

Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes dos anos finais do ensino fundamental: o caso dos problemas de partilha

Developmental levels of algebraic thinking of students in the final years of elementary school: the case of problems of sharing

JADILSON RAMOS DE ALMEIDA¹

MARCELO CÂMARA DOS SANTOS²

Resumo

Este artigo tem por objetivo identificar o nível de desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos dos anos finais do ensino fundamental em relação aos problemas de partilha. Participaram da pesquisa 343 alunos de duas escolas da cidade do Recife. Cada estudante resolveu um teste composto por seis problemas de partilha. Os resultados indicam que a escolarização tem uma forte influência no desenvolvimento do pensamento algébrico, uma vez que no 6º ano do ensino fundamental temos 30% dos alunos no nível 0, enquanto no 9º ano temos apenas 7%. No nível incipiente do pensamento algébrico, o nível 1, o percentual passa de 50% no 6º ano para 27% no 9º ano. Além disso, temos um aumento considerável de alunos no nível de pensamento algébrico consolidado, o nível 3, passando de 6% no 6º ano para 55% no 9º ano.

Palavras-chave: Álgebra escolar; Pensamento algébrico; Problemas de partilha.

Abstract

This article aims to identify the level of development of algebraic thinking of students in the final years of elementary school in relation to the problems of sharing. A total of 343 students from two schools in the city of Recife participated in the study. Each student solved a test consisting of six problems of sharing. The results indicate that schooling has a strong influence on the development of algebraic thinking, since in the 6th grade of elementary school we have 30% of students in level 0, while in the 9th grade we have only 7%. At the incipient level of algebraic thinking, level 1, the percentage changes from 50% in the 6th grade to 27% in the 9th grade. In addition, we have a considerable increase in the number of students in the level of consolidated algebraic thinking, level 3, going from 6% in 6th grade to 55% in 9th grade.

Keywords: School algebra; Algebraic thinking; Problems of sharing.

¹ Doutor em Ensino de Ciências e Matemática – UFRPE, professor do Departamento de Educação da UFRPE, e-mail: jadilsonalmeida@hotmail.com

² Doutor em *Sciences de L'education* – Université de Paris X – França, professor da UFPE, e-mail: marcelocamaraufpe@yahoo.com.br

Introdução

Muitas pesquisas são realizadas com o propósito de entender o desenvolvimento do pensamento algébrico em crianças. Essas pesquisas vêm mostrando a necessidade de diversificar as atividades propostas aos estudantes com o intuito de desenvolver esse raciocínio matemático (BORRALHO; BARBOSA, 2011; PONTE; VELEZ, 2011; SILVA; SAVIOLI, 2012).

Entretanto, para fazer o aluno desenvolver o pensamento algébrico, além de o professor ter o domínio de situações que levem a isso, acreditamos que seja necessário saber em que nível de desenvolvimento o aluno se encontra. Se o professor propuser situações que necessitem de um nível de desenvolvimento muito avançado para alunos que estejam em um nível básico, essas situações, provavelmente, não ajudarão no desenvolvimento do pensamento algébrico desses alunos, já que eles não conseguirão respondê-las.

A partir desse cenário surgiu o interesse em responder, neste artigo, a seguinte questão: qual o nível de desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos dos anos finais do ensino fundamental ao resolverem problemas de partilha?

Resolvemos escolher um tipo de situação, os problemas de partilha de quantidade, em razão de estes serem, de acordo com Almeida e Câmara (2014), os problemas mais propostos nos livros didáticos brasileiros para o ensino de equações polinomiais do 1º grau.

Mas como saber qual o nível de desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes? Algumas pesquisas, como a de Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005), a de Godino, Aké, Gonzato e Wilhelmi (2014), e a de Almeida (2016), propõem modelos que possibilitam a identificação do nível do pensamento algébrico de alunos. Porém, para esta pesquisa, utilizaremos o modelo proposto por Almeida (2016), uma vez que ele foi elaborado tendo como base, para a definição dos níveis de desenvolvimento, a estratégia adotada pelo aluno e, para a definição dos subníveis, o grau de complexidade dos problemas de partilha.

Problemas de partilha

Um problema de partilha se caracteriza por ter uma quantidade total conhecida que é repartida em partes desiguais e desconhecidas (MARCHAND; BEDNARZ, 1999). Podemos visualizar um problema desse tipo no exemplo a seguir: “*Alan, Bruno e Carlos*

têm, juntos, 120 figurinhas. Bruno tem o dobro de figurinhas de Alan e Carlos tem 40 figurinhas a mais que Alan. Quantas figurinhas tem cada um?”

Para o estudante realizar a conversão³ do enunciado desse problema em linguagem natural para a equação, em linguagem algébrica, é necessário estabelecer relações entre as informações, entre os dados colocados no problema. Nesse caso, o aluno pode indicar, por exemplo, a quantidade de figurinhas de Alan por X . Como Bruno tem o dobro de figurinhas de Alan, ele deve representar sua quantidade por $2X$. Já a quantidade de figurinhas de Carlos deverá ser representada por $X + 40$, já que Carlos tem 40 figurinhas a mais que Alan. Chegando, por fim, a equação “ $X + 2X + X + 40 = 120$ ”.

Esse tipo de problema foi estudado por Marchand e Bednarz (1999), os quais identificaram algumas variáveis ligadas às relações envolvidas que podem influenciar no rendimento dos alunos: o número de relações (1, 2, ...), a natureza das relações (aditivas ou multiplicativas) e o encadeamento das relações (fonte, composição ou poço).

Em nosso estudo, fixamos o número de relações em duas, variando a natureza das relações e o encadeamento. A natureza das relações diz respeito às operações entre elas. Assim, a sentença “*tem o dobro*” é de natureza multiplicativa; por outro lado, a sentença tem “*40 a mais*” é de natureza aditiva.

Quanto ao encadeamento das relações, os problemas de partilha podem ser do tipo fonte, composição ou poço. No encadeamento tipo fonte, as relações são originadas em função de apenas uma grandeza. O problema de partilha supracitado exemplifica o encadeamento tipo fonte, uma vez que Alan é a “fonte” das relações com Bruno e Carlos.

Quando o encadeamento é do tipo composição, as relações são estabelecidas seguindo uma sequência, como ilustra o seguinte problema: “*Marta, Rafael e Ana têm, juntos, 270 chaveiros. Rafael tem o dobro do número de chaveiros de Marta, e Ana tem o triplo do número de chaveiros de Rafael. Quantos chaveiros tem cada um?*”. Nesse caso, Marta é a “fonte” da relação de Rafael, que por sua vez é a “fonte” da relação de Ana.

Já nos problemas com encadeamento tipo poço, as relações convergem para uma das personagens do problema, como mostra o exemplo: “*Ana, Júlia e Maria têm, juntas, 180 selos. Júlia tem um terço dos selos de Ana e a metade dos selos de Maria. Quantos selos tem cada uma?*”. Nesse caso, as relações convergem para Júlia, ou seja, todas as relações

³ “Converter é transformar a representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada num registro em uma representação desse mesmo objeto, dessa mesma situação ou da mesma informação num outro registro” (DUVAL, 2009, p. 58).

colocadas no enunciado do problema centralizam, convergem para uma das personagens do problema.

No apêndice, apresentamos os testes utilizados neste trabalho, com uma análise que nos permite perceber, com exemplos, as diferenças entre os tipos de problema de partilha.

Pesquisas apontam que o encadeamento das relações dos problemas de partilha influencia no rendimento dos alunos. Essas pesquisas concluíram que os problemas de partilha com encadeamento tipo poço são considerados os mais difíceis de serem resolvidos pelos estudantes, seguidos dos com encadeamento tipo composição. Já os problemas com encadeamento tipo fonte são os considerados mais fáceis (MARCHAND; BEDNARZ, 1999; OLIVEIRA; CÂMARA, 2011; SANTOS JUNIOR, 2013; ALMEIDA, 2016).

Pensamento algébrico e níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico

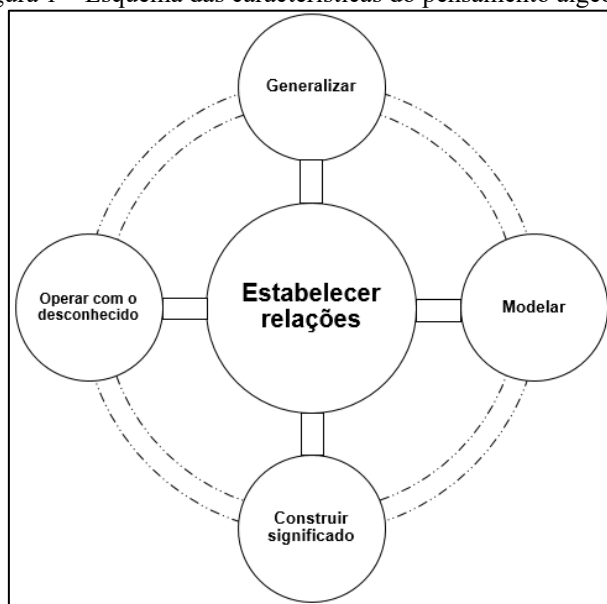
É possível perceber, a partir das pesquisas de Lins (1992; 1994a; 1994b), Kaput (1999; 2008) e Radford (2006; 2009; 2011), que caracterizar “*pensamento algébrico*” não é algo simples. Para este texto, adotamos a caracterização de pensamento algébrico defendida por Almeida (2016) e Almeida e Câmara (2017), construída a partir das ideias de Lins (1992; 1994a; 1994b), Kaput (1999; 2008) e Radford (2006; 2009; 2011).

Almeida (2016) e Almeida e Câmara (2017) acreditam que o pensamento algébrico⁴ é composto pelas seguintes características: “*estabelecer relações*”; “*generalizar*”; “*modelar*”; “*construir significado*”; e “*operar com o desconhecido*”.

Para entender melhor essa estrutura, ou formato de pensamento algébrico defendida por Almeida (2016) e Almeida e Câmara (2017), observemos o esquema a seguir, que mostra como essas características se comunicam e inter-relacionam entre si.

⁴ Mais sobre essa caracterização pode ser encontrado em Almeida (2016) e Almeida e Câmara (2017).

Figura 1 – Esquema das características do pensamento algébrico



Fonte: Almeida, 2016, p. 80

Portanto,

pensar algebricamente requer a mobilização dessas cinco características aqui discutidas, ou seja, a “capacidade de estabelecer relações”; a “capacidade de modelar”; a “capacidade de generalizar”; a “capacidade de operar com o desconhecido como se fosse conhecido” e a “capacidade de construir significado para os objetos e a linguagem algébrica”. Porém, ressaltamos que a característica central do pensamento algébrico é imprescindível, isto é, um sujeito só está pensando algebricamente se conseguir estabelecer relações, enquanto as demais vão surgindo com o tempo (ALMEIDA; CÂMARA, 2017, p. 58).

A partir dessa caracterização, Almeida (2016) e Almeida e Câmara (2018) apresentaram um modelo que possibilita a identificação do nível de desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos em relação aos problemas de partilha de quantidade com duas relações. É esse o modelo que utilizaremos para nossa análise e que discutiremos a partir de então.

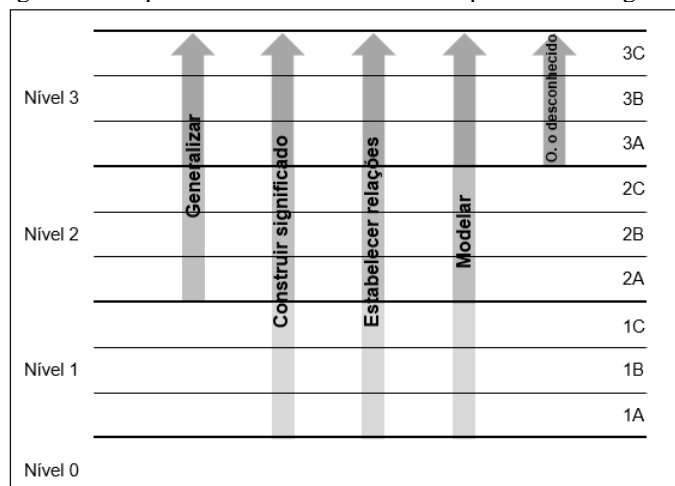
Na elaboração do modelo, foram levadas em consideração, na proposição dos níveis, as características do pensamento algébrico mobilizadas pelos alunos ao se depararem com um problema desse tipo e reveladas na estratégia de base adotada por eles, tendo em vista que os alunos tendem a utilizar a mesma estratégia para todos os problemas do teste. Para a proposição dos subníveis, foi adotado o grau de dificuldade dos problemas de partilha relacionado ao encadeamento das relações (MARCHAND; BEDNARZ, 1999, OLIVEIRA; CÂMARA, 2011, SANTOS JUNIOR, 2013).

O modelo proposto por Almeida (2016) e Almeida e Câmara (2018) parte do nível 0, caracterizado pela ausência de pensamento algébrico. No nível 1, encontram-se

estudantes que apresentam pensamento algébrico ainda incipiente. No nível 2, agrupam-se estudantes cujo pensamento algébrico é intermediário. Por fim, pertencem ao nível 3 os estudantes que têm pensamento algébrico já consolidado.

Para visualizar melhor o modelo proposto por esses pesquisadores, temos o seguinte esquema.

Figura 2 – Esquema do modelo de níveis de pensamento algébrico



Fonte: Almeida e Câmara, 2018, p. 565

O aluno que se encontra no nível 0 não consegue, ao se deparar com um problema de partilha com duas relações, mobilizar nenhuma das características que formam essa maneira específica de pensamento matemático, independente da natureza das relações – aditiva ou multiplicativa – ou do encadeamento das relações – fonte, composição ou poço. O estudante que se encontra nesse nível não consegue responder a um problema de partilha, “uma vez que ainda não estabelece as relações existentes no enunciado do problema, e o estabelecimento dessas relações é primordial na resolução de um problema de estrutura algébrica⁵ (ALMEIDA, 2016, p. 109-110). Nesses casos, o aluno deixa os problemas de partilha sem resposta ou adota estratégias essencialmente aritméticas, como a “total como fonte” e “dividir por 3”, ou realizam um “cálculo qualquer” (OLIVEIRA; CÂMARA, 2011).

Já o aluno que se encontra no nível 1 consegue, ao se deparar com um problema de partilha, mobilizar três das cinco características dessa forma de pensar: a capacidade de estabelecer relações, a capacidade de modelar e a capacidade de construir significado, ainda que essas duas últimas ocorram de forma primária. Para resolver os problemas de

⁵ Marchand e Bednarz (1999) relatam que em um problema de estrutura algébrica se faz necessário o estabelecimento de relações entre os dados (as informações) do enunciado para convertê-lo, por exemplo, em uma equação.

partilha, o aluno que se encontra no nível 1, denominado de pensamento algébrico incipiente, adota a estratégia “atribuir valores”, em que ele “atribui determinado valor a uma das incógnitas, aplicando então as relações para determinar o valor das outras incógnitas” (OLIVEIRA; CÂMARA, 2011).

Já no nível 2 estão os alunos que, ao se depararem com um problema de partilha, adotam uma estratégia algébrica com registro sincopado⁶, em que eles ainda não conseguem chegar ao registro da equação da forma esperada em um ambiente escolar.

Por pensarem o problema já como uma equação, os alunos desse nível conseguem mobilizar quatro características do pensamento algébrico. Além das três mobilizadas pelos alunos que se encontram no nível 1, eles mobilizam a capacidade de generalizar. As respostas dos estudantes do nível 2 revelam, ainda, que as características capacidade de construir significado e capacidade de modelar são mobilizadas de forma mais consolidada, em comparação ao que ocorre com os alunos do nível 1.

Por fim, no nível 3 estão os alunos que, ao se depararem com um problema de partilha, conseguem identificar as relações existentes no enunciado, além de utilizar uma linguagem simbólica algébrica para representar essas relações, chegando ao modelo matemático esperado pela escola, a equação polinomial do 1º grau. Isso não acontece nas respostas dos alunos que se encontram nos níveis anteriores.

Dessa forma, os alunos que estão nesse nível conseguem mobilizar todas as cinco características do pensamento algébrico, ou seja, além das quatro mobilizadas no nível anterior, eles conseguem mobilizar a capacidade de operar com o desconhecido como se fosse conhecido, de forma analítica. Além disso, os alunos que se encontram nesse nível revelam mobilizar todas as cinco características do pensamento algébrico de forma bem consolidada.

A partir do nível 1, Almeida (2016) e Almeida e Câmara (2018) propuseram três subníveis para cada nível, levando em consideração o grau de complexidade dos problemas de partilha, que são definidos pelos encadeamentos das relações. Por exemplo, os alunos que estão no *subnível 1A* conseguem, com a estratégia atribuir valores, responder apenas os problemas de partilha com encadeamento das relações tipo fonte, que são considerados os mais fáceis. Já os que estão no *subnível 1B* respondem, com a estratégia atribuir valores, os problemas tipo fonte e tipo composição, que têm um grau de complexidade médio. Os que estão no *subnível 1C* respondem, com essa estratégia, os problemas de

⁶ O registro sincopado ainda não é formado pelos símbolos essencialmente algébricos, mas, sim, por desenhos, abreviações, algumas letras, números, sinais de operações etc.

partilha independentemente de qual seja o encadeamento das relações: fonte, composição ou poço.

No *subnível 2A* estão os alunos que, com a estratégia algébrica com registro sincopado, respondem os problemas de partilha com encadeamento tipo fonte; os que estão no *2B* respondem os problemas de partilha com encadeamento tipo fonte e composição, e os que estão no *2C* respondem os problemas com encadeamento tipo fonte, composição e poço. Já no *subnível 3A* estão os alunos que conseguem responder os problemas de partilha tipo fonte adotando a estratégia algébrica com registro algébrico; no *3B* estão os que, utilizando essa estratégia, respondem os problemas de partilha tipo fonte e composição, e no *3C* estão os que respondem, com essa estratégia, os problemas de partilha, independente do encadeamento das relações (ALMEIDA, 2016).

Exemplos das estratégias que definem os níveis serão apresentados e discutidos nos resultados.

Percurso metodológico

Este artigo tem por objetivo identificar o nível de desenvolvimento de alunos dos anos finais do ensino fundamental em relação aos problemas de partilha. Para a análise, utilizamos o modelo proposto por Almeida (2016) e Almeida e Câmara (2018), que possibilita realizar essa identificação.

Participaram da pesquisa 343 alunos, sendo 72 do 6º ano do ensino fundamental, 83 do 7º ano, 93 do 8º ano e 95 do 9º ano, de duas escolas localizadas na cidade do Recife. Como em nenhum momento realizaremos comparação entre os resultados dessas escolas, não sentimos a necessidade de nomeá-las.

Cada participante respondeu a um teste com seis problemas de partilha cada um, sendo dois com encadeamento das relações tipo fonte, dois com encadeamento das relações tipo composição e dois com encadeamento das relações tipo poço. O teste foi composto pelos mesmos problemas utilizados por Almeida (2016) e Almeida e Câmara (2018) e podem ser encontrados no Apêndice.

Os problemas de partilha foram apresentados nos testes em linguagem natural, impressos em folhas de papel ofício, com o seguinte comando geral: resolva os seguintes problemas. Cada problema teve um espaço destinado ao registro das estratégias dos alunos.

A aplicação dos testes aconteceu nas aulas de matemática, com a presença do professor da turma e do pesquisador. Cada aluno teve cerca de duas aulas – 100 minutos – para responder os problemas de partilha.

No momento da aplicação do teste foi pedido que os alunos utilizassem, para resolver os problemas, apenas caneta e papel. Escolhemos apenas esses materiais por acreditarmos que é possível perceber melhor os indícios de pensamento algébrico revelados nas estratégias empregadas pelos alunos quando elas estão registradas no papel, o que poderia não ocorrer se, por exemplo, os estudantes utilizassem outras ferramentas, apesar de termos consciência de que eles podem mobilizar o pensamento algébrico utilizando qualquer ferramenta, como calculadora, computador etc.

Resultados

Acreditamos que é interessante a análise aqui realizada uma vez que ela possibilita construir algumas conclusões que poderão servir para subsidiar professores de matemática e pesquisadores interessados nesse tema.

No Quadro 01, a seguir, observa-se a distribuição dos 343 alunos por níveis e subníveis do pensamento algébrico, levando em consideração a frequência e a porcentagem em cada categoria.

Quadro 01 – Nível de desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos

Níveis	Frequência	Porcentagem	Subníveis	Frequência	Porcentagem
Nível 0	59	17%	-	59	17%
Nível 1	140	41%	1A	15	4%
			1B	27	8%
			1C	98	29%
Nível 2	36	10,5%	2A	5	1,5%
			2B	6	2%
			2C	25	7%
Nível 3	108	31,5%	3A	1	0,5%
			3B	26	7,5%
			3C	81	23,5%
Total	343	100%	-	343	100%

Fonte: elaborado pelos autores

Percebemos, ao analisarmos o Quadro 01, que 17% dos alunos se encontram no nível 0; ou seja, não conseguem mobilizar nenhuma das características que compõem o pensamento algébrico. Esses alunos deixam os problemas de partilha do teste sem resposta, uma vez que ainda não estabelecem as relações existentes no enunciado do problema. O estabelecimento dessas relações é primordial na resolução de um problema de estrutura algébrica (MARCHAND; BEDNARZ, 1999; RUIZ; BOSCH; GASCÓN, 2010; OLIVEIRA; CÂMARA, 2011; ALMEIDA, 2016).

Outra possibilidade é o aluno que se encontra nesse nível entender o problema de partilha como se fosse de estrutura aritmética, mobilizando, no momento em que está a respondê-lo, estratégias essencialmente aritméticas, denominadas por Oliveira e Câmara (2011) de “total como fonte” e “dividir por 3” ou “realizar um cálculo qualquer”, como podemos observar nos exemplos a seguir.

Ex.1: Três times de basquete participam da final do campeonato fazendo, juntos, 240 pontos. O time B fez o dobro de pontos do time A e o time C fez 40 pontos a mais que o time B. Quantos pontos fez cada time?

Figura 3 – Estratégia total como fonte

Handwritten work for Ex. 1:

$$\begin{array}{r} 240 \\ \times 2 \\ \hline 480 \\ B + 480 \end{array}$$

A = 240 P.
B = 480 P.
C = 520 P.

Fonte: Dados da pesquisa

Ex.2: Frederico, Rogério e Lúcia têm, juntos, 55 revistas em quadrinhos. Rogério tem o dobro de revistas de Frederico e Lúcia tem 15 revistas a mais que Frederico. Quantas revistas em quadrinhos têm cada um?

Figura 4 – Estratégia dividir por 3

Handwritten work for Ex. 2:

Eu acho que B e Lúcia é $55/3$

$$\begin{array}{r} 55 \\ - 3 \cdot 18 \\ \hline 25 \\ - 24 \\ \hline 01 \end{array}$$

01.

Fonte: Dados da pesquisa

Percebemos que o aluno que respondeu ao “Ex. 1” adotou a estratégia “total como fonte”, ou seja, associou o total do problema ao valor de uma das incógnitas (OLIVEIRA; CÂMARA, 2011). Nesse caso, ele adotou o total de 240 pontos como sendo a pontuação do time A e, em seguida, realizou as duas operações propostas no enunciado do problema (“dobro” e “40 a mais”) para encontrar os outros valores. Multiplicou 240 por 2 para encontrar a pontuação do time B, que foi o dobro do time A, e somou 40 pontos ao total de pontos do time B para encontrar a pontuação do time C.

Acreditamos que o aluno que adota esse tipo de estratégia entende o problema da seguinte maneira: *Três times de basquete participam da final do campeonato, o time A fez 240 pontos. O time B fez o dobro de pontos do time A e o time C fez 40 pontos a mais que o time B. Quantos pontos fez cada time?* O estudante não percebe, portanto, as condições postas no enunciado do problema.

Já o aluno que respondeu ao “Ex. 2” adotou a estratégia “dividir por 3”, isto é, “iniciou o problema dividindo o total fornecido para as três incógnitas do problema, como se a partilha desse valor fosse em partes iguais” (OLIVEIRA; CÂMARA, 2011). Ele não considerou as condições do enunciado, entendendo-o como uma simples situação de estrutura aritmética, que pede para dividir 55 figurinhas para três pessoas em partes iguais.

Portanto, verificamos que 17% dos alunos que participaram da pesquisa não mobilizaram nenhum elemento caracterizador do pensamento algébrico, indicando, portanto, estarem no nível 0. Ou seja, ao se depararem com problemas de partilha com duas relações, eles mobilizam essencialmente elementos caracterizadores do pensamento aritmético, pois, como nos coloca Kieran (1992), pensar aritmeticamente está intimamente ligado ao cálculo e à realização de operações na procura de um resultado, indicando, nesse caso, que tais alunos têm condições apenas de trabalhar com objetos particulares.

Verificamos, também, que o nível que concentra mais alunos é o nível 1, no qual o pensamento algébrico ainda é incipiente – 41% dos participantes. Isso revela que 140 alunos, dos 343 participantes da pesquisa, adotam a estratégia “atribuir valores” como base para a resolução de um problema de partilha com duas relações, mobilizando, de acordo com o modelo proposto por Almeida (2016), três das cinco características que compõem o pensamento algébrico: a capacidade de estabelecer relações, a capacidade de modelar e a de atribuir significado para a linguagem e os objetos algébricos. Apresentamos, a seguir, um exemplo de resposta de um aluno que se encontra nesse nível.

Ex. 3: Frederico, Lúcia e Rogério têm, juntos, 55 revistas em quadrinhos. Lúcia tem 15 revistas a mais que Frederico e Rogério tem o dobro de revistas de Frederico. Quantas revistas tem cada um?

Figura 5 – Estratégia atribuir valores

Handwritten student work showing the 'assign values' strategy. It lists Frederico = 10 revistas, Lúcia = 25 revistas, and Rogério = 20 revistas. A vertical addition shows 25 + 10 + 20 = 55. Below, stick figures represent the people, and a note says 'L + 15 F' and 'R x 2 F'.

Fonte: Dados da pesquisa

Nessa estratégia, “o aluno atribuiu determinado valor a uma das incógnitas, aplicando então as relações para determinar o valor das outras incógnitas” (OLIVEIRA; CÂMARA, 2011, p. 6).

Poderíamos dizer, a princípio, que essa estratégia é essencialmente aritmética, uma vez que se vale de cálculos basicamente aritméticos. Entretanto, acreditamos que o aluno que adota essa estratégia para resolver um problema de partilha está mobilizando, além da característica central dessa forma de pensar – a capacidade de estabelecer relações – outras duas características do pensar algebricamente, a capacidade de modelar e a capacidade de construir significado para a linguagem e os objetos algébricos.

Como podemos observar na resposta ao “Ex. 3”, que ilustra esse nível, o estudante utilizou uma linguagem sincopada, formada por abreviações, letras, números, desenhos e sinais de operações para representar o problema, revelando, nesse caso, a mobilização da capacidade de modelar, isto é, de construir um modelo matemático que represente as relações contidas no enunciado do problema.

Embora o modelo construído pelo aluno que se vale da estratégia atribuir valores não seja o tradicionalmente esperado em um ambiente escolar – uma equação –, Lins (1992), Kaput (2008), Radford (2009), Almeida (2016), dentre outros, defendem que um dos elementos caracterizadores do pensamento algébrico é a generalização e a sua expressão gradual em sistemas de símbolos convencionais, em uma linguagem cada vez mais simbólica.

Por exemplo, a expressão “ $L + 15F$ ”, registrada pelo aluno, é, ao que tudo indica, a conversão da sentença “Lúcia tem 15 revistas a mais que Frederico”, e “ $R \times 2F$ ” é a conversão de “Rogério tem o dobro de revista de Frederico”. Entretanto, esse aluno não conseguiu ir além desses registros, e construir a equação “ $F + F + 15 + 2F = 55$ ”, ou, em uma linguagem simbólica algébrica tradicionalmente utilizada nos ambientes escolares, “ $X + X + 15 + 2X = 55$ ”. O estabelecimento dessas relações e sua conversão nas expressões “ $L + 15F$ ” e “ $R \times 2F$ ”, que se aproxima mais de uma equação, pareceu ter levado o aluno a chegar ao valor correto na primeira tentativa.

Com relação aos subníveis do nível 1, percebemos que a grande maioria dos alunos que se encontram nesse nível (29% dos 41%) consegue resolver, a partir da estratégia atribuir valores, os problemas de partilha com duas relações, independente do encadeamento dessas relações; isto é, estão no subnível 1C. Isso também é percebido nos outros níveis, pois 7% dos 10,5% do nível 2 se encontram no subnível 2C, e 23,5% dos 31,5% do nível 3 formam o último subnível desse nível.

Isso parece indicar que, apesar de existir um grau de complexidade dos problemas de partilha, como foi revelado nas pesquisas de Oliveira e Câmara (2011) e Santos Junior (2013), e corroborado por nossos resultados, boa parte dos alunos (59,5% dos 83% que estão nos níveis 1, 2 e 3) conseguem, ao resolver um dos problemas de forma correta, resolver os demais problemas do teste, qualquer que seja o encadeamento das relações desses problemas de partilha.

Já no nível 2, que, podemos afirmar, constitui uma transição entre o pensamento algébrico incipiente e o consolidado, encontra-se o menor número de alunos, 10,5% dos participantes. Isso talvez aconteça pelo fato de a estratégia adotada por esses alunos ser

uma estratégia algébrica, em que o aluno pensa o problema de partilha como uma equação polinomial do 1º grau, mas sem representar essa equação na forma que tradicionalmente é estudada no ambiente escolar, como podemos observar no exemplo a seguir.

Ex. 4: Em uma escola, 180 alunos praticam esporte. O número de alunos que jogam futebol é o triplo do número de alunos que jogam vôlei e o número de alunos que jogam basquete é o dobro do número de alunos que jogam vôlei. Nessa escola, quantos alunos participam de cada esporte?

Figura 6 – Estratégia algébrica em linguagem sincopada

The image shows handwritten mathematical work. At the top left, there is a long division of 180 by 6, resulting in 30. To the right of this, there are two equations: $30 \cdot 3 = 90$ and $30 \cdot 2 = 60$. Below these, there are three lines of text: "R: FUTEBOL = 90 ALUNOS", "BASQUETE = 60 ALUNOS", and "VÔLEI = 30 ALUNOS".

Fonte: Dados da pesquisa

A estratégia mobilizada pelo aluno que respondeu ao “Ex. 4” é denominada por Oliveira e Câmara (2011) de “*estratégia algébrica*”, em que, “ao contrário das aritméticas, o sujeito parte do total para determinar o valor das incógnitas, identificando as relações entre elas” (p. 7). Porém, diferentemente da estratégia adotada pelos alunos do nível 3, em que o registro é totalmente algébrico, a mobilizada pelos alunos do nível 2 é representada por um registro sincopado, formado por letras, abreviações, números, sinais de operações, etc. (ALMEIDA, 2016).

Por exemplo, o aluno, ao que tudo indica, equacionou o problema mentalmente, mesmo não registrando a equação “ $V + 3V + 2V = 180$ ”, por isso a divisão de 180 por 6. Nesse caso, diferentemente do aluno que se encontra no nível 1 – que parte de um valor particular, por isso a estratégia “*atribuir valores*” – o aluno do nível 2 já adota a quantidade de alunos que praticam vôlei como a incógnita fonte da equação. Nesse nível, a indeterminação, a incógnita, já aparece de forma explícita ao discurso (RADFORD, 2009), mesmo não aparecendo nos registros do aluno. Isso revela, portanto, a capacidade de generalizar, que é uma característica do pensamento algébrico que os alunos que se encontram no nível 1 ainda não conseguem mobilizar.

Quando observamos a porcentagem de alunos que se encontram no nível 3, verificamos que 31,5% dos participantes se enquadram nesse nível. Isso se justifica pelo fato de 55% dos participantes dessa pesquisa já terem estudado, em algum momento de sua vida escolar, álgebra, e, em particular, equação polinomial do 1º grau. É possível observar no exemplo a seguir como os alunos que se encontram nesse nível respondem aos problemas de partilha.

Ex. 5: Três times de basquete participam da final do campeonato fazendo, juntos, 240 pontos. O time B fez o dobro de pontos do time A e o time C fez 40 pontos a mais que o time B. Quantos pontos fez cada time?

Figura 7 – Estratégia algébrica em linguagem simbólica algébrica

$2x + x + 2x + 40 = 240$ $5x + 40 = 240$ $5x = 240 - 40$ $x = \frac{200}{5}$ $x = 40$	$B = 80$ $A = 40$ $C = 120$
---	-----------------------------

Fonte: Dados da pesquisa

Percebemos que o aluno que respondeu ao “Ex. 5” conseguiu identificar, de forma clara, as relações existentes no enunciado do problema de partilha, além de utilizar uma linguagem simbólica algébrica para representar o problema, ou seja, uma equação polinomial do 1º grau. Tal estudante empregou, portanto, o modelo matemático esperado em um ambiente escolar para representar um problema desse tipo, o que não se verifica nas respostas dos alunos que se encontram nos níveis anteriores.

Essa forma de representar os objetos gerais distancia a representação final do problema em linguagem matemática da história contada no enunciado, uma vez que a equação não é uma leitura linear do problema, mas, sim, uma fórmula que representa todas as informações desse enunciado. E isso caracteriza a força da álgebra, em que os símbolos algébricos têm a finalidade de significar coisas de uma maneira abstrata, de construir um modelo matemático para representar problemas do cotidiano (LINS, 1992; KAPUT, 2008; RADFORD, 2009).

Percebemos, também, que na resposta do aluno que se encontra nesse nível a indeterminação, a incógnita, se torna um objeto explícito ao discurso, e observamos claramente a representação do geral no registro do aluno. Nesse caso, a fórmula, a equação, deixa de ter uma natureza “perspectiva”, como nas respostas dos alunos do nível 2, e passa a significar coisas de uma forma totalmente abstrata (RADFORD, 2009), revelando, nesse caso, a mobilização da “capacidade de generalizar”, porém, de uma forma mais desenvolvida do que nas respostas dos alunos que se encontram no nível 2.

Além disso, verificamos, nas respostas dos alunos que se encontram no nível 3, a mobilização da única característica do pensamento algébrico que não é mobilizada em nenhum dos níveis anteriores, a “capacidade de operar com o desconhecido”, tendo em vista que, na resposta ao “Ex. 5”, que trazemos para ilustrar o nível 3, o desconhecido é tratado como se fosse conhecido. Isso porque acreditamos que, na resolução da equação,

o aluno manipulou o desconhecido como se fossem números conhecidos, segundo as leis da aritmética em relação a uma igualdade. Nesse processo, o estudante realizou algumas operações na equação inicial com o objetivo de gerar equações equivalentes, até chegar ao valor de X.

Continuando nossas análises temos, no Quadro 02, a seguir, a relação entre o ano de escolarização e o nível de desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos.

Quadro 02 – Escolaridade e nível do pensamento algébrico dos alunos

Níveis	Ano de escolarização							
	6°		7°		8°		9°	
	F	P	F	P	F	P	F	P
Nível 0	22	30%	15	18%	15	16%	7	7%
Nível 1	36	50%	55	66%	23	25%	26	27%
Nível 2	10	14%	8	10%	8	9%	10	11%
Nível 3	4	6%	5	6%	47	50%	52	55%
Total	72	100%	83	100%	93	100%	95	100%

Legenda: F – Frequência; P – Porcentagem.

Fonte: Elaborado pelos autores

É possível verificar que o percentual de estudantes que não conseguem mobilizar nenhuma característica do pensamento algébrico ao se depararem com um problema de partilha com duas relações diminui quando se aumenta a escolarização. Percebemos isso quando comparamos, por exemplo, o percentual de alunos no nível 0 do 6° ano do ensino fundamental, 30%, com o percentual de alunos do 9° ano nesse nível, 7%, ou seja, uma diminuição de 23 pontos percentuais. Isso indica que, quanto maior a escolarização do aluno, maior a capacidade de mobilizar alguma característica do pensamento algébrico.

Essa influência do tempo de escolarização na capacidade de mobilizar características do pensamento algébrico também é percebida quando comparamos o percentual de alunos do 6° e 7° ano nos níveis 1 e 3 com o percentual de alunos do 8° e 9° ano nesses mesmos níveis. Percebemos, nesse caso, uma diminuição considerável no percentual de alunos no nível 1 (de 50% no 6° ano e 66% no 7° ano, para 25% no 8° ano e 27% no 9° ano) e, ao mesmo tempo, um aumento significativo no percentual de alunos no nível 3 (de 6% no 6° e no 7° ano do ensino fundamental para 50% no 8° ano e 55% no 9° ano).

Porém, o interessante é que os percentuais de alunos no nível 2 são muito próximos, independentemente do ano de escolarização dos alunos. Isso indica que a influência do ambiente escolar nesse nível de desenvolvimento do pensamento algébrico é pouco significativa.

Essa não influência talvez se deva ao fato de esse nível ser um nível de transição entre o pensamento algébrico incipiente – em que os alunos ainda se valem de muitas ferramentas essencialmente aritméticas, pois na estratégia atribuir valores ele toma a incógnita como um espaço vazio que deve ser preenchido por um valor particular e, após escolher um determinado valor, realiza as operações aritméticas, seguindo as condições propostas no enunciado do problema (RADFORD, 2009) – e o pensamento algébrico consolidado, em que a incógnita já é tida como um valor desconhecido que deve ser representado por um sinal, no caso uma letra, para que o enunciado do problema seja convertido em uma equação. Essas ações são exploradas nas aulas de álgebra, principalmente no ensino de equações polinomiais do 1º grau, com os problemas de partilha, como indicam as pesquisas de Almeida (2011) e Almeida e Câmara (2014).

Quando realizamos a distribuição dos alunos nos subníveis por ano de escolarização, como mostra o Quadro 03 a seguir, percebemos que, independente do ano de escolarização, a maior parte dos alunos se encontra no último subnível de cada nível.

Quadro 03 – Escolaridade e subníveis do pensamento algébrico dos alunos

Nível	Subnível	6º ano		7º ano		8º ano		9º ano	
		F	P	F	P	F	P	F	P
0	-	22	30%	15	18%	15	16%	7	7%
1	1A	2	3%	3	4%	4	4%	6	6%
	1B	8	11%	5	6%	6	7%	8	8,5%
	1C	26	36%	47	57%	13	14%	12	13%
2	2A	2	3%	0	0%	2	2%	1	1%
	2B	2	3%	1	1%	2	2%	1	1%
	2C	6	8%	7	8%	4	4%	8	8,5%
3	3A	0	0%	0	0%	1	1%	0	0%
	3B	2	3%	2	2%	12	13%	10	11%
	3C	2	3%	3	4%	34	37%	42	44%
Total		72	100%	83	100%	93	100%	95	100%

Legenda: F – Frequência; P – Porcentagem.

Fonte: Elaborado pelos autores

Portanto, assim como foi verificado no Quadro 01, percebemos, no Quadro 03, que, independente do ano de escolarização, os estudantes conseguem, ao resolverem de forma correta um dos problemas de partilha do teste, responder aos demais, independentemente do tipo de encadeamento das relações e, conseqüentemente, do grau de dificuldade.

Considerações finais

A partir dos resultados, percebemos, de forma clara, que a escolarização tem uma influência no desenvolvimento do pensamento algébrico, uma vez que, no 6º ano do ensino fundamental, 30% dos alunos se encontram no nível 0, enquanto no 9º ano apenas 7% dos estudantes se enquadram nesse nível. Verifica-se, portanto, uma diminuição de 23 pontos percentuais no número de alunos que não consegue mobilizar nenhuma característica dessa forma de pensar ao se deparar com um problema de partilha com duas relações.

Já o percentual de alunos no nível incipiente do pensamento algébrico, o nível 1, também diminuiu, de 50% no 6º ano para 27% no 9º ano. Isto é, também observamos uma diminuição de 23 pontos percentuais no número de alunos no nível 1 no decorrer dos anos de escolarização. Além disso, temos um aumento considerável de alunos no nível de pensamento algébrico consolidado, o nível 3, exatamente de 49 pontos percentuais, passando de 6% no 6º ano para 55% no 9º ano.

Por outro lado, percebemos que a escolarização parece não influenciar no número de alunos que se encontram no nível 2, uma vez que 14% dos alunos do 6º e 11% do 9º ano se encontram, em nossa pesquisa, nesse nível de desenvolvimento do pensamento algébrico. Diante disso, surge nossa primeira questão para pesquisas futuras: por que a escolarização não influencia no percentual de alunos no nível 2, diferentemente dos níveis 0, 1 e 3?

Além disso, outros resultados nos inquietaram, levando-nos a propor outras questões para futuras pesquisas. Por exemplo, acreditamos que no último ano de escolarização do ensino fundamental ainda se encontra um número considerável de alunos nos primeiros níveis, 7% no nível 0 e 27% no nível 1. Por conta disso, consideramos pertinente deixar em aberto a seguinte questão de pesquisa: qual a contribuição de sequências didáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico, relacionado aos problemas de partilha, de alunos dos anos finais do ensino fundamental?

Referências

ALMEIDA, J. R. *Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico: um modelo para os problemas de partilha de quantidade*. Tese de doutorado em Ensino de Ciências e Matemática – UFRPE. Recife, 2016.

ALMEIDA, J. R.; Câmara, M. Análise dos problemas propostos para o ensino de equações polinomiais do 1º grau nos livros didáticos de matemática. *Boletim GEPEM*, 64, 3 – 17. 2014. Disponível em <
<http://www.ufrj.br/SEER/index.php?journal=gepem&page=article&op=view&path%5>

[B%5D=dx.doi.org%2F10.4322%2Fgepem.2015.001&path%5B%5D=1568](http://dx.doi.org/10.4322/fgepem.2015.001&path%5B%5D=1568) > Acesso em: 20/05/2015.

ALMEIDA, J. R.; CÂMARA, M. Pensamento algébrico: em busca de uma definição. *Revista Paranaense de educação Matemática*, 6(10), 34 – 60, 2017. Disponível em: < http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/viewFile/1124/pdf_207 > Acesso em: 23/03/2018.

ALMEIDA, J. R.; CÂMARA, M. Desenvolvimento do Pensamento Algébrico: proposição de um modelo para os problemas de partilha. *ZETETIKÉ*, 26(3), 546 – 568, 2018. Disponível em: < <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8650717/18882> > Acesso em: 15/02/2019.

ARAÚJO, E. A. Ensino de álgebra e formação de professores. *Educação Matemática Pesquisa*, 10 (2), 331 – 346. São Paulo, 2008. Disponível em: < <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/1740/1130> > Acesso em: 17/08/2013.

ARCAVI, A. El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. *Conferência plenária no encontro de investigação em educação matemática*. Caminha, Portugal, 2005. Disponível em: < [http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA-TEXTOS/Arcavi05\(EI%20desarrollo%20y%20el%20uso%20del%20sentido%20de%20los%20simbolos\).doc](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA-TEXTOS/Arcavi05(EI%20desarrollo%20y%20el%20uso%20del%20sentido%20de%20los%20simbolos).doc) > Acesso em: 23/07/2014.

BORRALHO, A.; BARBOSA, E. Padrões e o desenvolvimento do pensamento algébrico. *Anais da XIII Conferência Iteramericana de Educação Matemática*. (pp 1 – 12) Recife: SBEM. 2011.

DUVAL, R. *Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; Cristovão, E. M. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. *Seminário Luso-Brasileiro de Investigações Matemáticas no Currículo e na Formação de Professores*. Lisboa, 2005. Disponível em: < http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/seminario_1b.htm > Acesso em: 02/11/2010.

GODINO, J. D.; AKÉ, L. P.; GONZATO, M.; WILHELMI, M. R. Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar: implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32 (1), 199 - 219. Espanha, 2014. Disponível em: < <http://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/issue/view/21903/showToc> > Acesso em: 07/05/2015.

KAPUT, J. Teaching and learning a new algebra with understanding. In E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding*. (pp. 1 – 34) Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 1999.

_____. What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. (pp. 5 – 17) Lawrence Erlbaum Associates: New York, 2008.

KIERAN, C. The Learning and Teaching of school Algebra. In: GROWS, D. A. (ed). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and learning*. New York: Macmillan, 1992.

LINS, R. C. *A framework for understanding what algebraic thinking is*. Tese de Doctor of Philosophy. School of Education, University of Nothingam: Nothingam, UK, 1992.

_____. Campos semânticos y el problema del significado em álgebra. *UNO – Didáctica de las Matemáticas*. 1, 1 – 7. Barcelona, 1994a.

_____. O modelo teórico dos campos semânticos: uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico. *Dynamis*. 1(7), 29 – 39. Blumenau, 1994b.

MARCHAND, P.; BEDNARZ, N. L'enseignement de l'algèbre au secondaire: une analyse des problèmes présentés aux élèves. *Bulletin AMQ*, 39(4), 30 – 49. Québec, 1999.

OLIVEIRA, I.; CÂMARA, M. Problemas de estrutura algébrica: uma análise comparativa entre as estratégias utilizadas no Brasil e no Québec. *Anais da XIII Conferência Iteramericana de Educação Matemática*. Recife: SBEM, 2011.

PONTE, J. P.; VELEZ, I. Representações em tarefas algébricas no 2º ano de escolaridade. *Boletim GEPEM*. 59, 53 – 68, 2011. Disponível em: < <http://www.ufrj.br/SEER/index.php?journal=gepem&page=article&op=view&path%5B%5D=637&path%5B%5D=573> > Acesso em: 23/06/2014.

RADFORD, L. Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. *North America Conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education – PME*. 1, 1 – 21. México, 2006.

_____. Signs, gestures, meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Anais do Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Lyon, França, 2009. Disponível em: < <http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/plenary1-radford.pdf> > Acesso em: 09/10/2014.

_____. Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. In J. Cai & E. Knuth, (Eds). *A global dialogue from multiple perspectives*. (pp. 303 – 322), Editora Springer. Berlin, 2011.

RUIZ, N.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en secundaria. In M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo & T. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática*. (pp. 545-556). Lleida: SEIEM., 2010.

SANTOS JUNIOR, C. P. *Estratégias utilizadas por alunos do 7º, 8º e 9º ano do ensino fundamental na resolução de problemas de partilha*. Dissertação de mestrado em Educação Matemática e Tecnológica. Recife: UFPE, 2013.

SILVA, D. P.; SAVIOLI, A. M. P. D. Caracterizações do pensamento algébrico em tarefas realizadas por estudantes do Ensino Fundamental I. *Revista Eletrônica de Educação*. 6(1). 206-222, 2012. Disponível em: <

<http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/view/387/172> > Acesso em:
14/11/2014.

Texto recebido: 14/05/2019
Texto aprovado: 11/12/2019

Apêndice: testes A e B

Quadro 4 – Testes utilizados na pesquisa

Teste A		Teste B	
Questão	Estrutura	Questão	Estrutura
1. Frederico, Lúcia e Rogério têm, juntos, 55 revistas em quadrinhos. Lúcia tem 15 revistas a mais que Frederico e Rogério tem o dobro de revistas de Frederico. Quantas revistas tem cada um?	Encadeamento tipo fonte, com a 1ª relação aditiva e a 2ª relação multiplicativa.	1. Frederico, Rogério e Lúcia têm, juntos, 55 revistas em quadrinhos. Rogério tem o dobro de revistas de Frederico e Lúcia tem 15 revistas a mais que Frederico. Quantas revistas em quadrinhos tem cada um?	Encadeamento tipo fonte, com a 1ª relação multiplicativa e a 2ª relação aditiva.
2. Em uma escola, 180 alunos praticam esporte. O número de alunos que jogam futebol é o triplo do número de alunos que jogam vôlei e o número de alunos que jogam basquete é o dobro do número de alunos que jogam vôlei. Nessa escola, quantos alunos participam de cada esporte?	Encadeamento tipo fonte, com a 1ª e a 2ª relação multiplicativa.	2. Joana, Paulo e Roberto vão repartir 37 balas de modo que Paulo receba 5 balas a mais que Joana e Roberto receba 2 balas a mais que Joana. Quantas balas receberá cada um?	Encadeamento tipo fonte, com a 1ª e a 2ª relação aditiva.
3. Três times de basquete participam da final do campeonato fazendo, juntos, 260 pontos. O time B fez 20 pontos a mais que o time A e o time C fez o dobro de pontos do time B. Quantos pontos fez cada time?	Encadeamento tipo composição, com a 1ª relação aditiva e a 2ª relação multiplicativa.	3. Três times de basquete participam da final do campeonato fazendo, juntos, 240 pontos. O time B fez o dobro de pontos do time A e o time C fez 40 pontos a mais que o time B. Quantos pontos fez cada time?	Encadeamento tipo composição, com a 1ª relação multiplicativa e a 2ª relação aditiva.
4. Marta, Rafael e Ana têm, juntos, 270 chaveiros. Rafael tem o dobro do número de chaveiros de Marta, e Ana tem o triplo do número de chaveiros de Rafael. Quantos chaveiros tem cada um?	Encadeamento tipo composição, com a 1ª e a 2ª relação multiplicativa.	4. Em uma escola, 160 alunos praticam esportes. O número de alunos que joga basquete é 10 a mais dos que jogam vôlei, e o número de alunos que joga futebol é 20 a mais dos que jogam basquete. Nessa escola, quantos alunos praticam cada esporte?	Encadeamento tipo composição, com a 1ª e a 2ª relação aditiva.
5. João, Pedro e Cláudio têm, juntos, 160 carrinhos. Pedro tem 25 carrinhos a menos que João e 15 carrinhos a menos que Cláudio. Quantos carrinhos tem cada um deles?	Encadeamento tipo poço, com a 1ª e a 2ª relação aditiva.	5. Ana, Júlia e Maria têm, juntas, 180 selos. Júlia tem um terço dos selos de Ana e a metade dos selos de Maria. Quantos selos tem cada uma?	Encadeamento tipo poço, com a 1ª e a 2ª relação multiplicativa.
6. Clara, Marcos e Antônio têm, juntos, 125 bolinhas. Marcos tem a metade de bolinhas de Clara e 5 bolinhas a menos que Antônio. Quantas bolinhas tem cada um?	Encadeamento tipo poço, com a 1ª relação multiplicativa e a 2ª relação aditiva.	6. Sílvia, Pedro e Carlos querem dividir 70 figurinhas entre eles de modo que Sílvia receba 30 figurinhas a menos que Pedro e a metade da quantidade de figurinhas de Carlos. Quantas figurinhas cada um vai receber?	Encadeamento tipo poço, com a 1ª relação aditiva e a 2ª relação multiplicativa.

Fonte: Almeida e Câmara (2018, p. 568)