ISSN 1983-3156

A2

http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019vol21i3p29-49

O ensino de álgebra e a filosofia de Wittgenstein: sobre regras e essência

The Teaching of Algebra and Wittgenstein's Philosophy: On Rules and Essence

VALDOMIRO PINHEIRO TEIXEIRA JUNIOR [1]

MARISA ROSÂNI ABREU DA SILVEIRA [2]

Resumo

Este texto tem o objetivo de analisar alguns aspectos relacionados ao envolvimento da linguagem com a álgebra, possibilitados pela aproximação da terapia de Wittgenstein e, que conduzem a novas reflexões sobre o ensino desta disciplina. Assim, partimos do conceito de regras para compreendermos noções de aplicação, generalização e abstração, trazendo estas em uma discussão mais ampla sobre essência. Mostramos que a álgebra dever ser analisada levando em consideração seus conceitos específicos, tratando de forma particular sua linguagem e especificando nos contextos algébricos conceitos de outras áreas da matemática, e, assim, podemos percebê-la como autônoma e arbitrária, com relações internas de sentido.

Palavras-chave: *Álgebra; Linguagem; Ensino; Terapia de Wittgenstein.*

Abstract

This text aims to analyze some aspects related to the involvement of language with algebra, made possible by the approximation of Wittgenstein's therapy and which lead to new reflections on the teaching of this discipline. Thus, we start from the concept of rules to understand notions of application, generalization and abstraction, bringing these into a broader discussion of essence. We show that algebra should be analyzed taking into account its specific concepts, treating in a particular way its language and specifying in the algebraic contexts concepts of other areas of mathematics, And so we can perceive it as autonomous and arbitrary, with internal relations of meaning.

Keywords: *Algebra; Language; Teaching; Wittgenstein's Therapy.*

[1] Doutor em Educação em Ciências e Matemáticas, Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará, Instituto de Ciências Humanas - valdomiro@unifesspa.edu.br

[2] Doutora em Educação, Universidade Federal do Pará, Instituto Educação Matemática e Científica - marisabreu@ufpa.br

Introdução

O que é álgebra? Em uma perspectiva wittgensteiniana, a resposta desta pergunta depende da experiência do usuário com esta palavra. Alguém que nunca viu essa palavra não terá noção alguma de qual seja a resposta, enquanto que um estudante dos anos finais do ensino fundamental talvez diria que álgebra é "fazer contas com letras"; outro estudante~~,~~ do ensino médio, talvez diria que álgebra é "resolver equação"; um professor de matemática acrescentaria a esta resposta outros conteúdos, como função, polinômios, corpos, anéis, etc. E assim a definição de álgebra poderia se ampliar, segundo as visões de matemáticos, filósofos, educadores, etc.

Santo Agostinho (1996, p. 261) mostra um enigma nas *Confissões*, em relação ao significado das palavras: "O que é, por conseguinte, o tempo? Se ninguém me perguntar, eu sei; se quiser explicar a quem me fizer a pergunta, já não sei". Com Moreno (2012) entendemos que Agostinho está dentro de uma concepção chamada *essencialista*, que está presente no pensamento filosófico tradicional. Para Agostinho, sabemos o que é tempo, apenas não sabemos explicá-lo, o que mostraria, para o filósofo medieval, que há uma *essência* por trás desta palavra, e assim seria necessário buscar descobrir tal essência, em uma concepção próxima do platonismo, que influenciou Agostinho, como ele mesmo afirma nas *Confissões*. Do mesmo modo podemos inferir em relação à palavra álgebra: sabemos o que é, mas não sabemos explicar.

Essa situação tem estado presente ao longo de toda a história do conhecimento, que tem buscado fundamentos últimos das palavras, que representam conceitos. Moreno (2012) explica que a ciência se deteve apenas em saber as causas de determinadas palavras, e para isso ofereceu diversos modelos, que são provisórios e falseáveis, enquanto que a filosofia buscou definir tais palavras, e assim se colocou dificuldades infindas. A filosofia não permite olhar para "o que está à nossa frente", isto é, não se olha para "as aplicações das respectivas palavras em situações específicas de uso da linguagem" (MORENO, 2012, p. 78), mas busca-se saber seus fundamentos últimos, a sua essência.

Wittgenstein (BT, §302)[3] se opõe ao essencialismo ao dizer que se lhe perguntassem o que é conhecimento, ele listaria itens que correspondem à palavra conhecimento, pois não

[3] Ao citar as obras de Wittgenstein, seguiremos um padrão utilizado entre os comentadores das obras do filósofo. Usamos as iniciais do título da obra para indicá-la, como nesse caso, BT, para *Big Typescript*, seguido do número do aforismo do qual a citação foi retirada. O aforismo será indicado pelo símbolo "§". Só não faremos assim quando citarmos trechos de partes não organizadas em aforismos. Algumas obras

há um elemento comum a ser encontrado em tudo que se pudesse chamar de conhecimento. Se nos perguntassem o que é cor, o que deveríamos responder? Há uma essência que define todas as cores? Ou diríamos: cor é preto, azul, amarelo, verde, vermelho, marrom e outras. Se nos perguntassem o que é álgebra, talvez o mais sensato seria dizer: álgebra é equação, inequação, função, cálculo com letras, etc.

A busca pela essência das palavras impede de se olhar apenas, e simplesmente, para os seus usos na nossa linguagem, isto é, usa-se palavras como conhecimento, cor e álgebra de vários modos, e isto é o que elas são. A filosofia essencialista tem se apoiado sobre uma concepção referencial da linguagem, que também pode ser exemplificada em Agostinho (1996, p. 46) nas *Confissões*, quando diz: "aprendi pouco a pouco a compreender quais coisas eram designadas pelas palavras que eu ouvia pronunciar repetidamente nos seus lugares determinados em frases diferentes". Para o filósofo, as palavras substituem os objetos e estes, então, são compreendidos.

Wittgenstein, ao longo de sua obra, identifica a filosofia tradicional, exemplificada em Agostinho, com estas duas concepções: essencialista e referencial. A concepção essencialista se refere ao conhecimento, que possuiria um fundamento semântico comum, e a concepção referencial da linguagem considera que esta teria apenas função representativa do conhecimento, que proviria de um lugar extralinguístico, podendo ser um mundo ideal, como o platônico, a mente ou empiria, a depender da filosofia que se considera.

Mas as críticas de Wittgenstein ao essencialismo não significam que o filósofo abdique da noção de essência, no entanto para ele esta essência está nas regras que usamos, que são de natureza convencional. Wittgenstein também não nega o uso referencial da linguagem, o problema é quando se considera este como o único papel que ela desempenha, isto é, descrever e comunicar algo fora da linguagem, quando ele entende que a linguagem normatiza a realidade.

As concepções essencialista e referencial têm fundamentado teorizações ao longo da história e na atualidade sobre o ensino, a aprendizagem, a matemática e a álgebra. Elas são o cerne da filosofia tradicional criticada por Wittgenstein e pelo movimento da *virada linguística*, que ocorreu no final do século XIX. Este movimento realizou uma espécie de revolução copernicana quanto ao conhecimento, pois passou a enfatizar a linguagem em suas análises filosóficas. Este movimento abrangeu o estruturalismo de Saussure, a

são divididas em partes, então, nestas, indicaremos tais partes, com números romanos, antes do aforismo. As siglas utilizadas encontram-se nas referências, logo após o título de cada livro.

hermenêutica filosófica de Heidegger e Gadamer e a filosofia da linguagem de Wittgenstein. Este novo movimento busca trazer a linguagem para o centro da discussão sobre como se dá o conhecimento. Deixa-se para trás a preocupação com o objeto, no realismo, e com o sujeito, no idealismo, e entende-se que a possibilidade de conhecimento se dá na linguagem, na comunicação e na interação social. Wittgenstein é considerado um dos expoentes dessa virada linguística.

Wittgenstein (IF) compreende que é necessário realizar uma terapia de posicionamentos filosóficos dogmáticos – realismo, idealismo, empirismo -, tanto que realizou de si mesmo, de seu próprio posicionamento no *Tractatus Lógico-philosophicus*, sua primeira obra, que defendia que havia uma lógica subjacente que sustentava/interligava a linguagem em/ao nosso mundo. As *Investigações Filosóficas (IF),* representam o segundo Wittgenstein, sua segunda filosofia, também chamada de Terapia filosófica.

Não pretendemos realizar aqui uma terapia aos moldes do segundo Wittgenstein, mas a que este filósofo realizou é a base de nossas análises, que caminha por dois objetivos: por um lado, colaborar com os pesquisadores que se prendem a certas opções teóricas, mostrando um aspecto de análise diferente; e por outro, refletir sobre o ensino, que tem, devido às direções teóricas dogmáticas, produzido teses, e consequentemente confusões que prejudicam tal prática.

O segundo Wittgenstein não queria fazer uma teoria, mas uma terapia das teorias. Em uma de suas incursões, adentrou o campo do aprendizado e realizou afirmações quanto às distinções entre um *saber como*, prático, e um saber a respeito de regras, um *saber que*, teórico, que guia as nossas ações. Essas distinções é que permitem a Wittgenstein esclarecer o conceito de *seguir regras* enquanto fundamento da ação significativa e do pensamento, ou seja, o aprendizado está relacionado ao ato de seguir regras. Sobre as relações entre ação e compreensão, que esclarecem o conceito de interpretação das regras, o filósofo mostrou que se trata de uma atividade de manipulação simbólica exercida em contextos sociais permeados pela linguagem, e não um ato mental solipsista. O filósofo considera o ato de *seguir regras* como fundamento na construção de significados e a interpretação de tais regras se dá em uma atividade de manipulação simbólica que se exerce na linguagem, em contextos sociais. Dessas reflexões compreendemos que Wittgenstein passou, em sua segunda filosofia, a entender que a construção e transmissão do conhecimento ocorrem na linguagem e a partir da linguagem, e não se justifica por fatores externos a ela, sejam eles empíricos ou mentais.

Este texto tem o objetivo de analisar alguns aspectos relacionados ao envolvimento da linguagem com a álgebra, possibilitados pela aproximação da terapia de Wittgenstein e, que conduzem a novas reflexões sobre o ensino desta disciplina. Assim, partimos do conceito de regras para compreendermos noções de aplicação, generalização e abstração, trazendo estas em uma discussão mais ampla sobre essência. Finalizamos com a possibilidade compreender a álgebra como autônoma e arbitrária, compreendendo-a como um jogo de linguagem.

Sobre as regras

Regras têm a função de modelos que seguimos para dar sentido às nossas experiências. O método de resolução de uma equação não é uma ferramenta que utilizamos para alcançar a solução da equação, mas é uma espécie de explicação da equação em si, ou seja, seu resultado já era conhecido e se criou uma forma de mostrar isso. Por exemplo, na equação $2.x + 3 = 11$, temos que a raiz da equação é 4. Mas, não será 4 por causa do método pelo qual foi resolvida, e sim porque se criou um método, devido ao resultado ser 4, e o método poderia ser o de balanceamento ou de passar para o outro lado com operação inversa. É nesse sentido que é uma regra, que a seguimos para explicar, não para revelar o resultado. Nesse sentido, podemos afirmar que a matemática é normativa e não uma ciência natural que busca descobrir soluções, tais como a raiz de uma equação.

Este é o mesmo sentido que Wittgenstein dá à prova. Marion (2011) mostra que Wittgenstein defendia que a prova era uma característica que a matemática poderia apresentar e assim a prova na matemática tem um caráter sinóptico, ou seja, é uma sinopse ou um resumo de todo um conteúdo ou processo. Desse modo, não se partiria da prova para demonstrar isto ou aquilo, mas tal demonstração já existe e a prova apenas resume o que de fato já é. De acordo com Marion (2011), Wittgenstein compreendia no *Tractatus* que o método que se usa em matemática para se obter equações é o da substituição, pois temos várias expressões que substituímos até perceber uma igualdade, como as expressões “$2 + 2$” e “4” que podem ser colocadas em uma equação, como “$2 + 2 = 4$”. Esta seria a maneira abreviada do que essa equação quer informar. Wittgenstein não concorda em usar as equações como asserções ou afirmações no sentido lógico como pretendia Frege e Russell. Wittgenstein compreende que a verdade da proposição $2 + 2 = 4$ está no fato de que já aceitamos tal proposição, ou seja, ela já não é passível de verificação, mas serve como uma norma e daí o motivo de, em algumas ocasiões, partirmos da regra estabelecida que $2 + 2 = 4$.

A linguagem ordinária a que estamos submetidos em nossas formas de vida nos faz pensar como se houvesse uma ligação causal entre regras e suas aplicações, pois observamos uma criança arrumando seus brinquedos, ou uma pessoa cumprimentando outra de acordo com regras que lhes foram ensinadas. Observamos regularidades de certas aplicações, que nos leva a pensar nessa relação causal. Então, temos a tendência em acreditar que a regra contém a totalidade das aplicações. Consideramos a existência, assim como, a necessidade da regularidade, como algo fundamental para que possam existir regras. No entanto é preciso refletir sobre a natureza dessa regularidade e o que dela se pode depreender. Sem regularidade, não há linguagem, como o próprio Wittgenstein deixa claro nas *Investigações*. Então, o problema não está exatamente em se crer na relação causal entre regra e aplicação, mas em acreditar que tal relação se deva a um caráter essencialista do conhecimento, mais particularmente, no sentido de colocar o pensamento como um potencial "conhecedor" das regras.

De acordo, com Sarrazy (2002), o Wittgenstein no *Tractatus* diria que uma placa sinalizadora não comporta nela mesma as condições de sua aplicação. O autor acrescenta que não é suficiente que um aluno conheça um algarismo para que ele saiba todas as suas formas de utilização. Portanto, as aplicações não estão nas regras, mas sim no uso que se faz delas. Assim, não significa que qualquer um decide o que fazer, pois a regra é decisão pública. Decidimos que o símbolo "+" representa a adição, então utilizamos tal regra. No entanto, não se pode dizer que um sujeito ao compreender isto poderá deduzir todas as aplicações possíveis dessa regra, por isso não se pode considerar que se o aluno sabe que $2 + 2 = 4$, ele consequentemente saberá que $a + a = 2a$. Só se pode seguir uma regra, se se deixa ser guiado por ela. "Sou obrigado a seguir a uma linha? - Não; mas se eu decidi usá-la como modelo e, então sou obrigado - Não; então eu me obrigo a usá-la assim"[4] (OFM, VII, §48 – Tradução nossa). Desse modo, é necessário que aluno conheça as regras, para que ele possa decidir quais decisões tomar, de acordo com o contexto.

Dessa forma, é preciso que o aluno aceite certas convenções, é preciso que ele aceite o novo formato de cálculo presente na álgebra, que é diferente da aritmética, e que seja inserido no uso contínuo das regras desse novo jogo de linguagem. As regras devem ser

[4] "¿Me obliga una línea a seguirla? – No; pero si me he decidido a usarla *así* como modelo, entonces me obliga – No; entonces me obligo *yo* a usarla así".

ensinadas com o devido pano de fundo, que seria dentro de formas de vida compreensíveis ao aluno. Não há uma potencialidade *a priori* no aluno que o leve a compreender, em um primeiro momento, o cálculo com letras da mesma forma que compreendeu com números; há apenas algumas semelhanças. Não há nenhum problema em se trabalhar no ensino essas semelhanças, mas é problemático quando se espera generalizações por parte dos alunos.

Wittgenstein (OF, §167) afirma que "uma proposição algébrica é uma equação tanto quanto $2.2 = 4$, embora seja aplicada de outra maneira". Se seguimos a regra que $2.2 = 2^2$, também se pode seguir a regra $x.x = x^2$. Existem semelhanças entre essas regras. No entanto, a regra $x + x = 2x$ é diferente do uso da regra $3 + 3 = 2.3$ na aritmética, pois alguns professores podem dizer que $3 + 3$ é igual a 6 e a forma de compreensão não é mesma para os dois casos. Matematicamente é a mesma coisa, mas não podemos garantir que a compreensão do aluno também seja.

Assim como há semelhanças entre a álgebra e outros conteúdos, dentro da própria álgebra há semelhanças entre seus conteúdos internos e não uma essência, como no caso do uso do sinal de + em $a + a$ que é diferente do uso em $(a + b)^2$, pois na primeira a resolução é realizada por uma soma direta e na segunda por uma reorganização. São jogos de linguagem diferentes com regras diferentes. Por meio do uso, o aluno pode diferenciar o que deve fazer em cada situação, mas isso necessita tempo e uso com as regras. Operações como $2 + 2 = 4$ ou $a + a = 2a$ ou mesmo uma cadeira mais uma cadeira igual a duas cadeiras são práticas institucionais, que se tornam regras de como proceder com o decorrer de sua utilização. São operações linguísticas que se tornam habituais, assim como as atividades citadas no aforismo 23 das *Investigações Filosóficas*.

Tais práticas institucionais geram regras que devem ser seguidas devido à uma habitualidade que não nos permite pensar mais de outra forma, o que gera os chamados "problemas" filosóficos, segundo as concepções essencialista e referencial, ou, preferimos dizer, gera *insinuações* de que a álgebra teria correspondência direta – como uma isonomia entre linguagens - com a aritmética, e em consequência, com a empiria e princípios lógicos, como é defendido por construtivistas, empiristas e logicistas (ou platonistas). Regras não podem ser confundidas com propriedades e estas "insinuações" permitem confusões, como é o caso da distributividade que é tomada como uma propriedade da multiplicação, mas que de fato é uma regra, pois a distributividade não é própria da multiplicação, pois envolve a adição.

É evidente que há relações entre a aritmética e práticas sociais, mas passar tal relação para a álgebra, que claramente tem um caráter diferente, é desprezar a especificidade desta linguagem. As regras da aritmética podem ser deduzidas, pois temos os algarismos indo-arábicos e as operações presentes em nosso cotidiano, mesmo que não concordemos que este fato seja colocado como a razão de seu ensino e de sua aprendizagem.

Consideramos que tal método é inviável para o ensino de álgebra, e defendemos um ensino com a clara apresentação das suas regras e o consequente uso em variados jogos de linguagem. Wittgenstein (IF, §319-320) defende que uma fórmula da álgebra pode ter um caráter sinóptico, mas devido ao uso contínuo, e não por deduções ou descobertas espontâneas.

> Posso num mesmo sentido, num relance, ver um pensamento diante de mim ou compreendê-lo, como posso anotá-lo em poucas palavras ou traços.
> O que torna esta anotação um resumo deste pensamento?
> O pensamento-relâmpago pode se comportar em relação ao falado como a fórmula algébrica em relação à série de números que dela se desenvolve.
> Se me é dada, por exemplo, uma função algébrica, estou certo de poder calcular seus valores, dados os argumentos 1, 2, 3, até 10. Diremos que esta certeza é "inteiramente fundamentada", pois aprendi a calcular estas funções etc. Em outros casos, não será fundamentada – mas sempre justificada pelo êxito.

Não podemos basear o ensino na espera por deduções referentes ao conteúdo algébrico, porque o cálculo com letras ou determinadas generalizações e abstrações não são comuns em nosso cotidiano, sendo a própria linguagem algébrica, muitas vezes, o único meio de apresentação de certos conteúdos. Por exemplo, como ensinar a trabalhar com gráficos e a sintaxe de função, sem utilizar a própria linguagem da função? Será que um aluno aprenderia que $f(x) = 3.x + 4$ representa uma situação do tipo "o pagamento de um taxi que cobra R$ 3,00 por km rodado adicionado de um valor fixo de R$ 4,00 cobrado pelo taxista em cada corrida"? Este é um exemplo clássico de contextualização de função polinomial do primeiro grau. O aluno até pode concordar com a formalização do problema, mas com muita dificuldade ele formalizaria sozinho, sem o auxílio do professor. No entanto, alguns professores e teóricos defendem que pelo raciocínio lógico alunos poderiam, a partir de "pistas" ou "dicas", mediadas pelo professor, chegar a concepções por conta própria.

Sobre a essência

Wittgenstein foi, por um tempo, um dos grandes defensores da lógica, como fundamento elementar do mundo e da linguagem. No *Tractatus*, o filósofo havia tomado a lógica como campo transcendental de análise dos fatos do mundo. Com base no aforismo §3.3421 do *Tractatus* - “Esta é a situação da filosofia em geral: o singular se manifesta repetidamente como desimportante, mas a possibilidade de cada singular nos dá um esclarecimento sobre a essência do mundo” -, Moreno (2005) revela que o filósofo austríaco entendia que o essencial é o que havia em comum a todas as ocorrências particulares de um mesmo tipo e, dessa forma, se apreendemos o elemento comum, tal como um símbolo, esse passa a ser compreendido como uma marca característica comum a uma classe de proposições. Moreno (2005) observa que, de acordo com o *Tractatus*, apreendemos a essência pela exploração exaustiva das possibilidades, retendo o que é comum. Mas como se faria tal exploração de possibilidades? Como se perceberia propriedades comuns? Para o Wittgenstein do *Tractatus*, isto se faria por meio da lógica matemática, pois ela permite analisar possibilidades e enxergar propriedades por meio de deduções. Dessa forma, a essência existiria e poderia ser delimitada na linguagem, pois a lógica percorreria todas as possibilidades, deixando apenas o que é necessário, aquilo que é de fato essencial.

A ideia do *Tractatus* é que o pensamento só poderia pensar o que é possível, e como não pensaríamos nada ilógico (outra concepção tractariana), o fato de haver pensamento geraria possibilidades dentro de uma lógica que fundamentaria a relação entre a linguagem e o mundo. Logo, se pensamos, deduz-se que tal é essencial, por ser possível, pois desse modo o pensamento estaria no campo da possibilidade que a lógica oferece, por ser pensável, o que permitiria compreender sentidos ainda desconhecidos, o que ratificaria a concepção essencialista. Nesse sentido, poder-se-ia compreender conceitos ainda não apresentados, devido à uma possibilidade lógica do pensamento ou ao fato de o pensamento ser lógico.

A partir disso que temos, por exemplo no ensino de álgebra, uma noção bastante difundida de que $a + a = 2a$ é uma generalização da aritmética, para quaisquer números ou objetos, que é possível devido à fatores externos à linguagem, como a intuição humana, por exemplo, e que são diversas, por que há várias relações possíveis com um mundo ideal, ou lógico, ou mental, ou empírico etc.

Wittgenstein abandona seu modo de pensar essencialista no *Tractatus*, e abandona o campo transcendental da lógica e se volta para sua aplicação, na qual situou um novo campo transcendental, a gramática dos usos cotidianos das palavras (MORENO, 2005, p. 235).

Em relação à gramática, Gottschalk (2004, p. 326-327) entende que as proposições matemáticas são normativas e assim “não há *algo* (*a priori*) que as fundamente fora da linguagem, ou que a elas corresponda”, portanto, não há sentido em se esperar que um aluno descubra entidades matemáticas por processos mentais ou empíricos. Porém, alerta a autora, não se deve esperar que o aluno invente uma matemática, aceitando, ao contrário da descoberta, que qualquer produção do aluno deveria ser permitida, mas sim que “Os critérios estabelecidos pela comunidade dos matemáticos é que vão guiar a atividade do aluno, o qual transitará em um campo gramatical pré-estabelecido que até possibilita *descobertas*, mas em um sentido diferente do das ciências empíricas”. São descobertas, dentro do jogo linguístico, como alguém que descobre uma jogada que leve ao xeque-mate no xadrez, mas que evidentemente já era prevista em suas regras. Ou como alguém que aprende a operação de adição e deduz a subtração. São possibilidades dentro da gramática existente.

A álgebra traz consigo esses aspectos ligados à lógica ou ao raciocínio lógico, geralmente a relacionamos a termos como *generalização* e *abstração*. O primeiro nos traz a ideia de tornar algo que é particular como algo geral, como vimos no *Tractatus*. Nesse sentido, a generalização seria a característica da álgebra de tornar compreensões que são particulares em gerais, que é o que vemos nas noções de generalização da aritmética, quando se entende que cálculos do tipo $a + b$, são representações de quaisquer somas entre dois números diferentes, ou mesmo quando vemos equações, funções ou fórmulas que funcionam como a formalização de várias situações. A abstração, em sua etimologia, diz que é a *ação de extrair para fora*, ou seja, abstrair seria como poder ver algo além do que se vê. Nesse caso, quando falamos que a álgebra é abstrata, estamos dizendo que ela, com seus símbolos e formas, representa coisas para além do que vemos escrito. Por exemplo, quando vemos $x^2 + x = 6$, podemos entender que é uma expressão que representa o quadrado de um número mais ele mesmo que é igual a seis; ou que é a informação de que um quadrado somado com um comprimento de mesmo dimensão do lado do quadrado igual a seis; ou a representação escrita de um comportamento em um gráfico cartesiano. Parece-nos que a álgebra reforçou a ideia da matemática como ciência universal, pois permite generalizar e abstrair conceitos, que sem ela seriam mais complicados para se operar, assim como para se compreender.

Noções como abstração, generalização ou mesmo universalização na matemática estão geralmente fundamentadas na ideia de existência de essências, e consequentemente, na concepção referencial da linguagem, que surgiu devido a uma busca de noções fundacionais do conhecimento. Ao se perceber, por exemplo, as relações da matemática com situações empíricas, parece haver uma espécie de explicação transcendental. Porém, entendemos sim a álgebra como abstração, generalização ou universalização, mas, a partir da sua linguagem.

Aspeitia (2002) realizou um estudo sobre a aplicação e a aparente universalidade da matemática. Trazemos esta questão para mostrar a saída que Wittgenstein deu para a questão da aplicabilidade da matemática, assim como, com o objetivo de também trazer dados sobre como a álgebra é vista neste contexto de aplicação e generalização ou universalização. Aspeitia (2002) defende que Wittgenstein buscou ver a matemática como gramática, em oposição à explicação empirista logicista, que compreendeu a matemática como uma ciência universal.

O autor mostra que com o intuito de refutar esta tese, Wittgenstein faz uma análise sobre pontos fundamentais do empirismo logicista: o cálculo e a lógica. Para Wittgenstein o cálculo é apenas um estudo de formas lógicas e de estruturas, ele não está previsto no sentido logiscista (*a priori* transcendental), mas linguístico, logo não pode produzir nada novo, porque ele já está definido, mesmo para objetos empíricos. O mesmo autor fundamenta sua análise no aforismo 15 da segunda parte da *Gramática filosófica* de Wittgenstein: “Neste ponto, podemos dizer: a aritmética é sua própria aplicação. O cálculo é sua própria aplicação” (GF, II, §15).

> Suponha que eu deseje usar este cálculo para solucionar o seguinte problema: se tenho 11 maçãs e quero dividi-las entre algumas pessoas, de tal maneira que cada uma receba 3 maçãs, quantas pessoas pode haver? O cálculo fornece-me a resposta 3. Agora suponha que eu tivesse de percorrer todo o processo de divisão e, no fim, 4 pessoas tivessem, cada uma, 3 maçãs nas mãos. Eu diria, então, que o cômputo deu um resultado errado? Naturalmente, não. E isso, naturalmente, significa que o cômputo não foi apenas um experimento (GF, II, §15).

Wittgenstein busca saber se o papel dos cálculos matemáticos na solução de problemas é o mesmo, tanto no interior da matemática como fora dela. Essa busca está relacionada com o seu interesse em distinguir cálculo e experimento. Aspeitia (2002) mostra que no exemplo das maçãs, o resultado do cálculo é também a solução do problema prático, mas observa que apesar de o cálculo ter a capacidade de fazer predições, ele não pode garantir a verdade. Por exemplo, um cálculo poderia predizer que 11 divido por 3 é 4, mas não garante que na prática isto ocorrerá. Assim, a matemática pode viver em ambos os espaços, no cálculo puro e no empírico, porém, não se pode esperar que a predição feita no espaço matemático, seja encarada como uma verdade empírica.

Wittgenstein deixa claro que a solução ao problema das maçãs é o número 3, mas não que possa haver 3 pessoas. Aspeitia (2002) indica que isto pode parecer estranho, mas é uma diferença fundamental para compreender a natureza gramatical da matemática. O cálculo está em seu próprio ambiente, nós é que o utilizamos para guiar nossas práticas. Assim, não se pode considerar um cálculo errado, pelo fato de na prática ter ocorrido algo diferente. Poderia se argumentar que na prática 2 + 2 sempre é 4, mas a questão levantada não é essa, mas sim, de que não é essa prática que nos permite pensar que 2 + 2 é 4, mas sim que já entendendo que 2 + 2 é 4, e, então, percebemos situações no mundo real que adequamos às regras da linguagem. A resposta é uma regra gramatical fornecida pelo cálculo, que só mostra o que tem sentido ou não predizer, mas que não justifica o fato (ASPEITIA, 2002).

Poderíamos, então, utilizando o mesmo raciocínio, entender que na álgebra, no caso $a + a$ sempre é $2a$. Isto de fato não ocorre porque na prática entendemos a letra a como qualquer número, e assim, “qualquer número” somado, ao próprio número seria 2 vezes “qualquer número”. Se já entendemos que $a + a$ é igual a $2a$, percebemos na realidade o que podemos adequar a esta regra. Esta percepção pode ser feita na aritmética, como no exemplo do “qualquer número”, ou na geometria (um quadrilátero de largura 2 e um outro comprimento qualquer denominado a) ou na realidade, em que a seria uma cadeira ou uma bola e assim, $2a$ seria o seu dobro.

Frascolla (2004), em sua análise sobre a prova em matemática de acordo com Wittgenstein, revela que se fosse colocado 37 + 18, por exemplo, com as regras definidas, mesmo sem nunca ter sido feita esta operação na empiria, resultaria em 55, porque seguiria as regras definidas pelas configurações dos signos. A passagem da experiência para a prova é feita desde que nos engajemos em uso rotineiro específico da construção dos signos 37 + 18 = 55, que é, então, depositada nos arquivos da linguagem. A experiência só é dita verdadeira se se assemelha às regras da linguagem.

No entanto, de acordo com Aspeitia (2002), para Wittgenstein, as operações matemáticas não são gerais ou abstratas. A adição matemática não é uma generalização abstrata de todas as adições possíveis. Não é porque se acrescenta o termo “maçãs” à adição aritmética que se transforma essa operação em uma proposição da matemática aplicada. Para compreender essa aparente generalidade das proposições matemáticas, Aspeitia (2002) considera que é necessário distinguir entre casos e aplicações: os casos derivam de generalizações e as aplicações de regras. Enquanto que entre generalização e caso há uma relação de consequência lógica (toda proposição geral implica em seus casos particulares), não há nenhuma relação lógica entre regra e aplicação. O autor fornece quatro proposições como exemplos de casos e aplicações:

(1) a + (b + c) = (a + b) + c

(2) (3 + 4) + 6 = 3 + (4 + 6)

(3) Todos os camelos são herbívoros.

(4) Meu camelo é herbívoro.

O autor destaca destes exemplos: (2) é uma aplicação de (1), enquanto que (4) é um caso de (3). A generalização realizada em (3) é possível devido aos casos particulares como (4), no entanto, a verdade de regras como (1) não depende de que (2) seja verdade, pois é verdade por si só, e se trata de situações semelhantes, mas não causais ou que possuam uma essência, mesmo que esta possa ser usada na prova de (1). É por isso que a indução matemática é diferente da indução realizada nas ciências naturais. Na matemática não há casos, por isso não há nenhuma generalização. A proposição (2) não é menos geral que (1), mesmo que pareça que (1) é sobre todos os números e (2) um caso particular.

Wittgenstein (OF) apresenta uma classificação que pode ser compreendida como uma tentativa do filósofo austríaco de combater a ideia de que a matemática tem diferentes níveis de generalidade e que as letras e fórmulas usadas na álgebra seriam uma representação disso. Wittgenstein apresenta 3 funções possíveis das letras em matemática. Indo diretamente à citação percebemos que estas funções são apresentadas por meio de questionamentos:

> Que questões podem ser levantadas no que diz respeito a uma forma, por exemplo, fx = gx? – É ou não verdade que fx = gx (**x como constante geral**)? As regras fornecem uma solução para essa equação ou não (**x como desconhecido**)? As regras proíbem a forma fx = gx ou não (**x entendedido como uma posição vazia**)? (OF, § 150, *grifos nossos*).

Aspeitia (2002) analisa que como constante geral a letra pertence à linguagem do sistema de cálculo e nos outros casos é um elemento externo, mas que de qualquer maneira, cada letra em um enunciado de cálculo é uma constante geral. O autor apresenta as três possíveis interpretações, dependendo do papel sintático de suas letras, isto é, de uma fórmula matemática. Da primeira interpretação temos: se todas suas letras são constantes no sistema de cálculo, a fórmula é um enunciado do cálculo. Seria o caso, por exemplo, que tivéssemos a + b = c, porém todos sendo constantes, isto é, com valores fixos. Tal fórmula com letras não tem sentido, pois teria seus valores todos conhecidos, poderia ser, por exemplo, “*3 + 4 = 7*”, sendo *a = 3*, *b = 4* e *c = 7*. Da segunda: se pelo menos uma letra é uma incógnita, então não temos um enunciado, mas um esquema. Nesse caso um valor de fato não é conhecido a princípio, por exemplo, a fórmula “3 + 4 = x” não é um enunciado da aritmética de números naturais por que inclui uma letra que não pertence ao vocabulário desse sistema de cálculo, pois a letra “x” não é um símbolo aritmético nem um numeral, expressa uma incógnita, mas esta pode ser substituída por símbolos da aritmética (numerais) e produzir equações do primeiro tipo, isto é, enunciados. Substituir o “x” pelo numeral “3” neste exemplo resulta na fórmula “3 + 4 = 3”. Substituí-la por “35” dá “3 + 4 = 35”, porém umas destas substituições – “x” por “7” – resulta em uma fórmula correta, – “3 + 4 = 7”. Isto significa que a equação original tem solução. Da terceira: se pelo menos uma das letras marca um conjunto espaço vazio, então a expressão está incompleta. Neste caso, a expressão é apenas permitida pela sintaxe do sistema de cálculo, mas que não tem sentido. Posso escrever a fórmula “x = $\sqrt{-4}$, para o conjunto dos reais”, por exemplo, mas se eu tomo “x” como um conjunto espaço vazio, escrevo a fórmula por uma possibilidade sintática, a fórmula não tem solução no conjunto dos reais. Expressões com letras não são mais gerais que expressões com outros tipos de constantes matemáticas, como os números, mas são expressões de uma linguagem com uma sintaxe construída, isto é, é apenas uma formalização mais desenvolvida, dentro da complexidade que é uma gramática.

Na nota de rodapé 3 referente à OF (§150), Wittgenstein escreve: “Ainda não enfatizei bastante *25 x 25 = 625* está precisamente no mesmo nível e é precisamente do mesmo tipo que $x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2$”. Wittgenstein não nega esta relação, pois ele compreende que é possível utilizar proposições análogas. No entanto, é necessário conhecer as regras para se calcular com letras e as regras para se calcular com números e compreender exatamente qual a relação que existe entre elas. Não negamos que casos possam vir a ser generalizações, porém, não se pode a partir de casos particulares, determinar generalizações, ou seja, não poderíamos partir apenas da aritmética (*25 x 25 = 625*) para chegar a compreensão geral algébrica, sem conhecer as regras deste novo sistema.

> As induções correspondem às fórmulas algébricas (cálculo com letras) - porque as relações internas entre as induções são iguais às relações internas entre as fórmulas. O sistema de cálculo com letras é um novo cálculo; mas não se relacionando com o cálculo numérico comum como um metacálculo com respeito a um cálculo. O *cálculo com letras não é uma teoria.* Eis o que é fundamental. A “teoria” do xadrez - quando investiga a impossibilidade de certas posições - é como a álgebra em relação ao cálculo numérico. (OF, Apêndice 2, p. 274)

Aspeitia (2002) acrescenta uma ilustração de Wittgenstein, para mostrar a distinção entre álgebra e aritmética, com a expressão “a + (b + c) = (a + b) + c”. Dado que as letras são parte do vocabulário algébrico, mas não do aritmético, esta fórmula pode expressar tanto uma expressão algébrica como uma lei da associatividade para a adição aritmética. Na álgebra as letras são constantes gerais. Na aritmética, só podem ocorrer como incógnitas ou marcas de espaços vazios. A lei da associatividade aditiva da aritmética “$a + (b + c) = (a + b) + c$” parece expressar uma propriedade geral de todos os números ou todas as adições. No entanto, não é assim, já que não é uma proposição geral, mas apenas um esquema.

Para Wittgenstein, na matemática, não é só impossível generalizar a partir de casos particulares, como também, de uma série de verdades matemáticas conhecidas é impossível generalizar para casos similares. Para o filósofo, não há conceitos gerais em matemática, ou uma essência, os conceitos não são generalizações, mas disjunções e mesmo se agrupássemos proposições matemáticas sob um conceito apenas, não seria uma proposição geral, mas uma mera conjunção das proposições originais. Nesse sentido o enunciado matemático não é mais nem menos geral que suas partes (ASPEITIA, 2002).

Arbitrariedade e autonomia da álgebra

De acordo com Aspeitia (2002), a concepção universalista da matemática se desenvolveu, partindo da aritmética com Frege, chegando a toda a matemática com Russell. Assim, a formalização matemática seria desenvolvida pelos processos de abstração e generalização, assim como nas ciências naturais, mas a matemática seria sua máxima expressão, pois seria a ciência formal por excelência, a ciência do abstrato, do geral e do universal, aquela que permitiria expressar todas as ciências de um modo exato. De certa forma, este é um desenvolvimento ocasionado pela álgebra, pois esta é considerada como a parte da matemática que lida, de modo mais amplo, com a abstração e a generalização, e quando esta se desenvolveu, principalmente na idade moderna, ela permitiu olhar a matemática ainda mais como uma ciência universal, que poderia ser considerada uma forma de explicação mais adequada, com isonomia. Nesse sentido, a álgebra seria a expressão máxima dessa abstração, generalização, e até de universalização da matemática.

Desse modo, entendemos quando Aspeitia (2002), diz que aplicar um cálculo significa usá-lo como regra gramatical, pois compreende que Wittgenstein, com a noção de regra gramatical, explica a aplicação da matemática e escapa da noção universalista do empirismo logicista. É como o uso de uma palavra que para ter sentido deve ser empregada no contexto correto. A resposta já existe, dentro do contexto considerado e por isso a matemática não depende de fatores externos, pois ela já tem sentido em seu próprio sistema, o que precisamos é saber usá-lo corretamente, aplicando aos contextos de forma correta.

Então, a partir da definição da matemática como cálculo, concluímos que a matemática não é uma ciência como a física é, e assim o uso das noções de cálculo, sistema, regra, etc. tem uma função explicativa que expressamos dizendo que a matemática é *a priori* e diferente do discurso empírico, por que nós obtemos apenas as proposições matemáticas como cálculo.

Para Schmitz (1988) isto implica em concordarmos que há uma objetividade no cálculo, sem a qual uma tal explicação perderia todo seu valor, que é que os dados de uma regra definem um sistema de cálculo já estabelecido com antecedência. Esta objetividade justifica o fato de que Wittgenstein utilize esta noção de uma maneira que parece atribuir uma produtividade ao cálculo independentemente daquele que calcula, ou seja, o cálculo arbitrário e autônomo.

O símbolo, a partir de uma arbitrariedade inicial, torna-se parte de um sistema autônomo. O símbolo se confunde com a regra, como o cavalo no xadrez se confunde com o movimento em “L”, como os sinais na matemática se confundem com suas regras, “A definição de um símbolo é apenas uma regra para o uso desse símbolo” (GOTTSCHALK, 2013, p. 8). Disto vem o apego ao essencialismo e referencialismo, pois as regras dos símbolos parecem tão inerentes aos mesmos, que parecem ter um “ar metafísico”.

Neste sentido, concordamos com Schmitz (1998), que defende que o cálculo é injustificável, argumentando que nenhum fato pode lhe conferir uma legitimidade ou eminência particular. Esta ideia é fundamental para entender a diferença entre discurso matemático e discurso empírico. Não somente se pode calcular independente e anteriormente a toda relação com o mundo empírico, mas se coloca em evidência a impossibilidade de trazer as regras que regem o cálculo das proposições descritivas comuns. Um sistema de regras não pode ser considerado como a transcrição normativa de uma descrição.

Para Schmitz (1988), a propriedade de uma regra é estar correta a partir do momento em que podemos aplicá-la, o que implica que não pode ter antes do enunciado da regra uma proposição descritiva que seria sua fiança, ou seja, não há nada escondido atrás das regras, não há nada oculto. O cálculo é arbitrário e o *a priori* é implantado no cálculo e não todo cálculo é *a priori*, de tal modo que se assim fosse seria, então, injustificável e não teria relação com qualquer realidade. Nesse sentido, destaca-se a independência das regras de fatores externos. A álgebra não se altera devido às dificuldades intrínsecas de aprendê-la, ou mesmo por ela não representar a realidade como um usuário deseja.

Para Schmitz (1988), o cálculo é admitido por Wittgenstein como uma realidade que existe com um certo grau de autonomia em relação ao calculador. Sendo assim, o que permite que acreditemos em uma determinada regra, se esta não depende do empírico? Wittgenstein (IF) não defende um simples acordo de opiniões, mas uma concordância de juízos, isto é, uma constância naquilo que ocorrem, e assim temos uma concordância nas formas de vida. Por isso, Wittgenstein (OFM, VI, §27) dá a entender que se utilizo um símbolo, acordado por uma comunidade a ser usado de tal forma, devo me engajar, pois, não é simplesmente um uso de sons e de fatos. Se digo "isto é verde", devo dizer que outras coisas também são verdes. Devo me engajar em um uso futuro. Quando utilizamos um símbolo nos comprometemos a utilizar de tal maneira no futuro: uma proposição não é uma proposição, a menos que pertença a um sistema gramatical (SCHMITZ, 1988, p. 171).

Os signos remetem às formas de vida e aos significados que atribuímos a eles nos usos. Wittgenstein (IF, §167) diz que "Naturalmente nem toda forma de signo impregnou-se em nós *profundamente*. Um signo da álgebra da lógica, por exemplo, pode ser substituído por qualquer outro, sem que sejam provocados em nós sentimentos profundos". Destacando a natureza arbitrária do uso que fazemos dos símbolos, Floyd (2011, p. 144) enfatiza que

> Não há, naturalmente, necessidade alguma no uso dos sinais de "1" a "9" neste jogo: poderíamos ter jogado com os sinais "*", "&", "^" ou palavras, cores ou letras. Provavelmente não refletimos sobre o fato contingente, mas significativo, de que a maioria de nós foi treinada para perceber rapidamente a distinção entre a ordem dos sinais numéricos com facilidade.

Nesse sentido, Wittgenstein diminui a força da representação, e prefere falar em apresentação.

> Não se vê claramente qual o papel que a *representabilidade* desempenha em nossa investigação. Em que medida ela assegura o sentido de uma frase.
> Representar-se algo com uma frase é tão pouco essencial para a compreensão desta como projetar um desenho segundo ela.
> Em lugar de "representabilidade" pode-se aqui dizer também: apresentabilidade (*Darstellbarkeit*) num meio determinado de apresentação. E partindo de tal apresentação, um caminho mais seguro *pode, contudo*, levar a um emprego mais amplo. Por outro lado, uma imagem pode se impor a nós e não servir para nada (IF, §395-397).

Dessa forma, a linguagem não representa, mas apresenta em um determinado meio, que pode ou não servir. Seu significado é aceito pelos usuários, e posteriormente é transmitido. Mas a partir do momento em que se torna gramatical, torna-se regra, daí que temos que "A certeza envolvida em nossas manipulações simbólicas implica que os componentes gramaticais que as condicionam possam manter-se autônomos em relação ao curso das práticas que os constituem necessários" (OLIVEIRA, 2011, p. 44).

Nossa tese é que a álgebra possui uma gramática, pois ela é um conjunto de regras sobre como se realizar o cálculo com outros símbolos, que muitas vezes apresentam semelhanças com as regras da aritmética, geometria e situações do cotidiano, mas que apresenta uma arbitrariedade e autonomia própria, além de hoje ter uma significação em si mesma, a partir do desenvolvimento das estruturas algébricas. A álgebra é um conceito vago, e mesmo na sua versão escolar apresenta um caráter de um conceito que se amplia com o tempo. Com os diversos usos vamos ampliando o conceito de álgebra, e agregando atividades ao seu conceito, como ocorre com uma gramática. Nesse sentido, qualquer definição de álgebra é *a posteriori*. Assim, ao compreendermos a álgebra como um jogo de linguagem, e que, por consequência, possui uma gramática, estamos tomando um critério de referência, como na terapia de Wittgenstein, isto é, para mostrar que a mesma possui natureza e fundamentos convencionais.

Considerações

Defendemos aqui que é a linguagem que fornece significados, de acordo com os usos que se faz em seus diferentes contextos, e no caso da matemática, tais contextos podem ser intra ou extra matemáticos. Este tipo de análise se posiciona em uma concepção que adota um caráter não-essencialista do conhecimento e não-referencial da linguagem.

A perspectiva filosófica do segundo Wittgenstein indica que esta é uma questão de fundamental importância para a análise do ensino de álgebra, pois contribui para que ela seja colocada em um âmbito próprio de análise, levando em consideração seus conceitos específicos (incógnita, variável etc.), tratando de forma particular sua linguagem e especificando nos contextos algébricos conceitos já usados em outras áreas, como adição, multiplicação, potência e igualdade na aritmética ou quadrado e cubo da geometria, além de outras áreas, tais como em contextos cotidianos e na própria lógica. Dessa forma, a álgebra passaria a ser compreendida como autônoma, arbitrária e que possibilita relações internas de sentido, o que possibilitaria a percepção de relações com outras áreas da matemática, em geral, devido algumas semelhanças e não por uma essência contida nela própria.

Há uma diferença de abordagem sobre o ensino de álgebra, a concepção dogmática e a da terapia sugerida por Wittgenstein para combater os equívocos que encontramos no uso de nossas palavras. Nesse sentido, Moreno (2005, p. 272) compreende que vivenciamos confusões conceituais, como dificuldades filosóficas profundas, por que as soluções apresentadas são interpretadas como causas definitivas, quando, de fato, elas são regras, normas ou critérios convencionais. De acordo com o autor, causas são hipóteses que podem ser confirmadas ou não e que não tem limites para sua criação, por serem externas, enquanto que regras tem limite de criação, uma vez que são internas. O dogmatismo da filosofia tradicional se baseia em causas, ou seja, propõe soluções externas para dificuldades conceituais e coloca tais soluções como definitivas, seriam no caso, causas ideais, mentais ou empíricas, que põe suas próprias exterioridades como garantia de objetividade de suas soluções apresentadas. Enquanto que esse dogmatismo filosófico contém fundamentos externos definitivos, mas infinitos, a terapia filosófica contém ligações internas não definitivas, mas finitas.

As teorias educacionais atuais, muitas delas apoiadas em aspectos presentes na filosofia tradicional realista ou idealista, têm causas externas como bases para explicações para problemas conceituais, por exemplo, desta concepção temos a noção de que $a + a = 2a$ é uma generalização da aritmética, possível devido aos fatores externos à linguagem, como a intuição humana e que são infinitas, por que há várias relações possíveis com um mundo ideal, ou lógico, ou mental, ou empírico etc. A terapia wittgensteiniana, ao contrário, tem normas internas à linguagem, não definitivas porque são arbitrárias, isto é, podem ser pensadas quaisquer relações no interior de uma gramática, mas são finitas, porque a partir da definição arbitrária das relações, por serem internas à gramática, elas se esgotam.

Defendemos neste texto que não há uma essência comum por trás dos diversos conteúdos da matemática, ou do conhecimento de modo geral, mas semelhanças, que podem ser apontadas arbitrariamente para favorecer determinado ensino de um conteúdo e por isso não nos lançamos em uma crítica aos métodos de ensino, mas à base filosófica que os fundamenta, que pode fazer com que os professores esperem que tais métodos alcancem resultados além do que lhes é possível alcançar. Em um sentido mais amplo, realizamos uma comparação nas descrições dos fatos com concepções dogmáticas, essencialistas e referenciais.

Desse modo, para se saber o que é álgebra, é necessário conhecer alguns de seus usos que são realizados com tal denominação. Expressões do tipo $5a + 3a$, equações do tipo x^2 -

$4x -5 = 0$, funções do tipo $y = 2x - 3$, são álgebra. Não se pode esperar que aprendizes que não conhecem tais usos possam descobrir por si ou deduzir que isto seja álgebra.

As dificuldades encontradas na matemática, em geral, se devem ao uso que fizemos de sua linguagem, e particularmente a álgebra potencializa esta dificuldade com seu caráter linguístico peculiar. Os conteúdos algébricos devem ser analisados em sua linguagem, em seus conteúdos mais específicos, evitando uma visão essencialista da álgebra, como se esta tivesse conceitos presentes em toda a matemática e mesmo fora dela, que é o que leva a tomar sua linguagem apenas na sua função referencial. Deve-se considerar como uma linguagem própria com sintaxe, semântica e pragmática que demandam um estudo sobre suas regras, vendo suas similitudes com outros jogos de linguagem como possibilidades de comparação, e não como sua compreensão em si.

A álgebra, na perspectiva destas concepções essencialista e referencial, é tomada, então, como uma área da matemática que contém conceitos mais próximos da intuição, da lógica, de aspectos abstratos da realidade. No entanto, quando vemos por um prisma linguístico, somos levados a pensar que diante das dificuldades, os conteúdos devem ser apresentados e as regras expostas e exercitadas, para que com o tempo e a prática, juntamente com o desenvolvimento de técnicas, sejam incorporadas e utilizadas em problemas de diversas formas, considerando que compreender significativamente alguns conteúdos matemáticos realmente demanda tempo e treino de uso de suas regras.

Retomamos à primeira pergunta: o que é álgebra? Passado o tempo e tendo aplicado tal palavras em diversos usos, conseguimos talvez apontar para determinadas atividades, e dizer o que é álgebra. Conseguimos olhar para situações diversas e ver expressões, equações e relações funcionais. Mas mesmo assim talvez não tenhamos uma resposta conclusiva, e precisamos indicar, listar, apontar, para poder explicar o que ela é.

O que é álgebra? Álgebra não é o nome “álgebra”, álgebra é equação, inequação, função, ... álgebra é $5a + 3a$, $x^2 - 4x -5 = 0$, $y = 2x - 3$...

Referências

AGOSTINHO, Santo. *Confissões*. Coleção Os Pensadores, São Paulo: Nova Cultural, 1996.

ASPEITIA, Axel Arturo Barceló. Universalidad y aplicabilidad de las matemáticas en Wittgenstein y el empirismo logicista. In: *Theoría: Revista del Colegio de Filosofía*, v.13, p. 119-136, 2002.

FLOYD, Juliet. Das Überraschende: Wittgenstein sobre o surpreendente em Matemática. In: *Bolema*, v.24, n.38, p. 127-169, abril, 2011.

FRASCOLLA, P. Wittgenstein sur la preuve mathématique. In: FLOYD, J. et al. *Wittgenstein et les mathématiques*. Paris: T. E. R., p. 43-60, 2004.

GOTTSCHALK, Cristiane. *Reflexões sobre contexto e significado na educação matemática*. In: VII Encontro Paulista de Educação Matemática, São Carlos: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2004.

________. O paradoxo do ensino da perspectiva de uma epistemologia do uso. *Educação e Filosofia* (UFU. Impresso), v.27, p. 659-674, 2013.

MARION, Mathieu. Wittgenstein et la preuve mathématique comme vérifacteur. *Philosophiques*, v.38, n.1, p. 137-156, 2011.

MORENO, Arley Ramos. *Introdução a uma pragmática filosófica*: de uma concepção de filosofia como atividade terapêutica a uma filosofia da linguagem. Campinas, São Paulo. Editora da UNICAMP, 2005.

________. Introdução a uma epistemologia do uso. *Caderno crh*, v.25, n. spe 02, p. 73-95, 2012.

OLIVEIRA, Wagner Teles. Wittgenstein e o pragmatismo. *Ideação*, n.24 p. 33-48, jan./jun. 2011.

SARRAZY, Bernard. Pratiques d'éducation familiale et sensibilité au contrat didactique dans l'enseignement des mathématiques chez des élèves de 9-10 ans. *Revue Internationale de l'Éducation Familiale,* V.6, n.1, p. 103-130, 2002.

SCHMITZ, François. *Wittgenstein, la philosophie et les mathématiques*. Paris: PUF, 1988.

WITTGENSTEIN, Ludwig. *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática (OFM).* Edición de G. Henrik von Wright, R. Rhees y G. E. M. Anscombe. Versión espanola de Isidoro Reguera. Alianza Editorial, Madrid, 1987.

________. *Tractatus logico-philosophicus (TLP).* Tradução de Luiz Henrique Lopes dos Santos. São Paulo: Edusp, 1993.

________. *Investigações filosóficas (IF).* Tradução de José Carlos Bruni. São Paulo: Nova cultural, 1999 (coleção os pensadores).

________. *Gramática Filosófica (GF).* São Paulo: Edições Loyola, 2003.

________. *Observações Filosóficas (OF).* Tradução de Adail sobral e Maria Stela Gonçalves São Paulo: Loyola, 2005.

________. *The Big Typescript (BT)*. Madrid: Editorial Trotta, 2014.

Texto recebido: 17/06/2019
Texto aprovado: 09/12/2019