EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i1p*462-489*

Modelo Praxeológico de Referência: o caso da álgebra linear

Institutional Praxeological Model: the case of linear algebra

FERNANDO CARDOSO DE MATOS[1]
JOSÉ CARLOS DE SOUZA PEREIRA[2]
JOSÉ MESSILDO VIANA NUNES[3]
RENATO BORGES GUERRA[4]

Resumo

Este artigo tem como objetivo expor aspectos da constituição de um Modelo Praxeológico de Referência para o ensino de Álgebra Linear. A pesquisa esteve voltada para o ensino superior com impacto direto na formação de professores, tornando-se um modelo praxeológico alternativo a partir do estudo do objeto sistemas lineares. Para alcançar tal objetivo lançamos mão do quadro teórico-metodológico da Teoria Antropológica do Didático e instituímos um Percurso de Estudo e Pesquisa, com alunos do curso de graduação em Matemática de uma instituição de ensino superior pública. A partir do estudo, concluímos que o Modelo proposto configurou-se como um Modelo Praxeológico de Referência para o ensino de Álgebra Linear no curso de Licenciatura em Matemática na referida Instituição.

Palavras-chave: *Teoria Antropológica do Didático; Modelo Praxeológico de Referência; Percurso de Estudo e Pesquisa; Álgebra Linear.*

Abstract

This article aims to expose aspects of the constitution of a praxological reference model for the teaching of linear algebra. A research focused on higher education with direct impact on teacher education, becoming an alternative praxeological model from the study of objects of linear systems. To reach the initial objective launched in the theoretical-methodological framework of the Anthropological Theory of Didactics and Institutions, a Course of Study and Research, with undergraduate students in Mathematics from a public higher education institution. From the study concluded that the proposed model configured as a Practical Reference Model for Teaching Linear Algebra in the Mathematics Degree course in the institution.

[1] Doutor em Educação em Ciências e Matemática. Professor do Instituto Federal do Pará (IFPA) e Secretaria de Estado de Educação do Pará (SEDUC/PA). Brasil.
[2] Doutor em Educação em Ciências e Matemática. Secretaria de Estado de Educação do Pará (SEDUC/PA), Brasil.
[3] Doutor em Educação em Ciências e Matemática. Professor da Universidade Federal do Pará (UFPA), Brasil.
[4] Doutor em Engenharia Elétrica pela Universidade Estadual de Campinas. Professor da Universidade Federal do Pará (UFPA), Brasil.

Keywords: *Anthropological Theory of Didactics; Course of Study and Research; Linear Algebra.*

Introdução

A problemática referente ao ensino e aprendizagem de Álgebra Linear (AL) é enfrentada há décadas. Nesse sentido, destacamos os trabalhos de Lindner (2003), Dorier (2000, 2002), Dorier et al. (1999), Silva (1999), Karrer (2006, 2009), Laugwitz (1974), Carlson (1993), Uhlig (2015), Padredi (2003), Prado (2010), Parraguez (2009), Coimbra (2008), Wawro et al. (2011), Harel (1990), Sierpinska et al. (1999) e Dias (1993), cujas pesquisas apontam que o excessivo formalismo no ensino de AL cria problemas no processo de aprendizagem dos alunos. Alguns desses pesquisadores propõem estratégias de ensino com intuito de melhorar a aprendizagem de AL, mas nossa proposta se diferencia de todas em relação a sequência de tarefas concebidas e por meio de um percurso de estudo traçado para o enfrentamento dessas tarefas.

Os estudos supracitados, apesar de se diferenciarem de nossa proposta, nos auxiliaram na construção de uma Organização Matemático-Didática (OMD), para favorecer o ensino e a aprendizagem dos espaços vetoriais, objeto com relativa dificuldade de aprendizado no ensino superior. Nesse sentido, buscamos ensinar as noções de AL, partindo do estudo de um objeto do ensino básico, ensinado com maior consistência no ensino médio, que são os **sistemas lineares**. Essa abordagem nos possibilitou articular os objetos da AL, no ensino superior, em um nível de complexidade crescente[5].

Devido constatarmos uma incompletude institucional no sistema de ensino analisado (análise que não consta neste artigo), propomos novas ideias a partir da compreensão de Modelo Epistemológico de Referência (MER)[6], discutido por autores espanhóis, que se amparam nas reflexões teóricas de Yves Chevallard concernentes à Teoria Antropológica do Didático (TAD), Joseph Gáscon (2003), Sierra Delgado (2006), Catalán (2003) e Fonseca Bon (2011), que nos serviu de fundamentação para a elaboração de um Modelo Praxeológico de Referência (MPR) (GASCÓN, 2018)[7], preconizando o ensino da Álgebra Linear no âmbito de uma instituição de ensino superior pública. Esse MPR possui etapas transpositivas que não estão contempladas neste artigo, porque priorizamos descrever aspectos da constituição desse modelo, originados nas sessões do Percurso de

[5] Cf. Bon (2011).

[6] O Modelo Epistemológico de Referência (MER) pode ser compreendido como uma organização didática e matemática (OMD), elaborado para o pesquisador analisar processos transpositivos.

[7] Nos mais recentes desenvolvimentos da TAD, a noção de MER foi generalizada à noção de *modelo praxeológico de referência* (MPR) [...] (Ibidem, p. 61).

Estudo e Pesquisa (CEVALLARD, 2011) que mediou o curso da disciplina de Álgebra Linear.

A tecnologia que apresentamos, no MPR, é fundamental e justifica o estudo de objetos da AL, pois com o modelo foi possível observarmos que esses objetos apresentam relações com o estudo qualitativo de sistemas lineares. Sendo assim, estamos diante de OMD Regional, já que é o resultado da articulação de *várias praxeologias*[8] *locais* sob o suporte de uma mesma teoria matemática[9], pois as tarefas estão associadas a um componente tecnológico e houve a presença de diferentes técnicas para cada tipo de tarefa com a possibilidade de discernir critérios entre elas (BON, 2011).

Para Delgado (2006), a unidade de análise dos processos didáticos deve conter uma Organização Didática (OD) escolar que permita construir, no mínimo, uma Organização Matemática Local (OML) relativamente completa. Essa OML pode ser reconstruída artificialmente na instituição escolar como o resultado de um processo de ampliações e completações progressivas de praxeologias pontuais e praxeologias intermediárias. Essas praxeologias (pontuais e intermediárias) são geradas sucessivamente pelo desenvolvimento evolutivo das questões problemáticas e dos tipos de tarefas associados à OD que serão as *razões de ser* da OML reconstruída.

A OMD que propomos preconiza um sistema de tarefas composto por tipos de tarefa, tarefas e técnicas, articuladas entre si para que os professores e alunos as utilizem de maneira efetiva. Assim, no MPR que estruturamos, o estudo qualitativo de sistemas lineares é um marco tecnológico-teórico que engloba todas as técnicas necessárias para o enfrentamento do novo conjunto de tarefas, onde as técnicas utilizadas são confiáveis, econômicas e pertinentes ao discurso tecnológico que expomos nesse MPR. Além disso, entendemos que o discurso tecnológico ajuda na explicação das técnicas, permitindo que a tecnologia seja inteligível para outros indivíduos da instituição onde testamos esse MPR, ou seja, essas técnicas devem habitar institucionalmente.

Nessa perspectiva, temos como objetivo, neste artigo, expor aspectos da constituição de um Modelo Praxeológico de Referência para o ensino de Álgebra Linear num curso de Licenciatura em Matemática a partir do estudo do objeto sistemas lineares, como elo de

[8] Chevallard (1999), ao sentar as bases para a Teoria Antropológica do Didático (TAD), assume que toda atividade humana é uma prática que se realiza no interior de uma instituição e que pode ser modelada por um modelo único denominado de praxeologia que é constituído por uma práxis, ou saber-fazer, e que é sempre acompanhada de um discurso, o logos ou saber, mais ou menos desenvolvido, que dá razão e justifica essa práxis.

[9] Teoria dos Sistemas Lineares.

interligação, entre os ensinos médio e superior. O MPR proposto alude possibilidades de se ensinar elementos da AL não se afastando de praxeologias oriundas do ensino médio, sugerindo possibilidades de um processo didático de modelização desta disciplina. Para alcançar esse objetivo lançamos mão do quadro teórico-metodológico da TAD, com enfoque na Noção de Praxeologias e de Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP)[10].

Quadro Teórico-Metodológico

Chevallard (1999) propõe um modelo epistemológico para o estudo da atividade matemática, que descreve o saber matemático em termos de *organizações ou praxeologias matemáticas institucionais*. Nesta perspectiva o saber surge em dois níveis: o nível da *práxis*, que se refere a prática realizada e o nível do *logos*, que contém o discurso matemático racional, que será utilizado para interpretar, dar sentido e desenvolver a prática matemática. A junção desses dois níveis fora denominada de *praxeologia*.

Em uma organização praxeológica, identificamos: tipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias. Na essência da noção de praxeologia se encontram as noções de tipos de tarefa e tarefas, denotadas, respectivamente, por $\boldsymbol{T}$ e $\mathbf{t}$. Quando uma tarefa $\mathbf{t}$ faz parte de um tipo de tarefa $\mathbf{T}$, dizemos que $\mathbf{t} \in \boldsymbol{T}$ ($\mathbf{t}$ pertence a $\boldsymbol{T}$).

O caráter institucional das praxeologias, inicia-se pela *organização praxeologia pontual*, isto é, aquelas que giram em torno de um único tipo de tarefa *T*, denotada por $[T/\boldsymbol{\tau}/\theta/\Theta]$ (CHEVALLARD, 1997, 1998, 1999). Ao agregar várias praxeologias pontuais surge praxeologias pontuais leva ao surgimento da *organização praxeológica local*, denotada por $[T_i/\boldsymbol{\tau}_i/\theta/\Theta]$. Então, quando várias organizações praxeológicas locais se agregam, em torno de uma determinada tecnologia θ, origina-se a organização praxeológica regional, denotada por $[Tij/tij/qj/\Theta]$. Nesse tipo de organização praxeológica a tecnologia θ comanda o bloco praxeológico, ou seja, prevalece o discurso racional da técnica. O entorno mais complexo vem por meio do agrupamento de organizações praxeológicas regionais, que estão em torno do discurso justificativo da tecnologia θ, algo mais refinado e complexo, é a teoria Θ que prevalece no bloco praxeológico, denotado por $[Tijk/tijk/qjk/\Theta k]$ (CHEVALLARD, 1997, 1998, 1999).

[10] Tradução do original em francês *Parcours d'étude et de Recherche (PER)* – denominação e sigla que assumimos neste artigo.

A praxeologia engendra a integração entre OM e OD (constituindo a OMD), isto é, um sistema de tarefas organizadas que irão atender a intenção didática do professor. No âmbito da TAD, as Organizações Didáticas se estabelecem a partir dos *momentos de estudo* (CHEVALLARD, 1998, 1999). Esses momentos de estudo são assim compreendidos: O *primeiro momento de estudo* é aquele do *primeiro encontro com a organização, o do objeto em estudo*. O *segundo momento* é aquele da *exploração do tipo de tarefa T*, e da elaboração de uma técnica τ relativa a um tipo de tarefa. O *terceiro momento* de estudo é aquele da *construção do bloco tecnológico-teórico* $[\theta/\Theta]$ relativo à técnica. De uma maneira geral, esse momento é uma inter-relação estreita com cada um dos outros momentos. O *quarto momento* é o do *trabalho da técnica*, em particular, de aplicação das técnicas criadas. É o momento de testar as técnicas e de verificar a confiabilidade das mesmas qualitativamente como também quantitativamente. O *quinto momento* é aquele da *institucionalização*, que tem por objetivo precisar elementos teóricos da OM elaborada, distinguindo, notadamente, os elementos que concorreram a sua constituição, e de outra parte, os elementos que farão de maneira definitiva parte da OM desejada. O *sexto momento* é o da *avaliação* que se articula ao momento da institucionalização.

Esses seis momentos de estudo serviram de base para que propuséssemos tarefas simples sobre sistemas lineares, com intuito que os alunos atingissem a arte da prática[11], para em seguida resolver tarefas cada vez mais complexas. Para levar adiante a nossa proposta, desenvolvemos um PER para estudar qualitativamente os sistemas lineares, numa perspectiva de ser uma tarefa fundamental[12] para o estudo de AL.

Nosso PER *adaptado* partiu das ideias de Bon (2011) que vislumbrou um percurso de estudo denominado *PER particular* e Delgado (2006) que realizou uma *experimentação de uma prática de estudo para formação de professores*, em nossa pesquisa denominamos *PER adaptado*. Adaptado, pois ocorreu em um curso de formação inicial de Licenciatura em Matemática, já que na França ocorre com predominância no ensino secundário (colégios e liceus); partimos de uma questão geratriz (Q_0), que diferente dos moldes franceses, foi elaborada pelos autores em vez de ser emanada de discussões com a turma de graduandos; não havia nenhum dispositivo didático institucionalizado em nosso ensino universitário de Matemática que fomentasse o trabalho da técnica, a partir da ideia de

[11] As tarefas não seriam mais um problema para os alunos, isto é, deixariam de ser problemáticas e se tornariam rotineiras.

[12] Cf. Andrade e Guerra (2014).

modelização matemática; a questão proposta foi aberta; outra característica foi a cronogênese, o que distinguiu também esse PER de um AER; partimos de uma questão geratriz, que é diferente dos moldes franceses; a ideia do PER modifica o esquema do AER, já que em vez de procurar uma entidade praxeológica $\wp$ fixada de antemão, uma pergunta $Q\wp$ cujo estudo sob certas restrições e sob certas condições, faz o reencontro de [X, Y] com $\wp$ e com outras obras.

O PER que realizamos ocorreu numa Instituição Pública de Ensino Superior, na cidade de Belém, estado do Pará, teve 10 sessões, em encontros semanais de 150 minutos cada um, em média, num período de 3 meses, além de tarefas complementares extraclasse, com graduandos em Licenciatura em Matemática. Para efetivação desse PER, a classe foi dividida em dois grupos de 4 integrantes e dois grupos de 3, pois havia 16 alunos (a partir de agora $\mathbf{A_i}$), que atuaram juntos tanto em classe como fora dela. O diretor de estudo **Y** (professor de sala, primeiro autor deste artigo) e, também, o pesquisador ξ (primeiro autor deste artigo, na época estudante de doutorado) mediaram as discussões e estudos das tarefas.

O Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP)

O percurso de nossa investigação possui uma compreensão sobre as tarefas com sistemas lineares como uma questão forte, no sentido da instalação e manutenção de um PEP, para a construção de organizações praxeológicas de complexidade crescente. Nossa questão Q_0 foi a seguinte: Q*ual(is) objeto(s) matemático(s) podem ser mobilizados para se estudar AL, no que diz respeito ao estudo dos espaços vetoriais, em um curso de graduação em Matemática*?

Bon (2011) relata que a Q_0 é uma das etapas do PEP e configura-se como uma *legitimidade funcional*[13]. Uma vez eleita esta questão entre várias possíveis, ela irá impulsionar e provocar todo o processo de estudo e se deve manter viva (Q_0), ao longo de todo o estudo.

Então, os pesquisadores (orientando e orientador de tese na época) ξ estão engajados em uma atividade matemática com um grupo de graduando **X**. A ligação de ξ com **X** permite se beneficiar das condições $\mathbf{C}_\xi$, sendo que Chevallard (2009d) relata que tais condições

[13] No processo de construção de uma OM se planeja com os alunos o estudo de respostas de questões problemáticas cruciais, ricas e fecundas, além de um importante potencial didático, vinculados à atividade matemática como verdadeiros problemas de engenharia (BON, 2011, p. 8).

não podem ser enumeradas *a priori*: a sua descoberta é progressiva e a compreensão de seu papel na difusão de uma determinada entidade praxeológica $\wp$ são os objetivos permanentes da pesquisa em didática, além de que $\mathbf{C}_\xi$ impõem-lhe ao mesmo tempo as restrições $\mathbf{K}_\xi$, que determinarão ao menos em parte a atividade de ξ.

O PEP está associado ao *esquema herbartiano*[14]: $(\mathcal{S}(X; Y; \mathcal{Q}) \rightharpoonup M) \hookrightarrow R^\heartsuit$. Essa é a forma não desenvolvida desse esquema, que contém o sistema didático $\boldsymbol{S}$, o *milieu*[15] $\boldsymbol{M}$ e a resposta esperada $R^\heartsuit$ (CHEVALLARD, 2009a, 2009b). Na metodologia do PER, o esquema herbartiano é aplicado em sua forma desenvolvida: $[\mathcal{S}(X; Y; \mathcal{Q}) \rightharpoonup \{R_1^\Diamond, R_2^\Diamond, \dots, R_n^\Diamond, R_{n+1}^\Diamond, O_{n+1}, \dots, O_m\}] \hookrightarrow R^\heartsuit$. Nessa forma, o esquema herbartiano revela a complexidade do *milieu* M = $\{R_1^\Diamond, R_2^\Diamond, \dots, R_n^\Diamond, R_{n+1}^\Diamond, O_{n+1}, \dots, O_m\}$.

Os $\boldsymbol{R}^\Diamond$ (R autenticado ou validado) são respostas prontas e legitimadas institucionalmente. Assim, diz-se que elas receberam um "selo" institucional. A análise das repostas $R^\Diamond = \{R_1^\Diamond, R_2^\Diamond, \dots, R_n^\Diamond, R_{n+1}^\Diamond\}$ poderá levar à elaboração da resposta esperada $R^\heartsuit$ (CHEVALLARD, 2009a, 2009b). Entretanto, há as respostas *R* provenientes das obras $O = \{O_{n+1}, \dots, O_m\}$, da cultura. Da análise dessas obras *O* podemos ter $R = R^\Diamond$ e, por conseguinte, elaborar a resposta $R^\heartsuit$ (CHEVALLARD, 2009a).

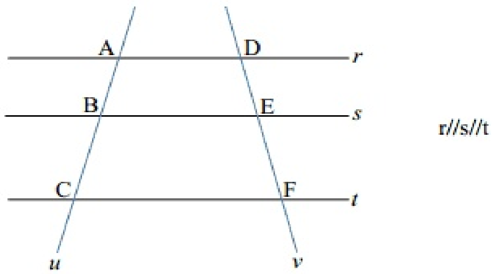
As sessões do PEP mediadas pelo MPR

O PEP que realizamos teve um total de dez sessões. Cada sessão mostrou que esse dispositivo didático-metodológico possui certa "empiria" de estudo diferenciada, conforme expomos a seguir, dos recortes que fizemos dessas dez sessões.

A primeira sessão serviu de introdução ao processo de elaboração do MPR, sendo que o PEP seguiu um percurso de estudo mediado por tarefas (em termos da TAD), assim, exibiremos a(s) resposta(s) carimbada(s) por **X** e **Y**. A eleição da resposta carimbada $R_x^{\Diamond t_{ij}}$, onde t_{ij} corresponde à tarefa e **x** indica a resposta de um aluno, essa resposta se deu pela socialização e discussões das resoluções das tarefas propostas. Nessa primeira sessão, iniciamos a estruturação do MPR por um tipo de tarefa T_1 (Determinar o valor de **x**, sendo **x** o valor da medida de um segmento) e pelas tarefas t_{ij} pertencente a T_1 (*momento do primeiro encontro*), em que os alunos a partir da Figura 1 e com o auxílio do Teorema de Tales, deveriam por meio de processos algébricos, chegar à equação da reta.

[14] Em homenagem ao filósofo alemão Johann Friedrich Herbart.
[15] A tradução de *millieu* é meio em língua portuguesa, mas a compreensão e significado de um *milieu*, na Didática da Matemática francesa, é muito mais ampla que o significado de meio.

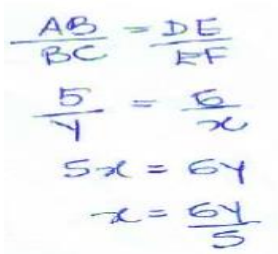
Figura 1 – Duas retas cortadas por transversais.



Fonte: Autores

A tarefa t_{11} (Determinar o valor de EF = x, sabendo que AB = 5 cm, BC = y, DE = 6 cm) desencadeou os estudos sobre AL. A Figura 2 expressa a resposta $R_x^{\Diamond t_{11}}$ dada pelo aluno A_6 para a tarefa t_{11}.

Figura 2 – Resposta carimbada $R_x^{\Diamond t_{11}}$



Fonte: Produção de A_6 (2014).

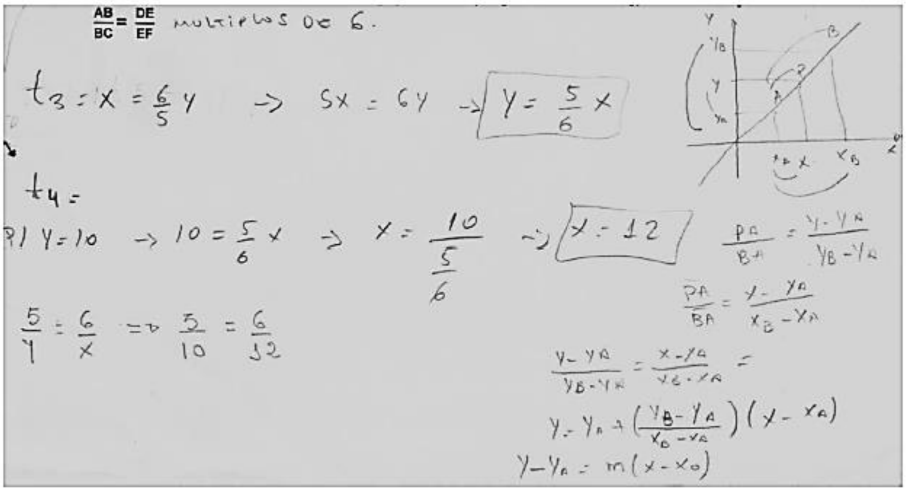
Observarmos na resposta $R_x^{\Diamond t_{11}}$ (Figura 2), o *momento do trabalho da técnica* na resolução da tarefa t_{11}. Nesse trabalho da técnica os alunos estabelecem a relação de proporcionalidade entre unidades de medida dos segmentos e valores desconhecidos (incógnita, variável etc.). Para instigar as discussões sobre a resolução da tarefa t_{11}, o diretor de estudo (**Y**) lançou a questão $\mathbf{Qy_1}$: *Por que apresentaram essa representação resolutiva?* Os alunos responderam, quase unânime, que $R_x^{\Diamond t_{11}}$ (resposta da tarefa t_{11} dada por A_x = $\mathbf{A_6}$ pertencente a **X**): *é que assim que se resolve utilizando o Teorema de Tales*. Essa resposta dos alunos motivou a discussão em classe de que quando há uma figura desse tipo, eles utilizam direto a técnica, ou seja, recorrem à proporcionalidade entre os segmentos. A partir dessa constatação, deflagramos a questão $\mathbf{Q_1}$: *Podemos, a partir do Teorema de Tales, construir tarefas de Álgebra ou de Geometria Analítica?* Os membros de **X** discutiram e chegaram à conclusão que nessas tarefas aparecem as letras. Assim, para ampliar essa ideia, propusemos a tarefa t_{12}: Determinar três possíveis medidas inteiras para o segmento EF, de forma que AB = $\frac{Y}{X}$.

A tarefa t_{12} possibilitou o *momento exploratório*, pois há a necessidade de se buscar uma técnica que permita solucionar t_{12} em conexão com t_{11}. A resposta $R_x^{\lozenge t_{12}}$ (resposta carimbada para t_{12}), de um modo geral, está associada a $\frac{5}{y} = \frac{6}{x}$, por exemplo, se y =5 ⇒ $\frac{5}{5} = \frac{6}{x}$ ⇔ x = 6, de igual forma, se y = 10, tem-se x = 12. Quando se estabelece que AB = 5 e AB = y/x, temos a equação y = 5x, essa equação possui valores que solucionam o problema proposto, mas não todos, pois não obedece à proporcionalidade em relação à Figura 1. Logo, há restrições implícitas na regra da proporcionalidade dos segmentos proporcionais. Alguns alunos de **X** fizeram, y = 5x ⇒ y = 5 · 1 = 5 e quando substituíram em $\frac{5}{y} = \frac{6}{x}$ verificaram que $\frac{5}{5} = \frac{6}{1} \Rightarrow 1 = 6$, que é uma resposta que não contenta a propriedade da proporcionalidade, essa foi a técnica apresentada pelos alunos A_7, A_{13} e A_{14}. Assim, a proposição da tarefa t_{12} não é consistente para a ideia de proporcionalidade estabelecida na tarefa t_{11}, mas serviu para abordarmos sobre as possíveis conexões entre Geometria Plana e o estudo de Função. Essas compreensões motivaram, na sala de aula, o aluno A_5 formular a questão Q_2: *Há alguma relação entre a técnica de resolução de t_{11} e t_{12} e a função linear, pois elas se parecem?*

Do questionamento de A_5, formulamos o tipo de tarefas T_2: Determinar a equação da reta na forma y = ax + b. Desse tipo de tarefa, propusemos a tarefa $\mathbf{t_{21}}$: Determinar a equação da reta partir da solução da tarefa t_{11}. Essa tarefa apresenta uma técnica que é a mesma que se utiliza para resolver o problema referente ao Teorema de Tales. A referida tarefa foi compreendida pela comunidade de estudo como uma tarefa articuladora que pode justificar a introdução a equações lineares e sistemas. Mostramos na Figura 3 a resposta $R_x^{\lozenge t_{21}}$ de autoria do aluno A_9.

Nota-se que o aluno ainda desenhou o plano cartesiano, deduzindo a equação da reta a partir deste, e nas discussões em classe, abordamos a relação de t_{21} com a tarefa t_{11}. Na sequência, membros de **X** puderam observar as relações entre o Teorema de Tales e a equação da reta, chegando à conclusão que ocorre um processo de algebrização da Geometria. A razão de ser da tarefa, partindo do Teorema de Tales, está ligada a noções de razão e proporção. Além disso, mostra-se que, com o alcance da técnica, foi possível desenvolver a equação da reta, articulando-se as tarefas t_{11} e t_{21}.

Figura 3 – Resposta carimbada $R_X^{\lozenge t_{21}}$.



Fonte: Produção de A_9.

Na segunda sessão continuamos PEP e fornecemos para estudo à turma a obra *O₁*, intitulada: *Da Álgebra Geométrica Grega à Geometria Analítica de Descartes*, de Ramos (2013). Ainda nessa sessão abordamos a noção de proporcionalidade, e, em seguida, comentamos sobre as curvas trabalhadas por Descartes e Fermat em seus estudos para determinar a tangente de uma curva.

Do estudo da obra de Ramos (2013) e das compreensões de Descartes, Fermat e Oresme, chegamos ao consenso de que a Geometria Analítica veio algebrizar problemas da Geometria de Euclides, que eram resolvidos com régua e compasso. Nessa segunda sessão temos o m*omento do primeiro encontro* com os sistemas lineares: T_3: Resolver o sistema linear 2 por 2. Desse tipo de tarefa, temos a tarefa t_{31}:

- t_{31}: Resolver o sistema linear a seguir:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

Para a tarefa t_{31} temos a resposta carimbada $R_X^{\lozenge t_{31}}$ dada pelo aluno A_1. Esse aluno resolveu o sistema pelo método da substituição e eliminação, determinando a solução S $=\{(\frac{11}{5}, \frac{3}{5})\}$.

Após a tarefa t_{31}, o estudo continuou com a tarefa t_{32}:

- t_{32}: Resolver o sistema linear pelo método da comparação.

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$$

Apesar de os alunos estarem no ensino superior, a tarefa t_{32} acabou sendo uma restrição $K_{\xi 1}$, porque membros de X desconheciam esta prática, pois tentaram utilizar o método de Crammer. A razão de ser desta tarefa é revelar a potencialidade do método da substituição e eliminação. A resposta carimbada $R_x^{\lozenge t_{32}}$ dada pelo aluno A_{11} (S = {1, 2}), veio da aplicação do método da comparação.

Após tornarmos rotineiras as tarefas de sistemas lineares 2 por 2 (por meio de resoluções de tarefas do mesmo tipo), propusemos uma tarefa um pouco mais complexa, a tarefa t_{33}:

- t_{33}: Resolver pelo método da adição.

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 11 \\ x + y + z = 6 \\ 5x + 2y + 3z = 18 \end{cases}$$

Durante esta sessão, os alunos A_x, de um modo geral, encontraram uma solução **S** = {(0, 5/3, 6)}, mas esqueceram de testar nas 3 equações. Quando a substituíram nas demais, viram que não se aplicava. Os alunos A_3, A_7 e A_9 disseram que no ensino fundamental não se aplica este método para um sistema 3 por 3 e no ensino médio, resolve-se o sistema por determinantes, por Sarrus ou Laplace. Das falas desses alunos surge a questão $Q_{2,1}$: *Por que se resolver por este método? Dá o mesmo resultado pelos outros?*

Após o estudo da obra Ramos (2013) O_1 os alunos de **X** exploraram a técnica presente neste tipo de tarefa e conseguiram suprir a dificuldade, pois esta se apresentava em trabalhar a segunda equação com a terceira, considerando a incógnita que havia sendo excluída, pois no momento de explorar a técnica surgiu a dificuldade em decorrência da relação que **X** tinha com este objeto, pois era restrita a sistemas lineares 2 por 2. A t_{34}: Resolver o sistema linear pelo método substituição e eliminação.

$$\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ 3x-3y+z=8 \\ 2y+z=0 \end{cases}$$

A razão de ser dessa tarefa consistiu na aplicação do método da substituição em um sistema linear 3 por 3. Notamos que os alunos conseguiram constatar a potencialidade do método, isto é, tem um longo alcance. Então, revelamos nessa tarefa o alcance desta técnica, não sendo, portanto, uma questão morta, ou ainda centrada em si mesma, pontual, mas que seja articulada com outros tipos de tarefas (*momento exploratório*).

Apesar de termos admitido inicialmente como condição $\mathbf{C_{\xi 1}}$, que esta tarefa não traria dificuldades na resolução pelo método da adição para um sistema linear com 3 incógnitas e 3 equações, mas trouxe. Então, foi necessário criar um sistema didático auxiliar S_2 (X, O_2), onde pedimos para que os alunos estudassem a obra O_2 (You Tube: *Método de*

Adição Ordenada), que disponibilizamos na biblioteca do Campus para estudo de **X**, pois era necessário haver um aprimoramento do *trabalho da técnica*.

Na terceira sessão foi possível discutirmos e chegarmos à reposta da tarefa t_{33}. A resposta $R_x^{\Diamond t_{33}}$ (S = {(1, 2, 3)}) dada pelo aluno A_5 foi a carimbada para esta tarefa. A técnica se deu pelo método da adição, muito comum para resolver sistemas lineares 2x2. O objetivo dessa tarefa era de que os alunos percebessem que esse método é o mesmo da substituição e eliminação, que consideramos a tecnologia que justifica esse método.

A quarta sessão do PEP foi direcionada ao terceiro sistema de tarefas, no qual tratamos do tipo de tarefas T_4: Resolver o sistema linear m x n pelo método da eliminação e substituição. Desse tipo de tarefas, elaboramos a tarefa t_{41}:

- t_{41}: Resolver o sistema linear 2x2 pelo método da eliminação e substituição $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 9 \end{cases}$.

De um modo geral, a técnica aplicada para obtenção das respostas $\mathbf{R_x}$ consistiu em aplicar o método de multiplicar a primeira linha (primeira equação) por (-1) e somar com a segunda, eliminando-se a incógnita x. Desse procedimento, obtemos $2y = 8$, que resulta $y = 4$, substituindo-se na primeira equação, tem-se x = 5 e S = {(5, 4)}.

Para alargar o estudo qualitativo de sistemas lineares, elaboramos a tarefa t_{42}:

- t_{42}: Resolver o Sistema S, pelo método da eliminação e substituição:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 20 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 30 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 40 \end{cases}$$

A tarefa t_{42} ficou para estudo extraclasse, mediado pelo sistema didático S_3 (X, O_3), no qual a obra $\mathbf{O_3}$ (Ideias do MPR pré-construído) foi fornecida a **X** para o devido estudo em primeiro momento e, em classe, o sistema S_3 (X, Y, O_3) mediou a continuidade do estudo da obra. Nesse estudo aparece a dificuldade dos alunos, pois, em qual incógnita (letra) isolar e de qual equação. Desse modo, a tarefa se tornou problemática.

A *exploração deste tipo de tarefas T_4*, e da elaboração de uma técnica τ relativa a este tipo de tarefas, a partir do trabalho da técnica, foi desenvolvida pelos alunos de **X** e assim carimbamos a resposta $R_x^{\Diamond t_{42}}$ (S = {(0, 0, 0, 10)}) dada pela turma. Prosseguimos o estudo do método da substituição e eliminação e chegamos à conclusão de que este resolve qualquer sistema linear, e que é o mesmo método da adição e comparação.

Nas discussões sobre a tarefa t_{42} surgiram vários questionamentos como: *se este método era mais complexo que os demais?* Desse questionamento, verificamos tratar-se de um método pelo qual se busca um sistema na forma triangular para se chegar a um sistema equivalente mais simples, e assim encontrar os valores das incógnitas.

A tarefa t_{42} permitiu, a partir do trabalho da técnica, *institucionalizar* um objeto matemático estudado em Álgebra Linear.

Após o estudo da técnica aplicada na resolução da tarefa t_{42}, chegamos a um consenso que, para aparecer o **operador** (operadores elementares), deve-se trabalhar com a equação mais simples para se eliminar as incógnitas das outras equações. A razão de ser da tarefa t_{42} se configurou em compreender que o método do escalonamento é a descrição do método da substituição e eliminação (*momento de institucionalização*). Tal momento do processo se deu com a resolução da tarefa $\mathbf{t_{43}}$ presente na obra $\mathbf{O_3}$ (o sistema didático auxiliar $\boldsymbol{S_4}$ orienta os estudos do *pesquisador* na elaboração do MPR) que trata de resolver o sistema $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = f_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = f_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = f_3 \end{cases}$.

Nesta tarefa executada em classe com os alunos, foi possível verificarmos a gênese do método da Eliminação Gausseana, pois ao trabalharmos só com as letras foi possível apreender a ideia do método. Os alunos de **X** comentaram que esta prática de resolver este tipo de tarefa não é comum na escola, tanto no ensino básico como no superior. Surge Q_3: *Há alguma relação entre os métodos?* A intencionalidade dessa questão esteve atrelada ao estudo das obras O_2 e O_3, fato que nos oportunizou observar as dificuldades apresentadas, verificar e discutir o processo do método. Assim, na discussão em turma para institucionalizar as características dos processos tratados até esta sessão PEP, surgiu a questão Q_4: *É possível se observar algum diferencial neste método em relação aos demais?* As respostas dos alunos A_3, A_5 e A_9, denotadas por R_3^{Q4}, R_5^{Q4}, R_9^{Q4} para esta questão foi que trabalhamos com os coeficientes, e não com as variáveis, enquanto no caso da comparação trabalhamos com as variáveis.

A quinta sessão foi uma continuidade da quarta, pois tínhamos proposto a tarefa t_{44} como atividade para estudo desta sessão. O aluno A_9 relatou que teve que escalonar, pois não dava para substituir a equação E_2 em E_3, por exemplo; A_4 diz que colocou em um formato de tabela os números, após estudar a obra O_4 (Alfredo Steinbruch e Paulo Winterle, 2. ed., 1987). A tarefa t_{44}: Resolver o sistema utilizando os operadores entre linhas a seguir. Esse sistema está abaixo na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 20 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 30 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 40 \end{pmatrix}.$$

A resposta carimbada $R_x^{\lozenge t_{44}}$ veio da resolução feita por parte dos alunos:

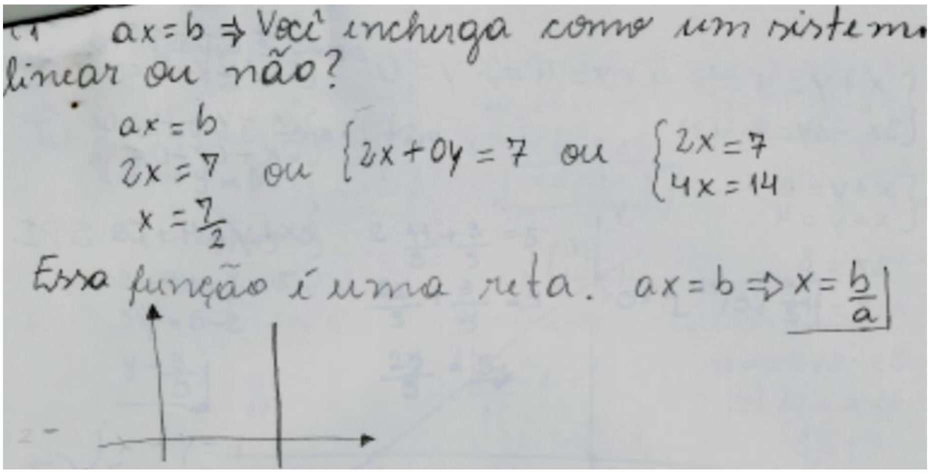
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 20 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 30 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 40 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 20 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 30 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

A técnica apresentada, observando os passos da tarefa t_{43}, foi a mesma, pois aqui se dá o *momento do trabalho exploratório da técnica*. A técnica apresentada na tarefa t_{44} explorada por **X** para resolver esta tarefa, movimentou apenas os coeficientes das equações, e a conclusão que é a mesma da tarefa t_{43}, isto é, os operadores ou a multiplicação das equações por um escalar, adicionado a equação seguinte, é passível de se anular uma letra, portanto, uma técnica potente e econômica, no entender da TAD, pois trabalha-se só com os coeficientes das incógnitas das equações do sistema, logo representamos os sistemas de equações lineares por uma disposição em formato de linhas e colunas, o que veio a ser chamado de matriz (*momento de institucionalização*). Chega-se à conclusão de que a justificativa da técnica é o método da substituição e eliminação (*momento da avaliação*). Apresentamos a obra O_5 Cayley (1858).

Na sexta sessão sugerimos um novo sistema de tarefas, ainda trabalhando com sistemas lineares, pois a ideia é esta, de revelar que o estudo qualitativo de sistemas de equações lineares é o desencadeador da estrutura teórica da AL. O tipo de tarefas T_5 (Resolver o sistema m x n e interpretar geometricamente) e a tarefa t_{51} (Determinar $x \in R \mid ax = b$) conduziram os estudos desta sessão.

A intenção com a tarefa t_{51} foi que componentes de **X** revelassem por meio do registro gráfico a ideia que subjaz a equação, que é uma reta paralela ao eixo **x**, além de ser o início da ideia de vetor, pois partindo da origem o vetor intercepta a reta em x = b/a, que seria a menor distância (ideias discutidas em sala). Na Figura 4 temos a resolução do aluno A_{10}.

Figura 4 - A resposta carimbada $R_x^{\lozenge t_{51}}$ dada por A_{10}.



Fonte: Produção de A_{10}.

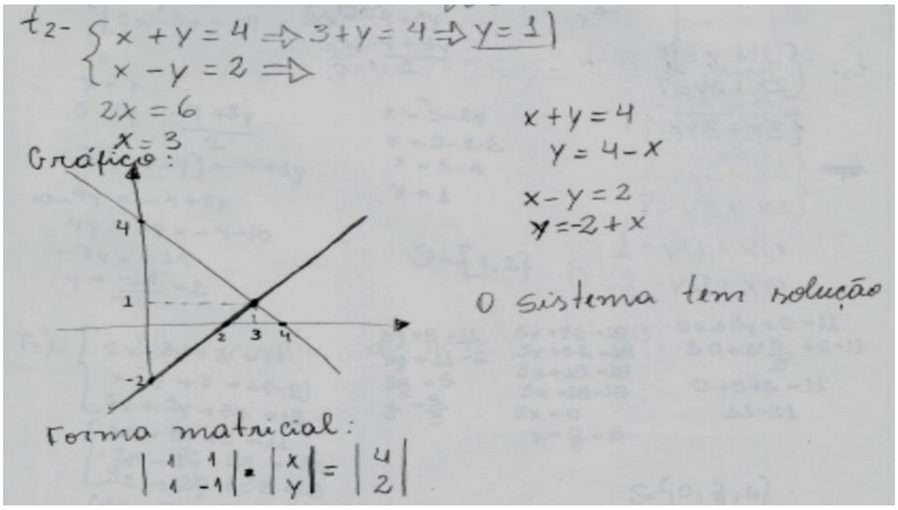
O prosseguimento da sexta sessão teve a tarefa t_{52}: Dado o sistema $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$ resolver e interpretar graficamente. Na sequência a questão Q_5: *O que representa cada equação?* A resposta unânime de **X (Rx)**: *uma reta*. Cada equação é uma reta que se cruza em um ponto, esse ponto é a solução desse sistema linear.

Para sabermos o andamento das compreensões que os alunos estavam obtendo, lançamos a questão Q_6: *Foi possível representar na forma matricial?* Uma das respostas (R_x) dos alunos mostra como compreenderam a interpretação gráfica: $\mathbf{R_x}$: *Sim é possível se verificar que há interseção das retas, e que logo o sistema tem uma única solução.* O estudo da obra O_4 (proposta teórica de nosso MPR) contribuiu para notarmos uma maneira de se escrever as equações de forma matricial (Figura 5). O aluno A_{10} manifestou-se da seguinte forma: *Professor há a interseção das retas. Logo, o sistema apenas tem uma solução*.

As respostas do aluno A_{10} nos motivaram a questioná-lo com a questão Q_7: *Qual interpretação você faz do gráfico?* Obtemos como resposta: $\mathbf{R_{10}}$: *Ajuda no entendimento e na construção da resposta.* A ampliação das ideias surgidas com a tarefa t_{52} prosseguiu com a tarefa t_{53}:

- t_{53}: Dado o sistema $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - 2y = 8 \end{cases}$ resolver e interprete graficamente.

Figura 5 - Respostas carimbadas $R_x^{\lozenge t_{52}}$, $R_x^{\lozenge, Q_5, Q_6}$ dada por A_{10}.



Fonte: Produção de A_{10}.

A resposta discutida e validada para a tarefa t_{53} veio da compreensão que o sistema era possível e indeterminado, portanto, possuía infinitas soluções. O aluno A_8 relatou que temos uma reta que passa pelos pontos por (0,4) e (4,0). Alguns alunos questionaram de como eles dariam a resposta para a tarefa t_{53}. Enfatizamos que a resposta está sobre a reta, e que na Matemática são as infinidades de pontos sobre a reta. A tarefa t_{53} já começa a preparar a ideia de formação de um espaço vetorial. Dessa forma, uma tarefa do tipo de tarefas T_5, cuja solução única ocorre pela interseção entre retas, e quando não possui solução é quando não há interseção, consequência das retas serem paralelas.

Para avançar na construção do MPR, utilizou-se o tipo de tarefa T_6 (Determinar a solução de menor tamanho). Nossa intenção com esse tipo de tarefa é de introduzir a ideia de vetor. A tarefa t_{61} desencadeou o estudo dessa ideia:

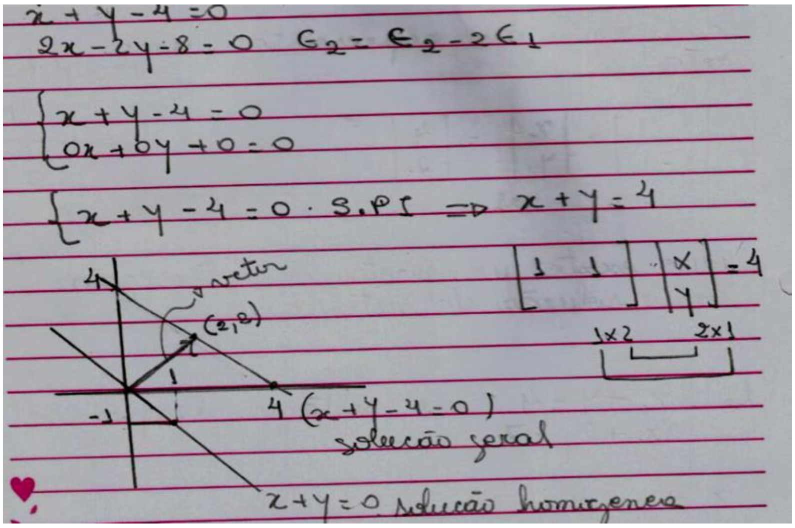
- t_{61}: Determinar a solução de menor tamanho do sistema $\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 2x - 2y - 8 = 0 \end{cases}$.

De início a tarefa t_{61} pareceu sem resposta para os alunos de **X**. Então, pedimos para que estudássemos O_4 e tentássemos resolver esta tarefa. Estudamos na obra este tipo de tarefa. A condição C_{ξ} **2** foi que o sistema fosse resolvido. Foi discutido entre **X** e **Y**, que há infinitas soluções. O aluno A_{12} sustenta sua resposta $R_{12}^{t_{61}}$, *como sendo aquela que se aproxima mais do infinito*. Do estudo da tarefa t_{61} surge em classe a questão Q_8, proposta por A_{14}: *Devemos pensar em tamanho, certo? Como vamos medir este tamanho se eles são pontos?*

Os alunos de X verificaram a técnica proposta na obra O_3 e exploraram e trabalharam a técnica para resolver t_{61}. A resposta $R_X^{Q_8}$ dada por A_{13}: *É de que tem que se tratar retas sobre os pontos*. A resposta de A_{12}, motivou a questão Q_9: *Como então vamos ligar retas até os pontos?* Uma resposta sugere que devemos ligar os pares das coordenadas. Mostramos uma solução sobre o eixo x que atinge a reta $x + y - 4 = 0$, que é outra solução. O aluno A_8 fala que o ponto (2,2) é a solução da equação e questiona: *Mas esta solução é um ponto, como medimos isto? Como vamos medir o tamanho da solução?*

Trabalhamos a técnica e institucionalizamos, pois discutimos a solução geral sendo a solução particular e a solução do homogêneo associado ao sistema, que chamamos de um sistema desmembrado (Figura 6).

Figura 6 - A resposta carimbada $R_x^{\lozenge t_{61}}$ dada por A_8.



Fonte: Produção de A_8.

A resolução da tarefa t_{61} desencadeou várias compreensões: O aluno A_5, por exemplo, disse que o desenho (registro geométrico) torna mais fácil a interpretação da resposta, mas sem o desenho fica complicado dizer o que é a solução de menor tamanho. De acordo com o aluno A_7, a solução matricial com motivação geométrica ajudou no entendimento da noção de vetor. Para motivar o estudo da sétima sessão, dissemos que um sistema linear de infinitas soluções possui uma solução do sistema linear homogêneo, associado a solução de um sistema principal.

Ao chegarmos à sétima sessão do PEP, tínhamos avançado na estruturação do MPR e começávamos a refinar o estudo da AL, ou seja, a noção de vetor incorporava-se a OMD do MPR. Nessa etapa do PEP, os grupos ficaram interessados e questionaram: *Por que representamos os sistemas por equações? Por que não podemos utilizar determinantes?*

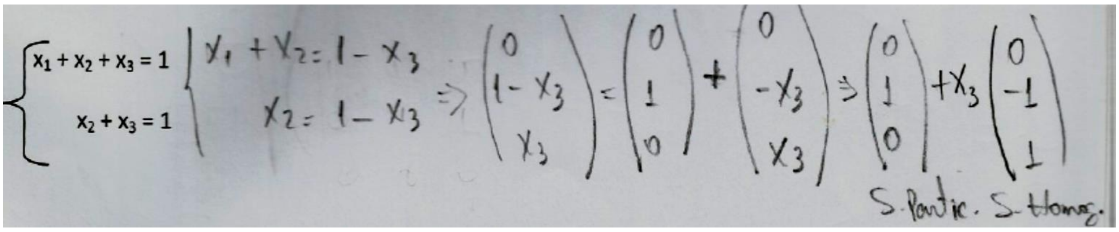
Das diversas opiniões, chegamos a um consenso que *se os determinantes para resolver sistemas pequenos, como os de ordem 3 × 3, já dão trabalho, imagina um 10 × 10,* que é da ordem de 10! (fatorial de 10). A técnica que exploramos na resolução das tarefas de sistemas lineares foi *potente*, pois resolve qualquer sistema. A ideia foi revelar que os saberes considerados estabelecem a confiabilidade da técnica, pois produzem bem os gestos que a compõem, permitindo que se alcance as metas atribuídas ao momento do trabalho da técnica. No prosseguimento da sétima sessão formulamos o tipo de tarefa T_7 (Representar sistema linear na forma matricial) e a tarefa t_{71}:

- t_{71}: Escrever o sistema linear a seguir na forma matricial: Foi trabalhado a obra O_5 (CAYLEY, 1858).

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Assim, temos na Figura 7 a resposta elaborada pelo aluno A_5 para a tarefa t_{71}.

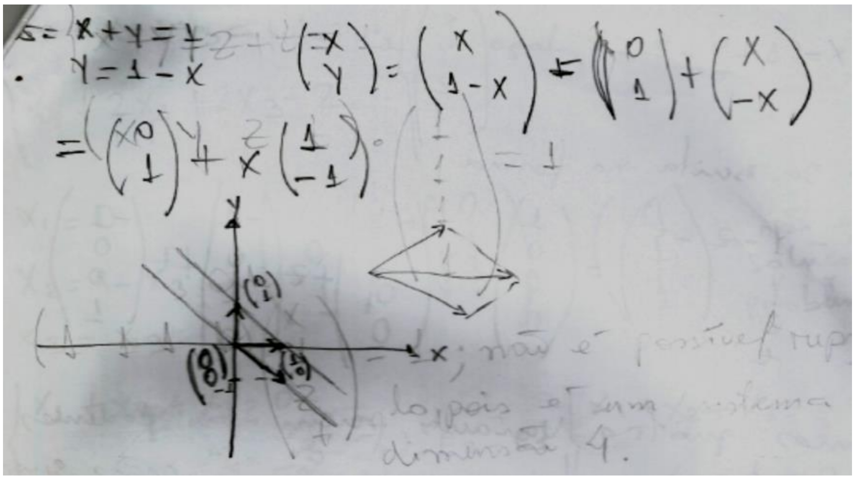
Figura 7 - A resposta carimbada $R_x^{\alpha_{71}}$ dada por A_5.



Fonte: Produção de A_5

Nesta fase, os membros de **X** exploram a técnica e, segundo o modelo da obra (O_4), a resolução se dá na forma de matriz coluna, que é o melhor modo de representar e resolver o sistema (Figura 7). No *momento de institucionalizar* as ideias, revelamos junto a **X**, a existência de uma solução particular mais a solução de um homogêneo associado a esta. A partir da solução gráfica, foi possível visualizar as diversas soluções do homogêneo adicionado à solução particular, que é única, e a partir desta podemos determinar as diversas soluções do sistema, e com isso revelamos um espaço formado por vetores. Para tornar mais consistente a noção de vetores associada à resolução de sistema linear, formulamos a tarefa t_{72}: **Dado o sistema x + y = 1 de uma única equação de duas variáveis, escreva-o na forma matricial. Podemos representá-lo geometricamente?** A resolução dessa tarefa por meio do registro geométrico serviu para motivar os alunos e verificar a constituição do espaço formado por vetores (Figura 8).

Figura 8 - Resposta carimbada $R_x^{\lozenge t_{72}}$ dada por A_5.



Fonte: Produção de A_5.

A ideia de se representar as soluções, na forma do registro geométrico, teve o intuito de visualizar a formação do espaço de vetores, a partir dos diferentes valores da variável livre (x), ou seja, das diferentes soluções do homogêneo. Utilizamos a mesma técnica que é representar no sistema de coordenadas, onde traçamos a reta formada por pontos com todas as soluções mais a reta do homogêneo associado ao sistema, sendo possível se verificar a formação do R^2.

Os alunos de **X** verificaram por meio do registro gráfico o paralelismo entre as retas. Os alunos de **X** disseram que uma equação diferencial de 2ª ordem linear tem uma solução particular mais uma solução do homogêneo associado à equação. A partir de então começamos a comparar as técnicas utilizadas. O trabalho com a tarefa t_{72} despertou em membros de **X** a possível razão de ser dos sistemas lineares, pois estes são a gênese de vários objetos matemáticos, que para nós (membros de **X**) eram ocultos até então.

Ampliamos o percurso de formação com a tarefa t_{73} (Dado o sistema $x + y + z + t = 10$ escreva-o na forma matricial), completada com questionamentos: *O que esta equação representa? É possível representá-la geometricamente?* A ideia com a tarefa t_{73} foi trabalhar espaços com dimensão maior que 3. Para essa tarefa o aluno A_8 apresentou uma resposta na forma matricial e, para ampliar as compreensões, dissemos aos alunos que estudassem o que representava esta equação. Além disso, o aluno A_9 externalizou sua compreensão, explicando que não haveria como desenhar uma figura, pois se trata de um sistema com mais de 3 eixos, mas no formato de matriz podia-se verificar que só aparece

3 variáveis, logo o sistema poderia ser estudado no R^3. O aluno A_1 completou a aula ao falar que esta forma de se representar é um hiperplano.[16]

Ao atingirmos a oitava sessão do PEP, propomos os tipos de tarefa T_8 (Determinar a solução do sistema linear de ordem 3x2) e T_9 (T_9: Determinar a solução do sistema linear homogêneo associado aos sistemas lineares de ordem 3x2). Do tipo de tarefa T_8 formulamos a tarefa t_{81}:

- t_{81}: Determinar a solução do sistema linear com 3 variáveis e 2 equações $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

É importante notar a razão de ser da tarefa t_{81} a partir do que propomos na OMD, em que podemos representar o sistema linear na forma abreviada e separarmos a solução particular mais a do homogêneo. Assim, pudemos estudar o sistema trabalhando com uma única variável (x_3), a qual controla as soluções do sistema principal, ou seja, S = $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 - x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Para maior solidez das noções vetoriais intrínsecas aos sistemas lineares, propusemos a tarefa t_{91}:

- t_{91}: Determinar o sistema o sistema linear homogêneo associado ao sistema linear abaixo:

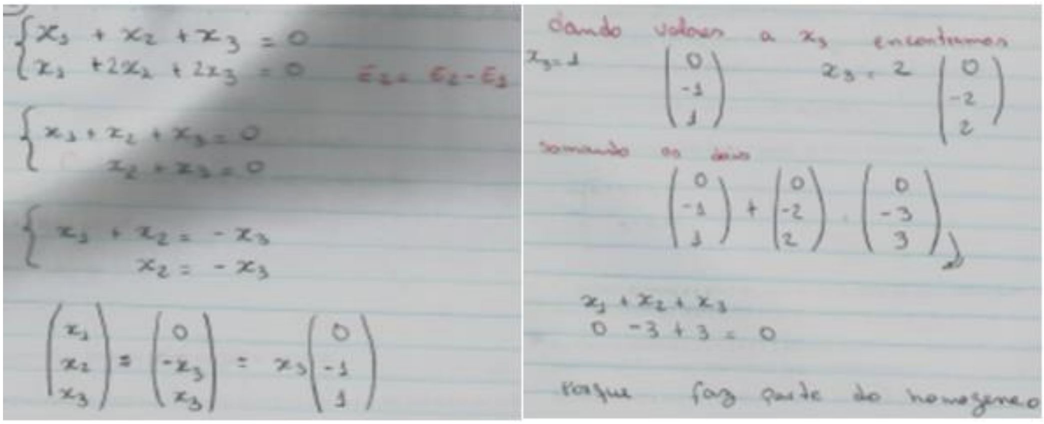
  $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$.

Duas soluções de um sistema homogêneo, quando somadas, resultam na solução do homogêneo, pois os vetores partem da origem e percorrem a reta (homogêneo). A partir da resposta de A_2, mostrada na Figura 9, foi possível se verificar o estabelecimento de uma nova relação do aluno com o objeto estudado. A razão de ser foi de trabalhar a soma de subespaços.

Com os tipos de tarefa T_8 e T_9, conforme trabalhamos no modelo, concluímos que a adição de duas soluções de sistema homogêneo é a solução do próprio sistema homogêneo (SH). Logo, o SH tem sempre uma solução nula, enquanto no sistema não homogêneo não há; o múltiplo de uma solução também é solução, enquanto no não homogêneo isso não ocorre. Por fim, a soma de duas soluções para o homogêneo é a solução.

[16] Figura geométrica de curvatura nula em um espaço euclidiano n-dimensional e cuja equação em coordenadas cartesianas é linear.

Figura 9 - Resposta carimbada $R_x^{\Diamond t_{91}}$ dada por A_2.



Fonte: Produção de A_2

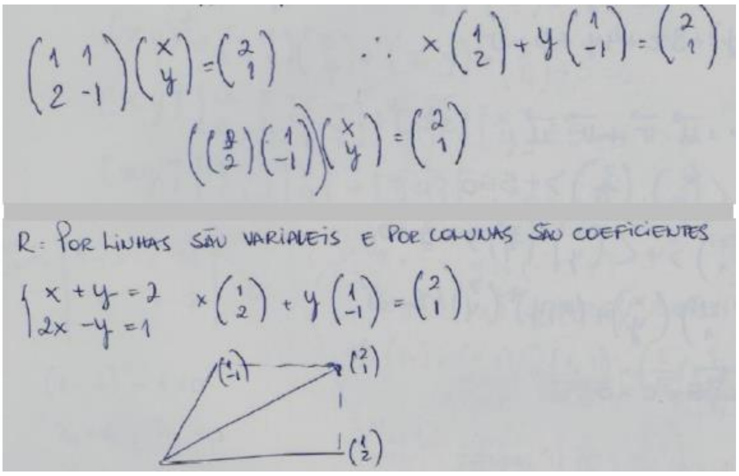
A nona sessão do PEP demarca a etapa de consolidação do MPR, pois chegamos ao estudo de vetores mediado pela tecnologia θ: *estudo qualitativo de sistemas lineares*. Coube ao tipo de tarefa T_{10} (Interpretar um sistema linear como um conjunto de vetores) e a tarefa t_{101}, alavancar o processo de estudo e formação.

- t_{101}: Interpretar o sistema linear $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ como um conjunto de vetores.

As questões a seguir encaminharam as discussões em sala de aula: Q_{10}: *Qual a representação na forma matricial?* Q_{11}: *Há outra forma de representá-lo ainda utilizando matrizes?* E Q_{12}: *Podemos pensar o problema por linhas e/ou por colunas?*

Utilizamos a motivação geométrica e representamos estes vetores no sistema. Assim, podemos pensar nas matrizes como conjunto de vetores, logo genericamente, temos $x\vec{u}$ + $y\vec{v}$ = $\vec{w}$. Com isto, surgem as ideias que aparecem nos livros que é interpretar as matrizes como linhas (pensando nas equações) ou como colunas (pensando com as variáveis), o mesmo vale para vetores. Estamos diante de uma *dualidade*, ou seja, um problema que se resolve por coluna tem uma relação direta com um problema que se resolve por linha. Graficamente, por meio da regra do paralelogramo, podemos representar a soma de vetores $x\vec{u}$ + $y\vec{v}$, obtendo como resultado $\vec{w}$. Podemos pensar do seguinte modo: Quais são os escalares x e y que multiplicados, respectivamente pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ *que somados produzem* $\vec{w}$? Dizemos, então, que $\vec{w}$ é *uma combinação linear* de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, logo, um sistema tem solução quando o vetor independente é combinação linear das colunas, por outro lado quando não existem os escalares o sistema não tem solução. Na Figura 10 temos a solução que o aluno A_{13} esboçou.

Figura 10 - Resposta carimbada $R_x^{\lozenge t_{101}}$ dada por A_{13}.



Fonte: Produção de A_{13}

Chegamos à décima sessão do PEP, na qual a estrutura do MPR está consolidada. Porém, continuamos a formação com o tipo de tarefas T_{11} (Resolver o sistema linear) e a tarefa t_{111} serviu de motivação para isso.

- t_{111}: Resolver o sistema $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$ pelo método do escalonamento de Gauss.

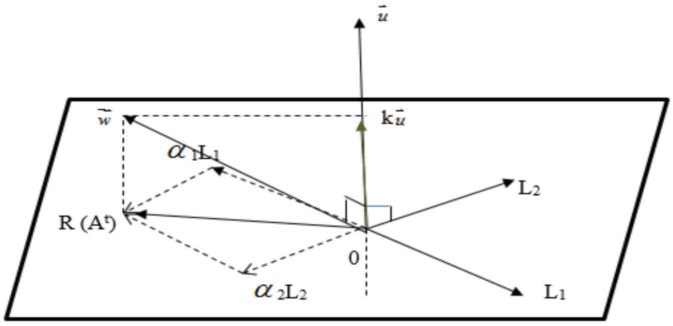
Houve o seguinte estudo em sala: trabalho de **Y** e **X**. Podemos deduzir pelo exemplo que um sistema homogêneo se dá por encontrar um vetor que seja *ortogonal* a cada linha da matriz, pois o produto escalar é zero. Resolvendo o sistema, temos:

A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ → $L_2 = L_2 - 2L_1$ → $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, voltando ao sistema:

$\begin{cases} x - y = -z \\ y = z \end{cases}$, logo a solução x = 0, y = z e z = z, então S = {(0,z,z)} ou S = {z(0,1,1)} ou S ={(0,1,1)}. *Portanto (0,1,1) é ortogonal aos vetores (1,-1,1) e (2,1,-1).*

No *momento de institucionalizarmos*, relatamos que o vetor $\vec{u}$ é ortogonal a L_1 e a L_2. Diremos então que $\vec{u}$ é o *núcleo da matriz ou kernel da matriz*, que é diferente do vazio. O espaço que trabalhamos tem 3 componentes (x, y, z), ou seja, o R^3 que é a soma de um plano com reta, logo existe um *espaço linha*, que é um espaço gerado pelas linhas da matriz, que iremos representar por $R(A^t)$ – *gerado de A transposto*. Podemos dizer que o kernel da matriz A é o conjunto de todos os vetores do espaço, tal que A · $\vec{u}$= 0. Nesta etapa, tratamos da ideia de núcleo. Logo, a *matriz A* = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ *quebra o espaço em duas* parte no *gerado de A transposto* R(A^t) que forma um plano e em núcleo de A N(A), que forma uma reta. Podemos concluir que dado um vetor qualquer ou ele está na linha ou no núcleo. Mas se ele não está na linha ou na coluna ele é obtido pela soma dos dois. O vetor $\vec{w}$é formado por uma combinação $\vec{w} = \alpha_1 \overrightarrow{L_1} + \alpha_2 \overrightarrow{L_2}$ + k$\vec{u}$ (Figura 11)

Figura 11 - Representação geométrica do vetor $\vec{w}$.



Fonte: Autores.

Q$_{13}$: *É possível generalizar este processo*? (*Momento de institucionalização*).

Dizemos, então, que o *produto interno* ou *produto escalar* é quando se tem uma aplicação que leva um par de vetores em um escalar. Um espaço vetorial de dimensão finita no qual está definido um produto interno é um espaço vetorial euclidiano. O espaço foi gerado pelas linhas da matriz R(A^t), conforme nossa resposta apresentada na projeção ortogonal em relação ao plano. Desse modo, temos um vetor saindo deste, que o **Y** chamou de espaço linha (núcleo da matriz). Esta ideia pode ser estendida para vetores de dimensão **n**, porém sem representação geométrica.

Considerações finais

As contribuições dadas pelo PEP adaptado ao modelo na pesquisa revelaram outra razão de ser para o estudo da AL, onde o estudo dos sistemas justifica as práticas com espaços vetoriais, subespaços e combinações lineares. Trata-se, portanto, de um olhar diferente do modelo dominante na instituição pesquisada, em que o estudo é apresentado por definição. A razão de ser de nosso estudo perpassou em trabalhar com praxeologias articuladas pelo estudo qualitativo de sistemas lineares.

No modelo, que propomos ser alternativo, após o PEP, a articulação das OMD, proposta pelo estudo dos sistemas lineares, fez emergir por meio dos sistemas de tarefas a gênese das operações matriciais, os espaços vetoriais e as combinações lineares – conceitos estes institucionalizados pelo professor durante o percurso de formação.

Os resultados a partir do PEP confirmam nossa hipótese de que o estudo qualitativo dos sistemas lineares se constitui em resposta plausível para responder à questão geratriz do percurso de estudo, porque propomos o ensino da Álgebra Linear em conexão com conteúdo ministrados no ensino básico.

A partir de nossos estudos conseguimos alcançar o objetivo geral almejado e elaborar uma proposta de um Modelo Epistemológico de Referência com o propósito de se tornar alternativo sobre o ensino de algumas noções de Álgebra Linear.

Revelamos a potencialidade do saber, que é nossa tecnologia, *estudo qualitativo de sistemas lineares,* que perpassa pelo gênero de tarefa: *estudar sistemas lineares.* A tecnologia das praxeologias do modelo justificou o estudo de objetos da AL. Sendo assim, estamos diante de OMD Regional, pois nossas tarefas estão associadas a um componente tecnológico e houve a presença de diferentes técnicas para cada tipo de tarefa com a possibilidade de discernir critérios entre elas (BON, 2011).

O ensino da Matemática se torna complexo, pois ao reconstruirmos os saberes, como no caso da ortogonalidade, ocorre por *conveniência didática*, que estes saberes são *quebrados*, e ficam então *desarticulados* dos demais objetos. O que mostramos foi um problema de grande interesse teórico matemático, pois os sistemas lineares, que depois abstraímos para as matrizes, quebram o espaço em dois espaços menores e que são ortogonais.

A comunidade de estudo sela a resposta $R^{\heartsuit}$, reafirmando a potencialidade das tarefas relacionadas ao estudo qualitativo de sistemas lineares. Isto revela que as condições para eleição das tarefas estão relacionadas à intenção didática em articular tais tarefas não só relativas de um setor em estudo, mas com tarefas de outros setores, como no caso do estudo dos sistemas lineares articulados ao ensino de vetores.

Referências

ANDRADE, R. C. D.; GUERRA, R. B. *Tarefa fundamental em um percurso de estudo e pesquisa: um caso de estudo para o ensino da Geometria Analítica*. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v. 16, n. 4, 2014. p. 1201-1226.

BON, C. F. *Los Recorridos de Estudio e Investigación en las Escuelas de Ingeniería. Trajectories of Study and Research in Engineering Schools*. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v. 13, n. 3. 2011. p. 547-580.

CARLSON, N. D. *Teaching linear algebra: Must the fog always roll in?* The College Mathematics Journal, v. 24, n. 1, 1993. p. 29-40.

CATALÁN, P. B. *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. Zaragoza. 2003.

CAYLEY, A. *A memoir on the theory of matrices*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 148, 1858. p. 17-37.

CHEVALLARD, Y. *Les savoirs enseignés et leurs formes scolaires de transmission: un point de vue didactique*. 1997 Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_ article=30>. Acesso em: 30 jun. 2014.

________________. *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathematiques: l'approche anthropologique*. 1998. Disponível em: <http://yves.chevallard.free. fr/spip/spip/article.p hp3?id_article=27>. Acesso em: 7 dez. 2014.

________________. *L`analyse des pratiques enseignantes en théorie anthopologique du didactique,* Recherches en didactiques des mathématiques. Grenoble. La pensée Sauvage Éditions, v. 19.2, 1999. p. 221-265.

________________. *Remarques sur la notion d'infrastructure didactique et sur le rôle des PER*. 2009a. Disponível em: < http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Infrastructure_didactiquePER.pdf>. Acesso em: maio 2009.

_______________. *La notion de PER : problèmes et avancées.* 2009b. Disponível em: < http://yves.chevallard.free.fr/ >. Acesso em: 24 jun. 2015.

_______________. *Introdução à teoria antropológica do didático[bilingue]*. 2011. Disponível em: < http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=210>. Acesso em: 24 jun. 2015.

COIMBRA, J. L. *Alguns Aspectos Problemáticos Relacionados ao Ensino–Aprendizagem da Álgebra Linear*. Dissertação de Mestrado. Belém: UFPA, 2008. 78 f.

DELGADO, A. D. S. *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas: los sistemas de numeración y la medida de magnitudes*. Tese apresentada para Universidad Complutense de Madrid - Facultad de Educación, Departamento de Diáctica y Organización Escolar, Madrid 2006.

DIAS, M. A. *Contribution à analyse d'un enseignement expérimental d'álgèbre linéaire en DEUG A première année*. Mémoire de DEA. Paris: Université de Paris 7, 1993.

DORIER, J. L. *On the teaching of Linear Algebra*. Grenoble, France: Kluwer Academic Publishers, 2000, p. 151-175.

_________. Teaching Linear Algebra at University. In: Tatsien Li (Ed.). *Proceedings of the International Congress of Mathematicians,* ICM. Beijing, China: Higher Education Press. v. 3, 2002. p. 875-884.

DORIER, J. L.; ROBERT, A; ROBINET, J.; ROGALSHI, M. *Teaching and learning linear álgebra In first year of french Science University*. Actas del I European Research in Mathematics Education, France: Paris. 1999, p. 103-112

GÁSCON, J. *Os modelos epistemológicos de referência como instrumentos de emancipação da didática e da história da matemática*. In: A teoria antropológica do didático: princípios e fundamentos / AMOULOUD, S. A; FARIAS, L. M. S; HENRIQUES, A (Org.). Curitiba: CRV, 2018. p. 51-76.

GÁSCON, J. *La necesidad de utilizar modelos en didáctica de las matemáticas*. Educ. Mat. Pesqui. São Paulo, v. 5, n. 2, 2003. p. 11-37.

HAREL, G. *Using geometric models and vector arithmetic to teach high-school students basic motions in linear algebra*. International Journal Mathematics Education, Science and Technology, v. 21, n. 3, 1990. p. 387-392.

KARRER, M. *Articulação entre Álgebra Linear e Geometria: um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica*. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2006.

_______. *Transformações Lineares: A problemática das tarefas que têm o Gráfico como registro de partida*. In: IX ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática. 2009. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Html/ComunicaçãoCientifica.html>. Acesso em: 30 mar. 2014.

LAUGWITZ, D. *Motivation and Linear Algebra*. Educational Studies in Mathematics 5. Dordrecht, Holland, 1974. p. 243-254.

LINDNER, W. *CAS-Supported Multiple Representations in Elementary Linear Algebra. The Case of the Gaussian Algorithm*. ZDM - The International Journal on mathematics education, v. 35, n. 2, 2003. p. 36-42.

PADREDI, Z. L. N. *As Alavancas Meta no discurso do professor de Álgebra Linear*. São Paulo. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). 2003. Programa de Educação Matemática, PUC-SP.

PARRAGUEZ, M. G. *Evolución Cognitiva del Concepto Espacio Vectorial*. (Tese de doutorado). Instituto Politécnico Nacional, Distrito Federal, México (2009).

PRADO, E. de A. *Alunos que completaram um curso de extensão em Álgebra Linear e suas concepções sobre base de um espaço vetorial*. Mestrado em Educação Matemática. PUC. São Paulo, 2010.

RAMOS, M. D. C. P. *Da Álgebra Geométrica Grega à Geometria Analítica de Descartes e de Fermat*. Dissertação (Mestrado). Faculdade de Ciências. Universidade do Porto. 2013.

SIERPINSKA, A.; TRGALOVA, J.; HILLEL, J.; DREYFUS, T. *Teaching and Learning Linear Algebra with Cabri*. Research Forum paper, in The Proceedings of PME 23, Haifa University, Israel, 1999, v. 1, p. 119-134.

SILVA, R. H. da. *Álgebra Linear como curso de serviço para a Computação*. Tese de Mestrado. UNESP. Rio Claro, 1999.

UHLIG, F. *A new unified, balanced, and conceptual approach to teaching Linear Algebra*, Department of Mathematics, Auburn University, Auburn, USA. Disponível em: <www.auburn.edu/~uhligfd/TLA/download/tlateach.pdf>. Acesso em: 10 nov. 2015.

WAWRO, M.; SWEENEY, G. F.; RABIN, J. M. *Subspace in linear algebra: investigating students concept images and interactions with the formal definition*. ZDM - The International Journal on Mathematics Education. v. 78, 2011. p. 1-19.

Recebido: 04/06/2019

Aprovado: 30/08/2019