cuestionamiento tecnológico* de las técnicas matemáticas que se utilizan para realizar una tarea, esto es, la ausencia institucional de un análisis de su funcionamiento, en particular, del coste, la fiabilidad y el dominio de validez de las técnicas, lo que constituye una condición esencial para flexibilizar la actividad matemática escolar (Fonseca, 2004; Bosch, Fonseca & Gascón, 2004). Así, en la enseñanza secundaria española, las matemáticas surgen como una secuencia de conocimientos puntuales que consisten básicamente en aplicar técnicas predeterminadas a un cierto tipo de problemas, después de una presentación teórica descriptiva por parte del profesorado. En esta presentación pocas veces se cuestiona la necesidad de justificar la técnica utilizada para llevar a cabo la actividad matemática, ni tampoco, cuál es el dominio de validez de dicha técnica.

Posteriormente en Catarina Lucas (2010) y Catarina Lucas, Cecilio Fonseca, Josep Gascón y José Casas (2014a, 2014b) se muestra hasta qué punto y en qué sentido el fenómeno didáctico-matemático de la *desarticulación*, *rigidez* e *incompletitud* de las organizaciones matemáticas escolares es generalizable más allá de las instituciones escolares españolas y, en particular, a la enseñanza secundaria portuguesa.

De una forma general, los datos empíricos obtenidos en ambos estudios ponen de manifiesto que la atomización, la rigidez y la consiguiente incompletitud de las organizaciones matemáticas de la enseñanza secundaria constituyen un fenómeno didáctico relativamente independiente del profesor y de la cultura pedagógica del alumno. Incluso las diferencias más significativas entre las respuestas de los estudiantes de España y de Portugal (y que, en todo caso, son marginales) se explican principalmente a partir de diferencias en los currículos y en los libros de texto de los dos sistemas escolares. El análisis de los resultados nos permite concluir que hay una relación directa entre la baja frecuencia de determinadas tareas en los libros de texto y el pobre porcentaje de respuestas correctas de los estudiantes a los ítems relacionados con dichas tareas. Observamos así que alumnos con culturas, sociedades y tradiciones distintas y también, con niveles de enseñanza diferentes, manifiestan un comportamiento similar al contestar un cuestionario que pretende analizar el grado de incompletitud y atomización de ciertas organizaciones matemáticas, lo que nos lleva a creer que el tipo de actividad matemática que se propone en los sistemas escolares de Portugal y de España tiene muchos rasgos comunes. El rasgo común más importante, que puede ser considerado como una consecuencia de la rigidez de las organizaciones matemáticas escolares, es la baja frecuencia de *situaciones de modelización* en los libros de texto y, consecuentemente, la dificultad del alumnado para responder a las cuestiones que envuelven la *construcción* y la *manipulación de modelos* que traduzcan situaciones reales. El principal indicador del grado de completitud relativa de una praxeología matemática local lo constituye precisamente la existencia de tareas matemáticas "abiertas". Su importancia como indicador de la completitud proviene del hecho de que la existencia de *tareas abiertas* presupone *cierto grado de flexibilidad* de las técnicas y, además, implica que las organizaciones matemáticas puntuales han alcanzado *cierto grado de articulación*. No obstante, observando los resultados empíricos, tanto de los libros de texto como del cuestionario, concluimos que las organizaciones matemáticas escolares analizadas no satisfacen ninguno de los indicadores de completitud relativa descritos en Marianna Bosch, Cecilio Fonseca y Josep Gascón (2004, p. 215-220). En consecuencia, podemos afirmar que su estructura no presenta las condiciones necesarias para llevar a cabo la exploración de tareas abiertas con la posibilidad de perturbar el sistema inicial, modificando los valores asignados a los datos mediante la inclusión de nuevos datos que jueguen el papel de parámetros. Esta situación provoca restricciones ecológicas que hacen prever obstáculos importantes para el desarrollo de la actividad de modelización matemática más allá de la enseñanza secundaria.

El desarrollo de esta línea de investigación provocó la emergencia de la problemática relativa a las restricciones que dificultan el desarrollo de la modelización matemática en el inicio de la enseñanza universitaria y la necesidad de un estudio sistemático de la *ecología de la modelización matemática* en este nivel educativo. Diferentes estudios en esta dirección (Barquero, 2009; Serrano, 2013) han permitido describir algunas de las condiciones que se requieren para que sea posible el desarrollo de la modelización matemática en dicho nivel educativo, detectando las principales restricciones que lo dificultan.

Según Berta Barquero (2009), la forma de conceptualizar la modelización matemática en la TAD, supone reinterpretar y reformular los procesos de modelización para situarlos dentro de un modelo epistemológico general de la construcción y difusión institucional de los conocimientos matemáticos. Esta *reinterpretación* se basa en un análisis epistemológico del *papel de la modelización en la actividad matemática* y modifica en varios aspectos importantes la forma en que se utiliza habitualmente la noción de "modelización matemática" en el ámbito de la Educación Matemática. En la TAD se explica la modelización matemática *como un instrumento de articulación de la actividad matemática escolar* (ver apartado 5).

En síntesis, estos estudios mostraron que el *modelo docente* habitual, que se sitúa dentro del paradigma *monumentalista* (Chevallard, 2013), junto al *modelo epistemológico* de las matemáticas, que lo sustenta, constituyen una importante fuente de restricciones en la vida escolar de la modelización matemática. Estas restricciones se manifiestan, en especial, en la manera como desde dicho modelo epistemológico se interpreta la relación entre las matemáticas y las diferentes disciplinas[5] en las que surgen los sistemas cuyo estudio requiere que sean modelizados matemáticamente. Dicha relación ha sido caracterizada mediante la noción de *aplicacionismo* (Barquero, Bosch & Gascón, 2014).

La respuesta para empezar a establecer las condiciones necesarias, que posibiliten la vida institucional de la modelización matemática, empieza por construir un MER estructurado como una red de praxeologías de complejidad y completitud crecientes, cuya dinámica de desarrollo viene guiada por procesos sucesivos de modelización matemática. Dicho MER *asigna una razón de ser alternativa a la modelización matemática*, (esto es, redefine la estructura y las funciones de la actividad de modelización matemática en el primer curso de enseñanza universitaria) y ha servido de base, en cada caso, para diseñar y experimentar diferentes

[5]. Los datos empíricos se han obtenido en el ámbito de los estudios universitarios de ciencias experimentales (Barquero, 2009) y de ciencias económicas y empresariales (Serrano, 2013).

recorridos de estudio e investigación (REI) en el citado nivel educativo (Barquero, 2009; Serrano, 2013).

Uno de los objetivos principales de la propuesta de los REI es el de introducir en la escuela una nueva epistemología que se propone reemplazar el paradigma escolar monumentalista, que se caracteriza por el *inventario y la exposición de los saberes*, por un paradigma del *cuestionamiento del mundo* (Chevallard, 2005), para dar sentido al estudio escolar de las matemáticas en su conjunto, transportando a la escuela una actividad de estudio más cercana al ámbito de la investigación.

La modelización matemática tiene un papel esencial en este proceso por varios motivos. En primer lugar, la producción de "respuestas provisionales" a la cuestión generatriz requiere la construcción de modelos, su utilización y el cuestionamiento de su ámbito de validez, generando así nuevas cuestiones que, a su vez, requieren un nuevo proceso de modelización. Durante la evolución de un REI el cuestionamiento de estas respuestas provisionales que se van obteniendo se incorpora en todo momento a la actividad de modelización. Este cuestionamiento es el *motor* del proceso de modelización y, por lo tanto, de la estructura arborescente y articulada de los REI.

En segundo lugar, los REI permiten explicitar, institucionalizar y evaluar el proceso global de modelización. Esto es posible dado que el proceso de estudio generado por los REI tiene cierta continuidad en el tiempo, logrando superar la atomización tradicional del estudio escolar de las matemáticas. Además, dado que el objetivo de un REI es dar respuesta a ciertas cuestiones y no aprender (o enseñar) ciertos conceptos establecidos a priori, el proceso de modelización (que incluye las respuestas que se aportan a la cuestión generatriz y a las cuestiones derivadas) puede considerarse como un objetivo de la enseñanza en sí mismo y no como un medio para construir nuevos conocimientos. El desarrollo de un REI supone dar importancia tanto al proceso de estudio encarnado en una actividad de modelización como a la respuesta que este genera.

3. Segunda Problemática: la desarticulación de la relación de proporcionalidad respecto del resto de relaciones funcionales que aparecen en la enseñanza secundaria

El fenómeno general de la rigidez, desarticulación e incompletitud de las organizaciones matemáticas de la enseñanza secundaria, descrito en la primera problemática no es un fenómeno uniforme cuyas consecuencias puedan describirse de una vez por todas y de forma similar en todos los casos. Por el contrario, en cada ámbito de la actividad matemática este fenómeno se manifiesta mediante características y consecuencias específicas que dependen de los contenidos matemáticos involucrados, aunque en todos los casos estudiados hasta la fecha se ha podido constatar que provoca restricciones de uno u otro tipo en la vida escolar de la modelización matemática.

Una de las manifestaciones del citado fenómeno general en un ámbito específico de la enseñanza secundaria obligatoria la constituye la llamativa desarticulación de la relación de *proporcionalidad* respecto al resto de *relaciones funcionales* que aparecen en dicho nivel educativo (García, 2005; García et al., 2006).

Fue precisamente con el objetivo de suavizar las consecuencias didácticas de este fenómeno que, en Francisco Javier García (2005), se construyó un MER en torno a la modelización de los *sistemas de variación entre magnitudes* que asigna a dicho ámbito una *razón de ser* alternativa a la que le estipula el sistema escolar [6]. Este MER articula diferentes tipos de variación entre magnitudes *discretas* y ha servido de base para diseñar y experimentar un REI con alumnos de cuarto curso de enseñanza secundaria obligatoria española (alumnos de 16 años).

Debido a las restricciones institucionales, los sistemas de variación considerados en este trabajo se restringieron al caso de magnitudes *discretas*, lo que implicó que la actividad matemática generada se circunscribiera al trabajo con sucesiones y ecuaciones en diferencias finitas elementales. Además, por las mismas razones, los tipos de variación considerados se ciñeron a los que están caracterizados mediante determinadas condiciones elementales (de *equidad*, de *linealidad*, de *diferencias de orden n constantes*, de *razones constantes* y de *linealidad inversa*).

En síntesis, el MER construido en F. J. García (2005) y en F. J. García et al. (2006) articula en una misma *praxeología matemática regional* un cierto universo, previamente construido, de tipos de variación elemental entre magnitudes discretas. Y aunque dicho MER no explicita, debido a las restricciones institucionales citadas, el paso de las relaciones entre magnitudes *discretas* a las correspondientes relaciones entre magnitudes *continuas*, constituye una propuesta de articulación entre la relación de *proporcionalidad* y el resto de relaciones funcionales elementales que aparecen en la enseñanza secundaria[7]. Esta articulación no se hace simplemente en el nivel de las relaciones funcionales consideradas en abstracto, sino encarnadas en un REI sobre los *Planes de Ahorro*. Dicho en otros términos, no se articula un conjunto de funciones elementales (entre las que se encuentra la función de proporcionalidad) sino que se articula un conjunto de *modelos funcionales* contextualizados en diferentes Planes de Ahorro, cada uno de los cuales viene caracterizado por un *tipo particular de variación* entre dos magnitudes discretas.

Este trabajo constituye un importante antecedente del problema didáctico del CDE puesto que en este se pone de manifiesto otro aspecto del fenómeno general de desarticulación de la matemática escolar:

> ¿Existen otros *ámbitos* de la matemática escolar en los que se manifiesta el *fenómeno de la desarticulación*? ¿Cuáles son estos ámbitos? ¿Cómo se manifiesta? ¿Hasta qué punto las manifestaciones del *fenómeno de la desarticulación* en un ámbito concreto de la matemática escolar dependen del contenido matemático específico? (García, 2005, p. 525)

En resumen, la segunda problemática que confluye en el problema didáctico del CDE surgió al estudiar un fenómeno que puede considerarse como una manifestación específica del fenómeno general descrito anteriormente y que se revela en la desarticulación de la relación de

[6]Asignar a un ámbito de la matemática escolar una razón de ser diferente a la que le asigna oficialmente el sistema escolar y hacerlo para sacar a la luz un fenómeno didáctico que se pretende indagar, constituye una de las principales funciones de los MER construidos en el marco de la TAD (Gascón, 2014).

[7]Dado que en la enseñanza secundaria (española y portuguesa) las citadas relaciones funcionales aparecen explícitamente como *funciones* reales de variable real, que pueden interpretarse como funciones entre magnitudes continuas, el marco teórico natural para describir, interpretar y justificar la actividad matemática que se lleva a cabo para integrar los modelos de proporcionalidad en el universo de los modelos funcionales elementales es precisamente la teoría de las *funciones reales de variable real*.

proporcionalidad respecto al resto de *relaciones funcionales* que aparecen en la enseñanza secundaria obligatoria (García, 2005; García et al., 2006). Para estudiar dicho fenómeno y, al mismo tiempo, proponer una posible dirección de cambio de la estructura de las praxeologías matemáticas involucradas, los autores citados construyeron una praxeología matemática regional que articula un cierto conjunto, previamente construido, de tipos de variación elemental entre magnitudes discretas, entre las que figura la relación de proporcionalidad. Veremos, además, que al estudiar el problema didáctico del CDE se generalizan algunos de los resultados obtenidos en F. J. García (2005).

4. Tercera problemática: los niveles de modelización funcional como desarrollo de las investigaciones sobre el proceso de algebrización y conjetura de Ruiz-Munzón

Al profundizar en el estudio de la *modelización funcional* como desarrollo de las investigaciones sobre el proceso de algebrización de la actividad matemática y para superar las restricciones que dificultan la vida escolar de la modelización (en este caso se trata de la modelización funcional *con parámetros* en el paso de la enseñanza secundaria obligatoria al Bachillerato), se construyó un MER que, además de ampliar el MER del álgebra elemental, contiene una sucesión de praxeologías de complejidad y completitud crecientes cuya dinámica de desarrollo viene guiada por la progresiva asunción de *tres niveles de modelización funcional* (Ruiz-Munzón, 2010):

– *Primer nivel*: el que se materializa en modelos que se expresan mediante funciones aisladas de una única variable y las correspondientes ecuaciones (e inecuaciones) asociadas;
– *Segundo nivel*: el que se materializa en modelos que se expresan mediante familias de funciones de una variable y las correspondientes ecuaciones (e inecuaciones) paramétricas asociadas;
– *Tercer nivel*: el que se materializa en modelos que se expresan mediante familias de funciones de dos o más variables y las correspondientes fórmulas asociadas.

Este MER también sirvió de base para diseñar y experimentar un REI que, en este caso, pretende favorecer las condiciones que hacen posible el desarrollo de la modelización funcional con parámetros en el paso de la enseñanza secundaria obligatoria al Bachillerato.

En el desarrollo de la experimentación de este REI se pusieron de manifiesto *limitaciones técnicas* para responder a cuestiones que surgen a lo largo del proceso de modelización funcional con parámetros. Dichas limitaciones están relacionadas principalmente con la carencia de ciertas técnicas específicas del cálculo diferencial y, especialmente, con la ausencia escolar de determinados tipos de tareas (y, por consiguiente, de las técnicas asociadas) relativas al papel del cálculo diferencial en la construcción y el trabajo con modelos funcionales. La descripción de esos tipos de tareas se puede consultar en C. Lucas (2015, pp. 150-173). Se formuló así una conjetura, que llamaremos *conjetura de Ruiz-Munzón*, según la cual la «razón de ser» del cálculo diferencial, esto es, las cuestiones problemáticas que dan sentido al estudio del cálculo diferencial en la última etapa de la enseñanza secundaria, debería situarse en el ámbito de la *modelización funcional*. En concreto, Ruiz-Munzón postula:

> […] la modelización funcional debería constituir la razón de ser del cálculo diferencial del Bachillerato y primeros cursos universitarios. Pero hemos de reconocer que se necesita un estudio más detallado para contrastar empíricamente dicho postulado lo que requerirá, en particular,

desarrollar el MER propuesto para la modelización algebraico-funcional de tal manera que integre la actividad matemática elemental en torno al cálculo diferencial e integral. (Ruiz-Munzón, 2010, p. 379, volume1)

El significado de esta conjetura depende, obviamente, de lo que se entienda por *cálculo diferencial* y por *modelización funcional*. Si bien en la tesis en la que se basa este trabajo (Lucas, 2015) se asume provisionalmente la caracterización, que se propone en Noemí Ruiz-Munzón (2010), del desarrollo hipotético de la modelización funcional en tres niveles caracterizados mediante praxeologías matemáticas de complejidad y completitud crecientes. La respuesta que proponemos al problema didáctico del CDE consiste esencialmente en reformular y ampliar de manera radical la noción de *modelización funcional* y situar en este ámbito una posible razón de ser del *cálculo diferencial elemental.*

5. Aportaciones del estudio del problema didáctico del cálculo diferencial elemental a cada una de las tres problemáticas

Entre las primeras aportaciones de la tesis (Lucas, 2015) hay que citar, precisamente, la construcción del problema didáctico del CDE como confluencia de las tres grandes líneas de investigación descritas y, consecuentemente, las contribuciones que nuestro estudio de dicho problema aporta a cada una de dichas líneas. Así, una vez descritas las tres problemáticas que convergen en este trabajo, formularemos la relación que establecemos con cada una de ellas.

En lo que respecta a la tercera problemática, con el objetivo de profundizar en el significado de la conjetura de Ruiz-Munzón, proponemos una redefinición de la noción de «modelización funcional» (MF) que *amplía* en gran medida, al tiempo que *detalla y precisa* los tipos de tareas que forman parte de la actividad de MF.

Para reformular la noción de MF, empezamos por hacer un esquema detallado de los tipos de tareas que proponemos como componentes de los *cuatro estadios* del proceso de MF (Chevallard, 1989; Gascón, 2001a):

– *Primer estadio*: Delimitación o construcción del sistema a modelizar en el que se formulan cuestiones problemáticas y conjeturas.

– *Segundo estadio:* Construcción del modelo matemático y reformulación de las cuestiones iniciales en términos del modelo.

– *Tercer estadio:* Trabajo técnico dentro del modelo e interpretación de este trabajo y de los resultados en términos del sistema.

– *Cuarto estadio:* Necesidad de un nuevo proceso de modelización para responder a nuevas cuestiones.

Además el esquema está dividido en dos grandes campos: el *discreto* y el *continuo*. Así, cuando una determinada actividad (o tipo de tareas) está situada sobre la línea ecuatorial significa que ésta podrá ayudar a transitar de uno al otro campo o que dicha actividad podrá desarrollarse tanto en el campo discreto como en el campo continuo.

Materializaremos este esquema del MER mediante un diagrama de actividad que denominamos *diagrama de actividad de modelización funcional* (ver figura 1).

Las principales aportaciones del MER que se sustenta en dicho esquema son las siguientes:

– explicitar detalladamente diferentes procesos de construcción, utilización y comparación de los modelos funcionales, la relación entre ellos y el papel que juega el CDE en los mismos.
– tomar en consideración las relaciones entre los modelos funcionales discretos y los continuos y, por tanto, completar relativamente el presentado en N. Ruiz-Munzón (2010).
– permitir trabajar inicialmente con modelos construidos a partir de datos discretos y expresados en términos de sucesiones o de ecuaciones en diferencias finitas como paso previo a la construcción de los modelos funcionales continuos (polinómicos, exponenciales, logarítmicos, logísticos, etc.).
– utilizar diferentes tipos de regresión sobre datos discretos para pasar de los modelos discretos a los modelos continuos ya sea partiendo de los datos brutos, de la tasa de variación media (TVM) o de la tasa de variación media relativa (TVMR), para construir modelos funcionales que ajusten un conjunto de datos discretos.
– justificar y evaluar el proceso de aproximación de los modelos variacionales discretos (formulados en términos de ecuaciones en diferencias finitas) mediante modelos diferenciales «aproximados» continuos (dados mediante ecuaciones diferenciales).
– mostrar que, dependiendo de la naturaleza del sistema a modelizar, la aproximación por regresión sobre la TVM o la TVMR (sucesiones que se obtienen a partir de los datos brutos) proporciona modelos funcionales relativamente más ajustados y, sobre todo, con mejor capacidad predictiva que los que se obtienen aproximando directamente los datos discretos brutos.
- poner de manifiesto la economía técnica que supone el paso de lo discreto a lo continuo mostrando, mediante cálculos explícitos, en qué sentido y para responder a qué tipo de cuestiones las técnicas del CDE son más económicas que las técnicas algebraicas de la matemática discreta. Se comprueba, por ejemplo, que cuando se trata de «controlar un modelo», esto es, prever su comportamiento a largo plazo o construir un modelo que cumpla ciertas condiciones dadas de antemano, las técnicas del CDE son mucho más potentes y económicas que las técnicas algebraicas.
– construir y articular diferentes tipos de variación (tanto entre magnitudes discretas como entre magnitudes continuas) definiendo el universo de tipos de variación que se tomarán en consideración. Cada uno de estos tipos se caracterizará imponiendo condiciones (hipótesis) sobre la TVM o sobre la TVMR (aunque estas últimas también se pueden expresar como condiciones sobre la TVM). Se delimitará de esta forma un cierto universo de tipos elementales de variación.
– interpretar, utilizando las técnicas del CDE, el significado de los parámetros de un modelo funcional en términos del sistema y, más concretamente, en términos de la variación de una variable del sistema respecto de otra.
– utilizar el CDE para estudiar todas las propiedades locales de los modelos funcionales construidos (que posteriormente se interpretarán en términos de las variables que definen el sistema modelizado).
– construir con técnicas algebraicas la propia función modelo o bien su derivada en el caso de partirse de datos continuos. En este último caso, el modelo funcional «exacto» (que puede ser una familia de funciones) se construye integrando una ecuación diferencial.
– dar respuesta a una cuestión generatriz suficientemente general y relativamente ambigua en el sentido que debe ser una cuestión formulada con “parámetros” abiertos que sólo progresivamente deben convertirse en datos concretos.

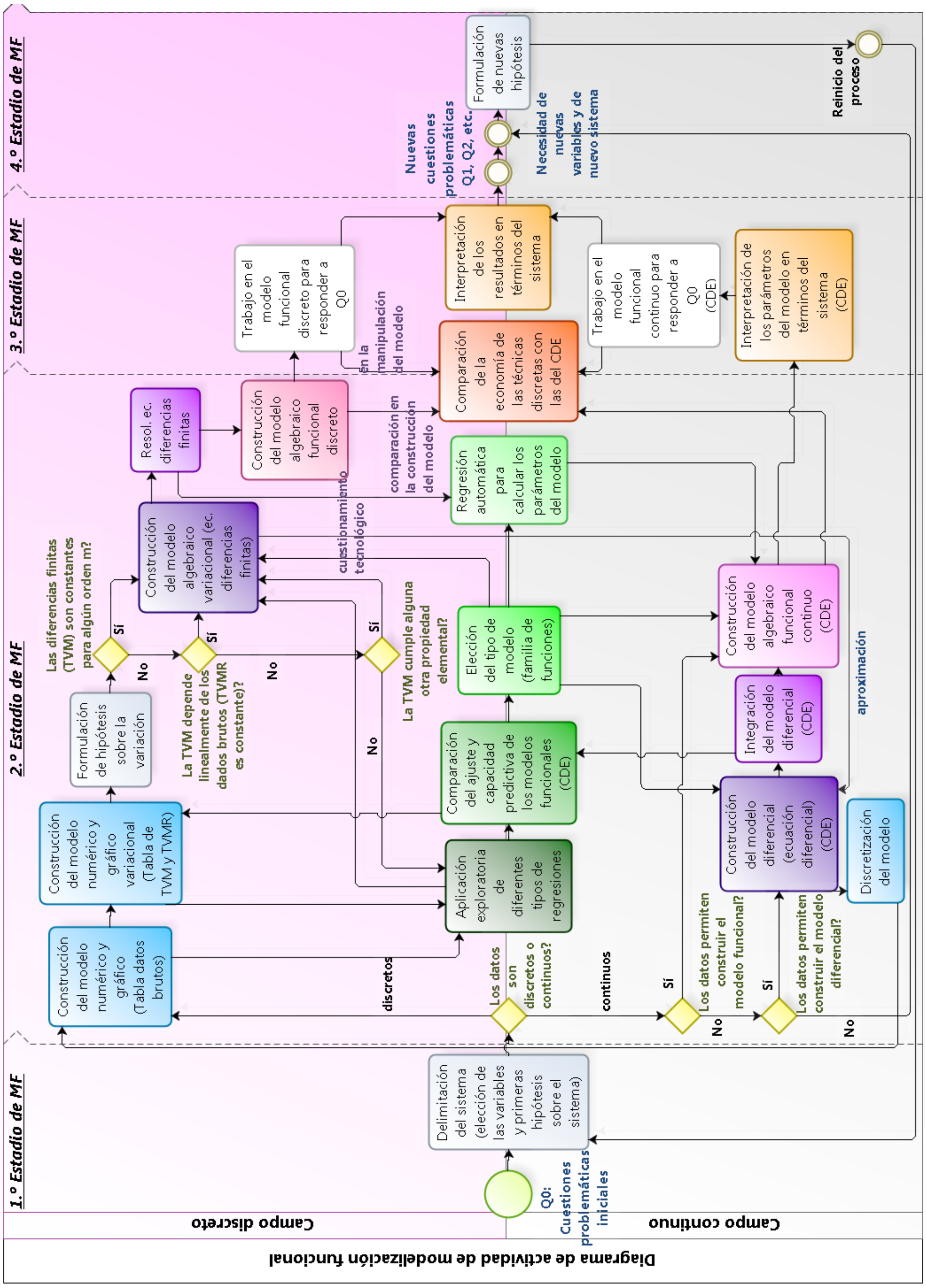

Figura 1. Diagrama de actividad de modelización funcional.

Así, en este diagrama se muestra que una *posible razón de ser* para el estudio del CDE en el final de la secundaria e inicio de la Universidad podrá residir en la *construcción de modelos funcionales* (tanto a partir de datos continuos como discretos), y su *interpretación en términos del sistema* que estos pretenden modelizar y no únicamente en el *trabajo dentro de dichos modelos* previamente construidos (dados de antemano).

De este modo, se postula que el modelo epistemológico de referencia propuesto sustenta la conjetura de N. Ruiz-Munzón (2010) y supera las *limitaciones técnicas* para responder a cuestiones que surgen a lo largo del proceso de modelización funcional con parámetros que fueron observadas en el desarrollo de su experimentación.

En lo que respecta a la segunda problemática, el MER propuesto permite superar las restricciones institucionales observadas en F. J. García (2005) que impedían el estudio de los sistemas de variación de magnitudes *continuas*, el estudio del CDE (en particular, de las ecuaciones diferenciales) y de otros tipos de variación (por ejemplo, construir un modelo exponencial a partir del conocimiento de que la TVMR sea constante). Así, este MER permite ampliar y relacionar la *praxeología matemática regional* de tipos de variación elemental entre magnitudes discretas, descrita en F. J. García (2005) y en F. J. García et al. (2006), con una *praxeología matemática regional* de tipos de variación elemental entre magnitudes continuas.

Por último, en relación a la primera problemática, recordemos que el problema didáctico del CDE surgió para estudiar el fenómeno de la desarticulación de la *modelización funcional* situado en el paso de Secundaria a la Universidad. Una de las manifestaciones de este fenómeno, en el caso específico de la modelización funcional, es la ausencia escolar de una posible razón de ser del cálculo diferencial elemental en este ámbito y las restricciones que esta ausencia comporta para el propio desarrollo de la modelización funcional en dicho nivel educativo.

De un modo general para seguir avanzando en el estudio del *fenómeno de la desarticulación* de diferentes dominios de la matemática escolar (como, por ejemplo, el que se da entre la relación de proporcionalidad y las relaciones funcionales elementales descrito anteriormente, o bien, entre la geometría sintética y la geometría analítica (Gascón, 2001b)), hemos indagado el fenómeno específico de la *desarticulación escolar entre el CDE y la MF* en el último curso de secundaria y primer curso universitario. Hemos empezado a analizar la evolución histórica del papel del CDE en la enseñanza secundaria portuguesa, el origen transpositivo de dicho fenómeno, las condiciones que lo mantienen y sus principales consecuencias didácticas.

Por otra parte, mediante los diferentes tipos de procesos de modelización funcional caracterizados en el diagrama, hemos llevado a cabo una forma particular de articular las praxeologías matemáticas escolares en torno a las principales nociones del CDE que, mayoritariamente, se presentan como praxeologías puntuales y aparecen aisladas en la matemática escolar.

6. Ejemplos de REI experimentados con estudiantes de Medicina Nuclear

En C. Lucas (2015) fueron construidos y experimentados diversos REI basados en el MER representado mediante el diagrama de actividad de MF que hemos presentado en la figura 1. La experimentación fue llevada a cabo con estudiantes del primer año de la Licenciatura de Medicina Nuclear de la enseñanza universitaria portuguesa (estudiantes que ya dominaban el cálculo de derivadas y que iniciaban el estudio de cálculo de primitivas). Así, el diagrama ha funcionado como un «esqueleto matemático» de soporte al diseño didáctico de secuencias de actividades matemáticas de modelización funcional que articulaban dos problemas básicos (P_i) de Medicina Nuclear con cinco cuestiones problemáticas principales (Q_i) y las correspondientes cuestiones derivadas (Q_{ij} , Q_{ijk}), con sus ampliaciones respectivas (Q'_i , Q''_i , Q'''_i), con las fichas de trabajo propuestas (F_i) para desarrollar las técnicas (T_i) y con las respectivas respuestas (R_i). Tal articulación aparece descrita en el esquema de la figura 2.

6.1. REI sobre uso de radiofármacos para diagnóstico del cáncer

Partiendo de una cuestión generatriz (Q_0*: ¿Cómo preparar y administrar un radiofármaco para diagnosticar el cáncer de tiroides?*) se estudió el procedimiento técnico habitualmente utilizado en Medicina Nuclear para construir un "*mapeamiento*" de órganos introduciendo en el organismo de los pacientes radioisótopos artificiales (radiotrazadores) que emiten radiaciones, a medida que se desintegran. En la preparación del radiofármaco surgió la necesidad de estudiar la velocidad de desintegración del radioisótopo asociado (Q_1*:¿Cómo varía la masa de un isótopo radioactivo a lo largo de su desintegración?).* En cooperación con los profesores del Área de Medicina Nuclear, los estudiantes buscaron una respuesta a esta cuestión en artículos científicos, encontrando información relativa a datos discretos reales referentes a la masa/actividad del Molibdenium-99/Xenon-133. En las clases de Matemática, los estudiantes ya habían trabajado previamente la noción de variación entre magnitudes discretas y continuas, técnicas de cálculo de la tasa de variación media/relativa y técnicas de derivación. Así, desarrollaron una respuesta R_1 mediante la construcción de un *modelo discreto exponencial* que describiese esos datos a partir de la formulación de hipótesis sobre la variación (absoluta y relativa) de los mismos y cálculo de sus diferencias finitas (modelo variacional). Para preparar el radiofármaco, además del estudio de la variación de la masa del radioisótopo, es necesario saber *cómo podrá variar la concentración del radiofármaco en el plasma sanguíneo de un paciente, t minutos después de su administración* (Q_2). La respuesta R_2 a esta cuestión fue desarrollada a partir del trabajo de un modelo continuo ya construido (modelo exponencial, racional o definido a trozos). Se utilizaron herramientas del CDE para estudiar su comportamiento, formular nuevas hipótesis y ampliar el sistema inicial para comparar la evolución de la concentración del radiofármaco en dos o más organismos diferentes (Q'_2). La construcción de la respuesta R'_2 envuelve técnicas relativas al *estudio de familias de modelos funcionales* y, por lo tanto, requiere la introducción de parámetros.

Por otro lado, en el caso de conocerse de antemano un modelo sencillo (polinómico, trigonométrico, exponencial o logarítmico) que describa la velocidad de concentración del radiofármaco en el plasma de un paciente a lo largo del tiempo, ¿*cómo se podrá descubrir un modelo que represente su concentración*? (Q''_2+Q_3). Para dar respuesta a estas cuestiones surgió la necesidad de estudiar la noción de *antiderivada de una función* y las *técnicas de cálculo de primitivas inmediatas* para resolver una ecuación diferencial elemental que consiste en integrar el *modelo algebraico-diferencial* para obtener el *modelo algebraico-funcional*.

Para trabajar el modelo construido y responder a ciertas cuestiones más concretas surgió la necesidad de introducir la noción de integral definida. Al ampliar la situación inicial cambiando el tipo de modelo que describe la velocidad de concentración del radiofármaco en el plasma por un modelo un poco más complejo (de integración no inmediata) surge la necesidad de estudiar nuevas técnicas tales como la *técnica de cálculo de primitivas por partes, por sustitución o por fracciones simples.* Este desarrollo del proceso de MF muestra que una de las razones de ser del cálculo integral, en el primer año de la Universidad, consiste en facilitar la *construcción de modelos funcionales* a partir de modelos diferenciales (datos continuos).

6.2. REI sobre la evolución de casos de cáncer de tiroides

Tomando ahora una ampliación de la cuestión problemática inicial Q_0 para estudiar la evolución temporal de los casos de cáncer de tiroides en niños y jóvenes de Bielorrusia después del accidente de Chernóbil (Q_4), se tomaron datos reales discretos de un informe científico y se buscó construir un modelo funcional que describiese esos datos. Dado que los datos discretos no cumplían ninguna de las hipótesis relativas a los tipos elementales de variación de magnitudes se construyó una respuesta R_4 cristalizada en un modelo continuo a partir de técnicas de regresiones automáticas con GeoGebra. Al trabajar dicho modelo para hacer previsiones del número de casos para los años siguientes y al interpretar dichos resultados en términos del sistema, se llegó a conclusiones absurdas que condujeron a la necesidad de efectuar un cuestionamiento de las técnicas matemáticas utilizadas.

Para contrastar la hipótesis según la cual las regresiones aplicadas a datos variacionales proporcionarían modelos más ajustados y con mejor capacidad predictiva que los modelos obtenidos a partir de las regresiones sobre los datos brutos, se experimentaron regresiones sobre los datos de la TVM y de la TVMR. Sin embargo, con este conjunto de datos no fue posible verificar la hipótesis. Así, para averiguar si esta dependía de la naturaleza del fenómeno modelizado, se partió de una nueva cuestión problemática ($Q_{5:}$ *¿Cómo describir la propagación de los efectos genéticos de las radiaciones ionizantes y la repercusión en las generaciones siguientes al accidente de Chernóbil?*) y se estudió un nuevo sistema con nuevos datos sobre los cuales se experimentaron técnicas de regresión sobre los datos brutos, sobre los datos de la TVM y sobre los datos de la TVMR. Más concretamente, la respuesta R_5 se basó en la construcción de un modelo continuo a partir de datos discretos y en el trabajo para prever la evolución del impacto de esos efectos genéticos en las generaciones futuras. En este caso sí que se verificó la hipótesis, lo que sugiere que esta depende efectivamente del tipo de fenómeno modelizado.

Al final se comparó la economía de las técnicas discretas (diferencias finitas) con la economía de las técnicas del CDE (derivada, integral) en la construcción y manipulación de modelos funcionales constatando la mayor economía del CDE en comparación con las técnicas algebraicas de resolución de ecuaciones en diferencias finitas, lo que constituye una de las justificaciones del paso del campo discreto al campo continuo en los procesos de modelización funcional.

En C. Lucas (2015, cap. V) se describe detalladamente en qué medida se ha utilizado el paradigma del cuestionamiento del mundo con los estudiantes universitarios, qué tipo de responsabilidades han asumido los mismos al realizar la actividad matemática necesaria para dar respuesta a la cuestión generatriz y a las cuestiones derivadas, qué tipos de medios y media se han utilizado para llevar a cabo el proceso de estudio, a qué tipo de condiciones y restricciones se ha tenido que enfrentar el profesor en la dirección del proceso, qué tipo de debilidades se han encontrado en el desarrollo de los procesos de estudio.

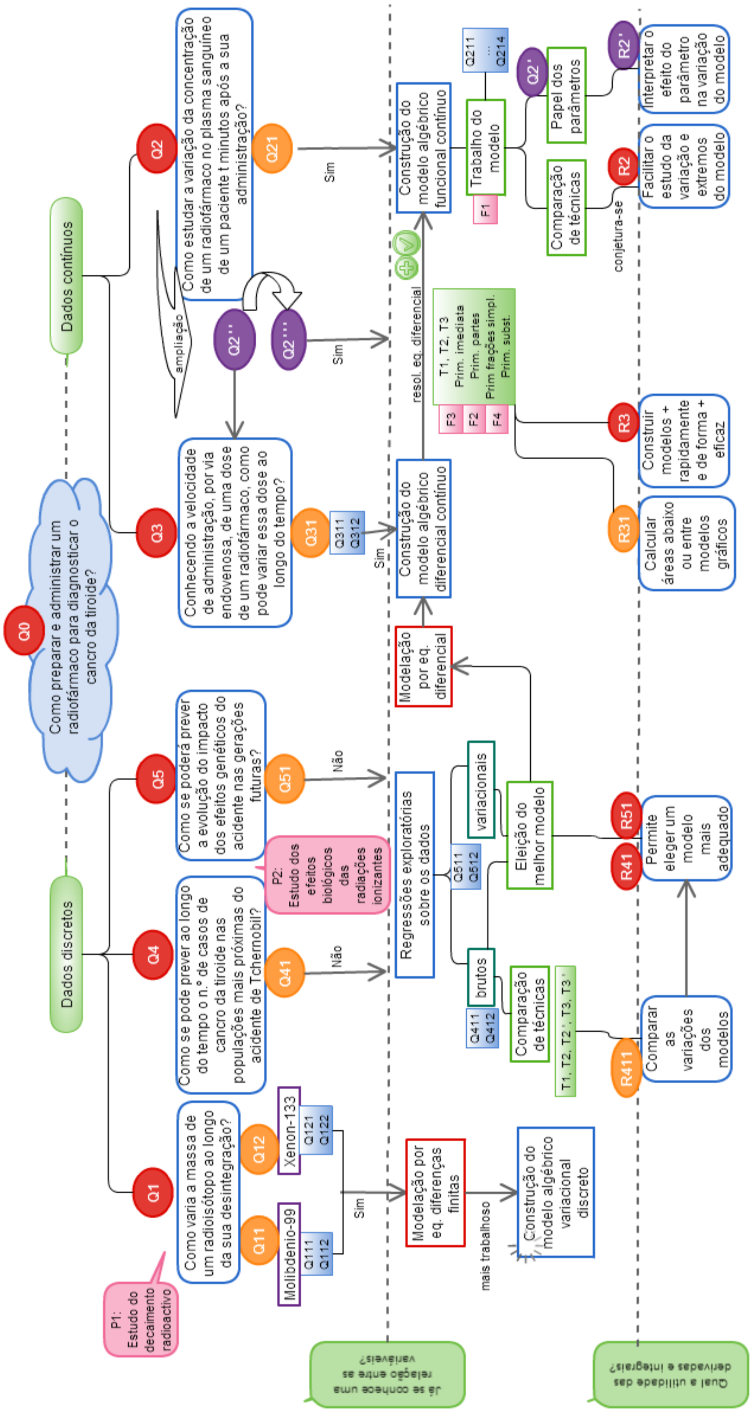

Figura 2. Articulación de los procesos de estudio de los dos problemas básicos de Medicina Nuclear.

7. Conclusión

El *análisis a posteriori* de la experimentación que hemos llevado a cabo muestra que la redefinición de la MF que dicho MER propone y la consiguiente razón de ser que asigna al CDE en dicho ámbito, constituyen condiciones que favorecen la vida de la MF en el inicio de la enseñanza universitaria y, más concretamente, en un primer curso de Medicina Nuclear. Dicho análisis ha puesto de manifiesto, asimismo, algunas de las restricciones que dificultan en una u otra forma el desarrollo normal de dicha actividad. Estos resultados deben considerarse, como hemos dicho, un *aporte al estudio del fenómeno didáctico general* de la *rigidez, incompletitud* *relativa* y *desarticulación* de las organizaciones matemáticas escolares (Fonseca, 2004; Lucas, 2010) y, sobre todo, a la relación de dicho fenómeno con las restricciones que inciden sobre la génesis y el desarrollo de la actividad de *modelización matemática* (Barquero, 2009; Serrano, 2013) que, en nuestro caso, se refiere específicamente a la *modelización funcional* (MF), desarrollada con ayuda del cálculo diferencial elemental, en un primer curso de estudios universitarios.

Se pone así de manifiesto que la confluencia y consiguiente articulación de los resultados obtenidos en diferentes líneas de investigación asociadas a diferentes problemáticas y relacionadas con fenómenos concomitantes, permite aumentar el conocimiento de dichos fenómenos y, al mismo tiempo, plantear nuevos problemas más profundos. Esta constatación indica la necesidad de superar el tradicional aislamiento de las conclusiones que se desprenden de las diferentes investigaciones didácticas que tratan sobre un mismo tema (por ejemplo sobre el cálculo diferencial elemental) y que es fruto, en gran medida, del correspondiente aislamiento de las problemáticas que se plantean.

Agradecimientos

Este trabajo tuvo el apoyo de la FCT (Portugal) mediante la beca SFRH/BD/77335/2011 y del Proyecto "*La modelización matemática para la formación del profesorado de secundaria: del algebra al cálculo diferencial*" (EDU2012-39312-C03-03).

Referencias

Barquero, B. (2009). *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas*. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2014). Incidencia del «aplicacionismo» en la integración de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias*, 32 (1), pp. 83-100.

Bosch, M., Fonseca, C. & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las Organizaciones Matemáticas Locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24(2-3), 205-250.

Chevallard, Y. (1989)*: Arithmétique, Algèbre, Modélisation. Étapes d'une recherche*. Publications nº 16 de l'IREM Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (2005). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique et nouvelle épistémologie scolaire. En : Ducourtioux, C., Hennequin, P.-L. (Éds.) *La place des mathématiques vivantes dans l'enseignement secondaire. Publications de l'APMEP nº 168*, 239-263. Paris: APMEP.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. In Bosch, M. (Ed.), *Proceedings of the IV Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (p. 21-30). Barcelona, Spain: FUNDEMI-IQS.

Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2 (2), 161-182. doi: 10.4471 /redimat.2013.26

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad*. Tesis doctoral. Universidad de Vigo.

García, F. J. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales.* Tesis doctoral. Universidad de Jaén. Obtenida en http://www.atd-tad.org/documentos/la-modelizacion-como-herramienta-de-articulacion-de-la-matematica-escolar-de-la-proporcionalidad-las-relaciones-funcionales/

García, F. J., Gascón, J., Ruiz-Higueras, L. & Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics, *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 38(3), 226-246.

Gascón, J. (2001a). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4* (2), 129-159.

Gascón, J. (2001b). Evolución de la controversia entre geometría sintética y geometría analítica. Un punto de vista didáctico-matemático. *Disertaciones del Seminario de Matemáticas Fundamentales (UNED, Madrid), 28*, 1–20.

Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación Matemática*, número especial, XXV aniversario, marzo de 2014, p. 143-167.

Lucas, C. (2015). *Una posible razón de ser del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional.* Tesis doctoral. Universidad de Vigo.

Lucas, C. (2010). *Organizaciones Matemáticas Locales Relativamente Completas*. Tesina (Diploma de Estudios Avanzados: Programa Doctoral de Técnicas Matemáticas Avanzadas y sus Aplicaciones). Departamento de Matemática Aplicada I, Universidad de Vigo.

Lucas, C.; Fonseca, C.; Gascón, J. & Casas, J. (2014a). Aspetos da rigidez e atomização da matemática escolar nos sistemas de ensino de Portugal e da Espanha: análise de um questionário. *Educação Matemática-Pesquisa*, *16*(1), 1-24. São Paulo, Brasil. ISSN: 1983-3156.
http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/issue/view/1119.

Lucas, C.; Fonseca, C.; Gascón, J. & Casas, J. (2014b). O Fenômeno Didático Institucional da Rigidez e a Atomização das Organizações Matemáticas Escolares, *Boletim de Educação Matemática-Bolema*, *v. 28,* n. 50, pp. 1327-1347, dez. Rio Claro, São Paulo, Brasil. ISSN 1980-4415. DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a0216.

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional.* Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Serrano, L. (2013). *La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa. Análisis ecológico y propuesta didáctica.* Tesis doctoral. Universitat Ramon Llull de Barcelona.