EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i2p081-113

Práticas de professores do ensino básico durante a resolução de problemas de contagem

Elementary and high school teachers' practices during the resolution of counting problems

Prácticas de maestros y profesores de la enseñanza primaria y secundario durante la resolución de problemas de conteo

Paulo Jorge Magalhães Teixeira[1]
UFF – Universidade Federal Fluminense
https://orcid.org/0000-0001-8256-6486

Resumo

Este trabalho é recorte de uma pesquisa que tem como objetivo responder, por meio da apresentação e a análise de dados, à seguinte pergunta de pesquisa: Que experiências um professor de Matemática deve vivenciar em uma formação continuada para selecionar e dirigir situações de aprendizagem com vista a desenvolver o raciocínio combinatório de seus alunos por meio da proposição de problemas de contagem, de modo a compreender suas dificuldades e ajudá-los a superá-las? A metodologia *Design Experiment in Educational Research*, de COBB et al. (2003), foi escolhida para nortear o desenvolvimento das atividades por conta de permitir flexibilidades para adaptar o desenho inicial proposto, em um movimento cíclico de idas e vindas. A pesquisa envolveu a formação continuada de 20 (vinte) professores, sujeitos da pesquisa, que à época ensinavam matemática em turmas do ensino fundamental e/ou ensino médio de uma rede estadual de ensino em uma grande cidade, capital de um estado brasileiro. A pesquisa identificou que o grupo não tinha vivenciado situações onde é preciso repartir a resolução de um problema de contagem, quando necessário, aplicando os princípios fundamentais de contagem em conjunto. Houve menção ao componente formal para justificar o uso de uma fórmula, e crenças e concepções sobre o não uso de uma representação gráfica

[1] paulojorge@id.uff.br

para subsidiar a resolução de um problema, independentemente de o problema ser simples ou mais complexo, foram identificadas.

Palavras-chave: Educação Matemática, Problemas de Contagem, Formação de Professores de Matemática, Conhecimento Matemático para o Ensino, Currículos de Matemática.

Abstract

This work is part of a research that aims to answer, through the presentation and analysis of data, the following research question: What experiences should a Mathematics teacher experience in continuing education to select and direct learning situations seeking to develop their students' combinatorial reasoning by proposing counting problems, to understand their difficulties and help them overcome them? The Design Experiment in Educational Research methodology, by COBB et al. (2003), guided the development of activities on account of allowing flexibility to adapt the proposed initial design, in a cyclical movement back and forth. The research involved the continuing training of 20 (twenty) teachers, subjects of the research, who at the time taught mathematics in classes of elementary and/or high school in a state school in a large city, capital of a Brazilian state. The research identified that the group had not experienced situations where they must share the resolution of a counting problem, when necessary, applying the fundamental principles of counting together. The formal component to justify the use of a formula was mentioned, and beliefs and conceptions about not using a graphic representation to support the resolution of a problem, regardless of whether the problem is simple or more complex, were identified.

Keywords: Mathematics education, Counting problems, Teacher training in mathematics, Mathematical knowledge for teaching, Mathematics curricula.

Resumen

Este trabajo es parte de una investigación que tiene como objetivo dar respuesta, a través de la presentación y análisis de datos, a la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué experiencias debe vivir un docente de Matemáticas en educación continua para seleccionar y dirigir situaciones de aprendizaje buscando desarrollar el razonamiento combinatorio de sus estudiantes mediante la proposición de problemas de conteo, para comprender sus dificultades y ayudarlos a superarlas? La metodología del Experimento de Diseño en Investigación Educativa, de COBB et al. (2003), orientó el desarrollo de actividades teniendo en cuenta la flexibilidad para adaptar el diseño inicial propuesto, en un movimiento cíclico de ida y vuelta. La investigación involucró la formación continua de 20 (veinte) maestros y profesores, sujetos de la investigación, que en ese momento enseñaban matemáticas en clases de la escuela primaria y/o secundaria en una escuela pública de una gran ciudad, capital de un estado brasileño. La investigación identificó que el grupo no había experimentado situaciones en las que hayan tenido que compartir la resolución de un problema de conteo, cuando necesario, aplicando los principios fundamentales de contar juntos. Se mencionó el componente formal para justificar el uso de una fórmula, y se identificaron creencias y concepciones sobre no utilizar una representación gráfica para apoyar la resolución de un problema, independientemente de si el problema es simple o más complejo.

Palabras clave: Educación matemática, Problemas de conteo, Formación de Profesores de matemática, Conocimiento matemático para la enseñanza, Currículos de matemática.

Práticas de professores do Ensino Fundamental durante a resolução de Problemas de Contagem

De modo geral, quando um estudante ou o público em geral está resolvendo um problema de matemática ou não e se depara com uma soma de parcelas iguais, um conhecimento tácito que foi aprendido desde os anos iniciais escolares dá conta de que é possível substituir esse somatório por um produto que enfatize o número de repetições e o valor da parcela que se repete, talvez por conta do hábito de “ter de simplificar”, e assim é feito. Embora essa maneira de conceituar a multiplicação seja relevante como ponto de partida para a compreensão do conceito de multiplicação de números naturais, ela não deve ser a única com a qual o professor deve se basear para dar sentido à multiplicação. Segundo os autores dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), em Brasil (1997, p. 109), “[...] essa abordagem não é suficiente para que os alunos compreendam e resolvam outras situações relacionadas à multiplicação, mas apenas aquelas que são essencialmente situações aditivas”, principalmente nos casos em que a comutatividade se apresenta com ambiguidade. Esses mesmos autores salientam, em Brasil (1997, p. 111), que “[...] para a compreensão efetiva da multiplicação é preciso explorar todos os 4(quatro) significados do conceito de multiplicação: multiplicação comparativa; proporcionalidade; configuração retangular e a ideia combinatória”, exemplificadas, respectivamente, assim: Ana tem 5 bolas e Bia tem o triplo dessa quantidade. Quantas bolas tem Bia?; Ana comprou 5 doces, de preço unitário igual a R$4,00. Quanto Ana gastou?; Qual a área de um retângulo de dimensões 4cm e 7cm?; De quantos modos Ana pode se vestir usando uma saia, uma blusa e um par de calçado, por vez, se ela tem 3 saias, 6 blusas e 2 pares de calçado?). Em todos os quatro significados da multiplicação, citados acima, há o propósito de contemplar os resultados via um registro multiplicativo. O autor deste recorte alia-se aos autores de Brasil (1997) no tocante a ressaltar a importância de os significados da multiplicação serem explorados, cada um a seu tempo e não necessariamente nessa ordem, pelos professores com os seus alunos. Por outro lado, abordagens desse conteúdo em livros didáticos têm mostrado que os quatro significados da multiplicação, conforme acima, não têm sido explorados com a mesma intensidade, e possivelmente em razão disso, também as abordagens que os professores habitualmente têm feito com os seus alunos em sala de aula. Ademais, conjectura-se que tal pode não ocorrer apenas com os alunos dos anos iniciais do ensino fundamental mas se estender pelos subsequentes anos deste segmento de ensino. Particularmente, referimo-nos à tímida prática que é ofertada ao grupo de problemas associados à ideia combinatória por professores, em alguns poucos momentos, em alguns anos, ao longo dos nove anos de escolaridade do ensino fundamental, constatação revelada no grupo de 20 (vinte) sujeitos da pesquisa objeto deste recorte, e presentes em Teixeira (2012). Identificamos que tal conteúdo ainda não está presente em parcela considerável de currículos do ensino fundamental ao longo dos anos finais desse segmento de ensino e nos livros didáticos, tal como sugerido nos PCN, em Brasil (1997, 1998) e consoante à BNCC – Base Nacional Comum Curricular, aprovada ao final de 2018. Pesquisas salientam que a exploração de atividades didáticas que envolvam o manuseio de materiais manipuláveis e a proposição de jogos no ensino da Matemática, oportunizam os alunos a desenvolverem habilidades cognitivas, enquanto sujeitos protagonistas das suas próprias aprendizagens, com interesse, desenvoltura e efetiva apropriação dos conhecimentos. Por conta disso, no que refere ao exercício do raciocínio combinatório este autor entende que o estímulo aos alunos se dê de modo gradual, desde os anos iniciais do ensino fundamental, uma vez que ele promove o pensar de forma criativa e crítica, em um ambiente lúdico de aprendizagem, por meio da proposição e resolução de diversificados problemas de contagem - contando com a construção e a exploração de representações gráficas e numéricas para comunicar os resultados obtidos. Ademais, o exercício do raciocínio combinatório também promove o desenvolvimento de habilidades e competências cognitivas do aluno, as quais passam a fazer parte de sua estrutura mental, permitindo que ele avance no entendimento do campo conceitual próprio à temática problemas de contagem. Também, mais adiante, que se aproprie de conceitos subjacentes às temáticas análise combinatória e probabilidade para, inclusive, e se for o caso, generalizá-los para outros contextos consoante a proposição de efetivas situações de aprendizagem.

As questões da pesquisa e os objetivos esperados alcançar

Este trabalho apresenta um recorte com alguns resultados obtidos quando do desenvolvimento e conclusões de uma pesquisa ampla intitulada: "Estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor de Matemática para a exploração de problemas de contagem no Ensino Fundamental", presente em Teixeira (2012). A pesquisa também é apresentada, com todas as análises, considerações e resultados, em Teixeira (2013, 2014, 2015, 2018). Para atingir os objetivos da pesquisa, o pesquisador começou por perguntar a questão principal objeto da investigação, a saber: "Que experiências um professor de Matemática do Ensino Fundamental deve vivenciar em sua formação continuada para selecionar e dirigir situações de aprendizagem com vistas a desenvolver o raciocínio combinatório de seus alunos por meio da proposição de problemas de contagem de modo a compreender as dificuldades que os alunos enfrentam na resolução de problemas de contagem e para ajudá-los a superar essas dificuldades e atender às orientações do Currículo do Estado de São Paulo (2010)?". Prosseguindo, no tocante aos objetivos da pesquisa, o autor propôs-se responder às seguintes questões específicas: "Quais são as inovações propostas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) e pelo atual Currículo do Estado de São Paulo (2010) para os processos de ensino e de aprendizagem de conceitos relativos a Problemas de Contagem?"; "Quais são os conhecimentos dos professores a respeito da resolução de Problemas de Contagem e suas concepções sobre o desenvolvimento desse tema no Ensino Fundamental?", e "Uma sequência de atividades que explore a resolução de Problemas de Contagem, sem a utilização de fórmulas, pode favorecer a (re) significação de conhecimentos dos professores, sob os pontos de vista do conteúdo, didático e curricular, de noções relativas a esse tema?".

A pesquisa objetivou identificar, conhecer e relatar práticas pedagógicas dos professores acerca das experiências vivenciadas durante a resolução de um diversificado leque de problemas contagem, propostos para serem resolvidos, também, por alunos dos anos finais do ensino fundamental em turmas regulares de ensino. Também teve o propósito de apresentar resultados das experiências vivenciadas pelo grupo de 20 sujeitos da pesquisa em reflexões e discussões acerca da prática docente relacionada à exploração de conceitos, estratégias de resolução e procedimentos, presentes na proposição e resolução de um leque de problemas de contagem, considerando que cada um dos sujeitos aceitou colocar-se na posição de um aluno do ensino fundamental que estaria diante de proposta similar sem, contudo, ter conhecimentos prévios acerca da temática e assim, refletir acerca da prática pedagógica que considerariam necessária/adequada para desenvolver a temática, e como ajudar os alunos à superarem possíveis dificuldades. Como consequência da proposta de formação, viabilizar condições de modo a poder identificar, avaliar e verificar se seria possível (re) significar práticas pedagógicas para o ensino e a aprendizagem de conceitos, procedimentos e estratégias de resolução de problemas de contagem concernentes à ampliação do campo conceitual do conteúdo. Além do mais, antes de iniciar o desenvolvimento das atividades propostas em fichas de atividades, uma ficha em cada encontro, houve preocupação do pesquisador em intensificar o pedido para que os sujeitos da pesquisa não fizessem uso de qualquer fórmula, tanto durante os momentos de ensino e apropriação dos conceitos, quanto da resolução dos problemas propostos, lembrando-os de que deveriam portar-se tal qual alunos dos anos finais do ensino fundamental, proposta que deveriam abraçar, também, quando estivessem atuando em turmas regulares, com os seus alunos. Ademais, houve a preocupação de salientar a importância de os sujeitos de pesquisa estarem atentos às práticas de construírem e explorarem uma representação gráfica que fosse capaz de dar conta de obter tanto as soluções quantitativas quanto as qualitativas para os problemas de contagem com pequeno número de objetos a “combinar”.

Dentre as hipóteses da pesquisa, uma partiu do pressuposto que a exploração de representações gráficas: esquema, tabela de dupla entrada, enumeração de elementos e árvores de possibilidades, e de representações numéricas (tomando por base o exercício do raciocínio combinatório e a aplicação dos princípios fundamentais da contagem), sem o uso de fórmulas, fosse suficiente para que os alunos cumulassem de conhecimentos próprios à temática de modo que pudessem vir a resolver uma razoável quantidade e variedade de problemas de contagem - grande parte, explorada ao longo da sequência de ensino, objeto da pesquisa. Previu-se, mais adiante, depois de uma razoável quantidade de problemas de contagem terem sido resolvidos, por meio da construção e exploração de uma representação gráfica - com ênfase na árvore de possibilidades -, estabelecer a relação entre as ações e tomadas de decisão presentes durante a construção de tal representação gráfica e uma correspondente representação numérica que desse conta de determinar a contagem de todas as possibilidades que atendessem ao enunciado. Mais adiante, em momento pessoal de cada aluno do ensino fundamental, se espera que cada um reúna condições para tomar a decisão acerca de qual tipo de representação (gráfica ou numérica) vai fazer uso, de modo a escolher a estratégia e encaminhar a resolução para resolver este ou aquele problema que lhe foi proposto. Fato é que as árvores de possibilidades dão conta de resolver quantidade razoável e variada de problemas de contagem. O exercício do raciocínio combinatório é intensamente requerido em cada uma das tomadas de decisão que se fazem necessárias tomar durante a construção de uma árvore de possibilidades, por exemplo, razão porque atenção especial e criteriosa deve ser emprestada à sua construção, exercício e desenvolvimento. Portanto, a construção de uma árvore de possibilidades, por exemplo, envolve, necessariamente, o exercício constante do raciocínio combinatório, decisão a decisão que precisa ser tomada. Por sua vez, o exercício constante do raciocínio combinatório favorece a compreensão e a apropriação do conceito associado ao princípio multiplicativo[2] (princípio fundamental da contagem ou princípio da multiplicação) mais adiante, no que concerne a decidir se o princípio será ou não aplicável àquele problema de contagem em questão. Este princípio também é imprescindível para o desenvolvimento do pensamento abstrato, útil na resolução de problemas em que o sujeito que o está resolvendo não tem condições de combinar, arrumar, agrupar ou compor os objetos envolvidos, diretamente, por conta de eles não estarem acessíveis (disponíveis) para o manuseio, ou se apresentarem em grandes quantidades, inviabilizando o manuseio. Bem como no tocante às questões relacionadas com a generalização de uma ação ou pensamento. Uma vez que a árvore de possibilidades esteja construída por completo, o total de possibilidades que atendem ao problema de contagem objeto da respectiva árvore pode ser obtido por meio da contagem direta das "folhas terminais da árvore" uma a uma, ou pela aplicação do princípio aditivo[3] (princípio da adição). Isto, porque as decisões que foram tomadas ao longo da sua construção originaram agrupamentos de possibilidades distintos entre si. Isto é, agrupamentos que dão origem a conjuntos unitários disjuntos - possibilitando a contagem da união de todos esses conjuntos. Finalmente, o professor precisa preocupar-se em se preparar para permitir que os seus alunos se apropriem de conhecimentos (próprios à temática) suficientes para que eles possam enunciar, compreender e aplicar os princípios aditivo e multiplicativo (em conjunto e não) quando da resolução de problemas de contagem, ou quando fizerem uso, apenas, de uma representação numérica para obter a solução quantitativa de possibilidades que atendem ao problema em questão.

2 Princípio Multiplicativo: "Se uma primeira decisão d_1 pode ser tomada de **m** modos, e cada uma dessas m possibilidades iniciais "der origem", igualmente, em uma segunda decisão d_2, haver **n** novas possibilidades para tomar tal decisão, então a decisão d_1 seguida da decisão d_2 pode ser tomada de **m** x **n** modos distintos. O Princípio Multiplicativo pode ser generalizado para mais que 2(duas) decisões, independentemente da quantidade de possibilidades de ocorrência de cada uma delas, com o cuidado de que, para cada decisão, ocorrerem possibilidades em igual número.

3 Princípio Aditivo: "Se 2(dois) conjuntos A e B (ou mais que 2(dois) conjuntos) são disjuntos, isto é, tais que a interseção $A \cap B$ entre eles é vazia (ou a interseção entre eles, dois a dois, é sempre vazia), tal que o conjunto A possui **m** elementos e o conjunto B possui **n** elementos, então o conjunto união $A \cup B$ é um conjunto com **m** + **n** elementos.

Referencial teórico

O foco da pesquisa foi o conhecimento profissional docente, com apoio nas ideias de Shulman (1986), com viés no conhecimento pedagógico do conteúdo. O autor chama a atenção para o conhecimento de conteúdo ao identificá-lo como paradigma perdido, salientando que o domínio de um conteúdo é imprescindível para o ensino de qualquer disciplina. Ademais, o autor também busca discutir os conhecimentos dos professores que servem de base para a formação e a atuação docente: de conteúdo, pedagógicos de conteúdo e conhecimentos curriculares, com a questão principal da pesquisa diretamente associada aos conhecimentos pedagógicos de conteúdo.

Para a análise das respostas aos problemas propostos nas fichas de atividades, objeto da pesquisa de campo, as quais constituíram a sequência didática desenvolvida ao longo dos 8(oito) encontros, reportamo-nos à Tall & Vinner (1981). Tais autores definem imagem conceitual como a estrutura cognitiva total construída na mente de uma pessoa a respeito de determinado conceito matemático, abrangendo todas as ideias, imagens mentais, impressões, representações visuais e descrições verbais relativas a propriedades e processos que envolvem aquele conceito. Segundo os autores,

> (...) como resultado e por meio de experiência de todos os tipos que uma pessoa se vê envolvida ao longo do tempo a imagem de um conceito vai se constituindo e se transformando continuamente quando ela passa pelo enfrentamento de novos estímulos. (Tall & Vinner, 1981, p. 2)

Também reportamo-nos à perspectiva de Fischbein (1994), segundo aspectos presentes na atividade matemática, a saber: aspecto intuitivo - associado à compreensão que uma pessoa considera como auto evidente, que intuitivamente ela seja capaz de compreender e quer que os outros também a aceitem sem que disponha de argumentos convincentes para provar sua validade -; aspecto algorítmico - associado à aplicação e o funcionamento de técnicas, habilidades e procedimentos padronizados de resolução, cuja apropriação não dispensa uma formação meticulosa requerida para o seu desenvolvimento – e aspecto formal - diz respeito aos conhecimentos que estão relacionados com definições, axiomas, teoremas e provas de resultados que devem ser aprendidos, organizados e aplicados pelos alunos com o propósito de justificar e provar que as técnicas funcionam. Segundo Fischbein (1994), o componente intuitivo (ou, simplesmente, compreensão intuitiva, cognição intuitiva, solução intuitiva) diz respeito a uma compreensão que uma pessoa considera auto evidente. Essa compreensão é de tal maneira aceita pela pessoa que ela é capaz de aceitar uma ideia ou um conhecimento sem sequer questionar de que é preciso que haja necessidade de encontrar um tipo de justificativa que venha a legitimá-la. Ademais, ainda segundo o autor,

> (...) é indispensável que se ofereça aos alunos um processo educativo que valorize a apropriação do componente formal, considerando que compreender o que seja rigor e coerência em Matemática não é uma tarefa que o aluno adquira de maneira espontânea sem prescindir do professor. (Fischbein, 1994, p. 232)

Fischbein (1994), apud Teixeira (2012), quando refere aos aspectos formal e algorítmico, pontua que conhecer e explorar a íntima relação que há entre os 2(dois) aspectos constituem-se em condições básicas para o desenvolvimento de um raciocínio matemático eficiente, não prescindindo, porém, do aspecto intuitivo. Ademais, Fischbein (1994) também argumenta que o conhecimento acerca dos componentes formais não garante o necessário para o enfrentamento de quaisquer problemas. Segundo Fischbein (1994, p.232), "o domínio de técnicas e procedimentos isento do conhecimento de argumentos que justificam a utilização dessas técnicas pode não ser suficiente para a resolução de problemas que fogem ao padrão". Resultados de Fischbein (1975), apud Navarro-Pelayo, Batanero e Godino (1996, p. 2), mostram que a "capacidade de resolver situações-problemas que envolvam o raciocínio combinatório (problemas combinatórios)" nem sempre se alcança no nível das operações formais se um ensino específico do assunto não for oferecido. Segundo esses autores, quando alunos e professores se debruçam para resolver um problema de contagem em que é preciso que utilizem mais que uma operação combinatória, de imediato eles lançam mão de procedimentos que não foram por eles facilmente compreendidos e o fazem inadequadamente na busca de obter a solução do problema.

Sujeitos da pesquisa e o tipo de pesquisa

A pesquisa envolveu a formação continuada de 20 (vinte) professores, sujeitos da pesquisa, que à época ensinavam matemática em turmas do ensino fundamental e/ou ensino médio de uma Rede Estadual de Ensino, em grande cidade, capital do estado. Tais professores também eram, à época, integrantes de um grupo de pesquisa intitulado Observatório da Educação, constituído de professores que ensinam matemática na escola básica; estudantes de um curso de Pós-Graduação em Educação Matemática (mestrado e doutorado); pesquisadores, e professores do curso, cujo propósito é o realizar pesquisas acerca da formação continuada de professores que ensinam matemática na educação básica. A investigação reuniu forte cunho descritivo, incluindo transcrições dos diálogos havidos entre os sujeitos da pesquisa, gravações em áudio e relatórios de observações, feitas em sala de aula, ao longo de uma sequência de ensino proposta para a pesquisa de campo. O pesquisador procurou estar atento a todos os elementos presentes nas situações estudadas, sabendo de antemão que aspectos por vezes considerados triviais e, aparentemente considerados sem importância, podem se transformar em informações valiosas para compor o conjunto de dados de pesquisa. Portanto, aspectos carregados de significados que ajudam na compreensão dos fenômenos em questão. Assim, considerando alguns aspectos básicos que caracterizam uma investigação qualitativa, como os presentes em Lüdke & André (1986, p.9), considerou-se que a pesquisa se caracteriza como "uma investigação de natureza qualitativa", a qual foi desenvolvida em um ambiente natural (sala de aula) para a coleta direta de dados, onde o pesquisador exerceu papéis que o colocaram como o instrumento central para tal. Nesse ambiente, o pesquisador não se valeu do propósito de recriar experimentalmente questões de pesquisa que não as que foram propostas no início do trabalho investigativo, e sobre as quais se propôs a estudar, observar e coletar dados de pesquisa. Os dados analisados são oriundos das observações do pesquisador e dos registros apresentados pelos sujeitos da pesquisa, nas reflexões e discussões em grupos menores (até 4 membros) e no grupo como um todo, presentes nas fichas de atividades que são parte integrante da sequência de ensino estruturada para tal. Tal sequência foi desenvolvida ao longo de 8(oito) encontros, com duração média de 5(cinco) horas em cada, em sala de aula do Observatório da Educação. Todo o trabalho, estruturado para ser desenvolvido por meio da sequência de ensino, bem como as situações que pudessem responder às questões de pesquisa, não foram situações criadas com exclusividade para a pesquisa em si, uma vez que elas podem ser aplicadas a qualquer tempo por professores e, em seguida, ter seus dados analisados dentro de uma programação regular de sala de aula em turmas regulares dos anos finais do ensino fundamental. Como tal, nas análises que foram feitas pelo pesquisador, ele levou em conta esses particulares contextos. Esses contextos, por sua vez, exerceram certa influência sobre o fenômeno que foi estudado e que pontuou as análises dos dados e as conclusões.

Metodologia de pesquisa

O grupo como um todo - pouco variável, ao longo dos encontros que foram acordados para o desenvolvimento da sequência de ensino proposta -, foi subdividido em grupos menores de até 4(quatro) professores cada, constituídos por afinidades existentes entre seus membros, sem a interferência do pesquisador. Foi adotada a metodologia Design Experiment in Educational Research, de Cobb et al (2003). A escolha se deu, por conta dessa metodologia permitir uma flexibilidade para adaptar o desenho inicialmente proposto, para desenvolver as diferentes atividades, nos distintos momentos, levando em consideração a produção (aproveitamento) e o ritmo apresentados pelos sujeitos da pesquisa. Para tal, o desenho é preliminarmente elaborado e fica sujeito a remodelações e/ou reformulações, em idas e vindas, as quais permitem que se possa fazer novas conjecturas ou novas perguntas de pesquisa a qualquer tempo, as quais devem ser testadas a posteriori. Por essas razões, as análises são feitas na produção apresentada pelos sujeitos da pesquisa (por vezes, de maneira individualizada), suas reações, no estudo de suas trajetórias e na coleta de dados, que incluem dificuldades, facilidades e avanços obtidos. Ou seja, é previsto a elaboração de experimentos de ensino que tratam da ampliação conceitual e no tocante a estratégias e procedimentos da Matemática, com o propósito de obter inovações diversas mediante os avanços obtidos pelos sujeitos da pesquisa, em consonância com o que apontam Tall & Vinner (1981). Sendo assim, trata-se de um processo amplo, flexível, cíclico, iterativo e ajustável. A razão de tal escolha recair sobre essa metodologia visou atender propósitos relacionados à obtenção de respostas para a questão de pesquisa, quais sejam: definição dos documentos diagnósticos e a elaboração de questões para compor as fichas de atividades, de modo a conhecer aspectos da experiência docente dos sujeitos da pesquisa; conhecer acerca de conhecimentos defendidos por Shulman (1986) no tocante à formação de professores, notadamente os conhecimentos de conteúdo e os conhecimentos pedagógicos de conteúdo; elaboração e aplicação de uma sequência didática; resolução, reflexões e discussões de todo o grupo, primeiramente em grupos menores, e a elaboração de um questionário suficiente para identificar concepções e crenças dos professores no tocante à conhecer possibilidades para (re)significar os seus conhecimentos, no que refere às atividades docentes que estão relacionadas com a apropriação de conceitos, procedimentos, estratégias e competências, próprias à resolução de problemas de contagem com os seus alunos.

Análise dos resultados de problemas propostos na pesquisa de campo

Considerando a grande quantidade de problemas de contagem que foram propostos aos sujeitos de pesquisa ao longo dos oito encontros para resolução, reflexões e discussões acerca de práticas pedagógicas necessárias encaminhar em um trabalho similar que venha ser desenvolvido com alunos dos anos finais do ensino fundamental, e por conta do limite de espaço disponível, aqui, este trabalho apresenta um pequeno recorte da pesquisa e por essas razões serão feitas as análises de, apenas, os Problemas 1 e 2, propostos no 1º encontro do estudo, como a seguir. Ressalte-se que todas os problemas constantes das fichas de atividades distribuídas nos oito encontros foram objeto de coleta e análise de dados, cujos resultados estão presentes em Teixeira (2012).

Tais escolhas levaram em conta o fato de esses dois problemas bem representarem como se deu o desenvolvimento das demais atividades; a participação dos sujeitos da pesquisa; como foi feita a análise dos resultados; a mobilidade que a metodologia escolhida permitiu ao pesquisador transitar; a importância da escolha da metodologia para viabilizar o atendimento aos objetivos de obtenção à resposta principal da pesquisa; o desenrolar da proposição dos problemas ao longo dos encontros; a estreita conexão das atividades desenvolvidas com o referencial teórico, que norteou os propósitos das escolhas feitas; a oportunidade de identificar e conhecer um pouco da prática dos professores em relação ao ensino da temática; a oportunidade de verificar a viabilidade de poder desenvolver estudo similar com alunos do ensino fundamental, sem o uso de fórmulas; a abrangência do conjunto de todas as atividades que foram propostas; a oportunidade de oportunizar que os sujeitos da pesquisa pudessem ampliar os conhecimentos conceituais, e os relativos aos conhecimentos pedagógicos do conteúdo em questão, necessários à responder à questão principal da pesquisa; a oportunidade de poder identificar, e analisar, as dificuldades que os sujeitos de pesquisa enfrentaram na resolução dos problemas, bem como a possibilidade de poder conferir, para este grupo de professores, a oportunidade de avaliar hipóteses do pesquisador quanto à crença que muitos professores e cidadãos têm quanto ao fato de acreditarem que as dificuldades que os professores enfrentam (enfrentariam) na resolução de problemas de contagem, são (seriam) as mesmas que as de seus alunos, ou de que outros também têm (teriam).

Desta maneira, este trabalho procura sintetizar as ações que o autor considera fundamentais para a atividade docente do professor que vai dirigir situações de aprendizagem, relativas à proposição de problemas de contagem com alunos do ensino fundamental, à luz dos resultados obtidos na pesquisa completa e que dá origem a este recorte, enfatizando, desde o início das atividades, a necessidade de os sujeitos da pesquisa se colocarem na posição de um aluno frente às facilidades, dificuldades, reações e maneiras de ele poder comunicar os resultados.

Assim, ao longo de todo o trabalho de campo identificou-se que há uma premente necessidade de o professor dispensar o tempo que for necessário para compreender como o seu aluno mobiliza o pensamento combinatório, durante os momentos de resolução de um dado problema de contagem proposto, de maneira a orientá-lo, se for o caso, e não com o propósito de querer que o aluno resolva o problema de maneira idêntica à que ele gostaria que assim o fosse mas como o aluno a considera adequada à maneira como pensa e mobiliza uma estratégia e os procedimentos durante o desenrolar da resolução.

É claro que alternativas de resolução de um dado problema de contagem que seja proposto pelo professor, podem/devem ser apresentadas por ele, uma vez respeitada a resolução apresentada por aluno, desde que correta, mas que necessite de algum ajuste para melhor comunicar o resultado obtido. A necessidade de o professor compreender como o seu aluno mobiliza o pensamento combinatório significa a aceitação da maneira como o aluno conduz a resolução de um problema, consoante os conceitos e significados envolvidos.

Na pesquisa, ao longo dos oito encontros, foram coletados os dados de resolução e discussões de todos os problemas propostos, num amplo e diversificado universo de problemas e apenas uma pequena parcela destes problemas permeia os propósitos de escolha, apresentação dos resultados e a análise dos dados que são objeto deste trabalho.

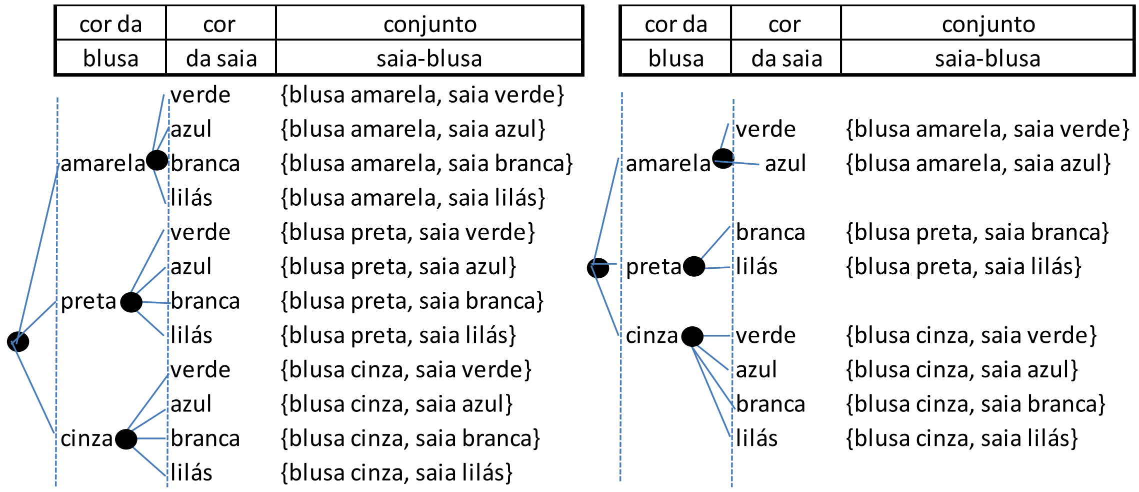
Os dois problemas, apresentados a seguir, também foram os primeiros propostos na 1ª Ficha de Atividades que foi entregue no primeiro dia de formação. A proposta de trabalho era de que as discussões acerca das resoluções fossem realizadas somente após os sujeitos terem concluídas as duas resoluções, e ambas tenham sido apresentadas no quadro branco, em diferentes maneiras, se fosse o caso, para cada um dos problemas. Eis os dois primeiros problemas e as respectivas análises dos dados coletados com os representantes dos grupos menores (formados por até quatro sujeitos da pesquisa):

Considere que Bia possui 4(quatro) blusas, nas cores: branco, lilás, verde e azul, e 3(três) saias nas cores: preta, cinza e amarelo. Problema 1: De quantos modos Bia pode se vestir, fazendo uso de uma saia e uma blusa? Problema 2: De quantos modos Bia pode se vestir, fazendo uso de uma saia e uma blusa, considerando que quando ela faz uso da saia de cor preta escolhe usar uma blusa de cor clara; quando faz uso da saia de cor amarela escolhe usar uma blusa de cor escura, e quando faz uso da saia de cor cinza se dá o direito de escolher uma blusa de qualquer cor?

Para o Problema 1 a maioria dos sujeitos de pesquisa (18 em 20) utilizou uma representação numérica com o uso de um registro multiplicativo para determinar o total de possibilidades ("conjuntos saia-blusa", que atendem às condições do enunciado), por meio da aplicação do princípio multiplicativo, obtendo o correto quantitativo: 3 x 4 = 12 ou 4 x 3 = 12. E pronto, deram por encerrada a solução, sem quaisquer considerações adicionais que não uma das duas respostas quantitativas, mostradas acima. As árvores de possibilidades, como apresentadas na Tabela 1, a seguir, mostra-nos os totais de possibilidades (agrupamentos-solução), isto é, as respostas qualitativas para cada um dos dois problemas enunciados acima.

Tabela 1.

Árvores de possibilidades com as soluções dos problemas 1 e 2 (Fonte: A pesquisa)



Para o Problema 2 a maioria dos sujeitos de pesquisa (16 em 20) apresentou resposta quantitativa por meio de uma representação numérica com o uso de diferentes tipos de registro para determinar o total de possibilidades ("conjuntos saia-blusa" que atendem às condições do enunciado), mas de valor incorreto. E a exemplo do Problema 1, deram por encerrada a solução apresentada sem quaisquer considerações adicionais que não uma das respostas quantitativas mostradas na Tabela 2, a seguir:

Tabela 2.

Resultados obtidos pelos sujeitos de pesquisa ao Problema 2. Fonte: A pesquisa.

Resolução apresentada no quadro branco	Frequência absoluta (f)
3 x 4 - 2 = 10 possibilidades	8
3 x 2 = 6 possibilidades	4
12 - 2 = 10 possibilidades	2
1 x 4 x 2 x 2 = 16 possibilidades	1
1 x 4 x 2 = 8 possibilidades	1
1 x 4 + 2 x 2 = 8 possibilidades	4

Diante dos resultados apresentados, por conta da flexibilidade de adaptação ao desenho inicialmente proposto que a metodologia Design Experiment in Educational Research oportuniza e de acordo com as produções: apenas soluções numéricas, fornecidas pelo sujeitos da pesquisa, o pesquisador pediu que eles encontrassem tais quantitativos por meio da construção de um esquema, produto cartesiano, tabela de dupla entrada e de uma árvore de possibilidades. O pesquisador anotou todos os resultados numéricos apresentados no quadro branco e apagou o quadro, para que as representações gráficas fossem apresentadas em seguida. Prosseguindo, e uma vez que ao menos o exemplar de uma representação gráfica estivesse desenhada no quadro branco, o pesquisador pediu aos sujeitos da pesquisa que após a construção de todas as representações gráficas eles avaliassem a conveniência, adequação, dificuldades e facilidades entre uma representação e outra.

As discussões iniciais acerca da construção de representações gráficas objeto da resolução do Problema 1 levaram à compreensão dos sujeitos da pesquisa em relação à escolha de uma representação gráfica poder recair sobre a construção de uma tabela de dupla entrada toda vez em que duas decisões precisem ser tomadas (possibilidades de tomar cada uma das decisões: escolha da cor da saia ou escolha da cor da blusa em uma entrada da tabela ou na outra entrada). Os sujeitos também compreenderem que quando mais de duas decisões são necessárias tomar durante a resolução de um dado problema de contagem, é necessário construir mais que uma só tabela de dupla entrada.

E, por conta disso, tais quantidades de tabelas de dupla entrada - mais que duas - não tornaria atraente a resolução via a construção desse tipo de representação gráfica. Em seguida, o pesquisador mediou reflexões e discussões acerca da viabilidade/importância de explorar uma ou outra dentre as representações gráficas, começando por lembrá-los que a formação continuada tinha como um dos propósitos o de oportunizar condições para conhecerem e compartilharem o trabalho didático que cada um deles desenvolve com os seus alunos em suas turmas regulares, bem como a oportunidade que teriam de conhecer as práticas docentes desenvolvidas pelos colegas, e se fosse o caso oportunizar que cada um também viesse a (re)significar a sua.

De lembrá-los, também, que ao longo de todas as atividades que seriam propostas cada um deveria se colocar na posição de um aluno do ensino fundamental, avaliando as possíveis dificuldades que os alunos enfrentariam quanto à compreensão dos conceitos e as decisões de escolhas que poderiam lançar mão no tocante à estratégia de resolução de cada particular problema de contagem em questão. Também, e não menos importante, de que cada um deveria disponibilizar-se para identificar maneiras como cada professor poderia ajudar os alunos a superar possíveis dificuldades de leitura e compreensão do enunciado, e de encaminhamento da resolução. Para essas posturas, a ampliação dos conhecimentos pedagógicos de conteúdo é tarefa por demais requerida. Para tal, o estudo contaria com a metodologia de aprendizagem Design Experiments in Educational Research por se tratar de uma metodologia efetiva, flexiva e maleável, e que tem como um dos objetivos o de permitir mudanças no desenho inicial, a qualquer tempo.

E, portanto, os sujeitos de pesquisa poderiam explorar intensamente a construção de diferentes representações: gráficas ou numéricas, para encaminhar a resolução de todos os problemas de contagem que seriam propostos ao longo de toda a sequência didática; o exercício contínuo e efetivo do raciocínio combinatório; a aplicação dos Princípios fundamentais de contagem: aditivo e multiplicativo, e o não uso de fórmulas.

Ademais, tempo considerável, mas necessário, foi destinado à construção de uma árvore de possibilidades objeto do Problema 1 (com resistência de alguns sujeitos de pesquisa quanto à necessidade de construção de uma árvore, se a resposta já havia sido obtida); as discussões acerca das maneiras como uma árvore pode ser explorada com os alunos; o tipo da árvore objeto deste exemplo: “árvore simétrica”; a relação direta entre a sua construção, por completo, e uma correspondente representação numérica multiplicativa - a qual poderia ser considerada apenas para confirmar o quantitativo de possibilidades (o número de “folhas terminais”) que foi encontrado, considerando que a “folha terminal” é o último objeto a ser considerado nas possíveis “combinações” entre os objetos disponíveis, em um problema de contagem.

Uma vez que uma árvore de possibilidades esteja totalmente construída a contagem de possibilidades que atendem a cada um dos problemas pode ser feita de maneira direta a partir da árvore, contando o total de “folhas terminais” uma a uma ou via a aplicação do princípio aditivo, nos blocos de soluções. No caso do Problema 1: 4 + 4 + 4 = 12, e no caso do Problema 2: 2 x 2 + 1 x 4 = 8.

Nas árvores de possibilidades desenhadas acima, Tabela 1, cada bolinha de cor preta indica um “nó”. O “nó” aponta para a necessidade da tomada de uma decisão. Sendo assim, a partir de cada “nó” é preciso refletir acerca de quantos e quais modos tal decisão pode ser tomada para, só então, e a partir de cada “nó”, traçar os necessários “ramos” (que saem de cada um dos “nós” da árvore) conforme sejam as possibilidades de tomada da referida decisão. Os “traços verticais pontilhados” indicam a delimitação relativa às possibilidades de tomada de decisão a partir dos particulares “nós” que estejam à esquerda do traço. Na árvore-solução do problema 1, situada mais à esquerda, na Tabela 1, a primeira decisão recai sobre a avaliação das possibilidades de escolha da cor da blusa (para qualquer das 3 cores de blusas, que pode ser escolhida para “combinar” com as cores de saias disponíveis). Qualquer que seja a escolha da cor da blusa (qualquer um dos 3 “nós”) a “combinar”, é possível fazer “combinações” com todas as cores de saias disponíveis. Ou seja, a blusa de cor amarela pode “combinar” com as quatro cores de saias, assim como as blusas de cores preta e cinza.

Tal relação de “combinação” entre uma cor de blusa e as cores de saias é dita satisfazer à correspondência “um-para-muitos”[4]: a cada cor de blusa escolhida faz-se corresponder quatro diferentes cores de saias, formando, então, 4 distintos “conjuntos blusa-saia” - conjuntos que

[4] “um-para-muitos”, segundo (Nunes e Bryant, 1997), é um termo que permite identificar uma situação multiplicativa, base para o entendimento do conceito de proporcionalidade, e a presença de uma proporção.

têm em comum a cor da blusa escolhida. Como a correspondência “um-para-muitos” se repete, em iguais quantidades, para os outros dois “nós”, se diz que essa correspondência se multiplica (que há igual multiplicidade de possibilidades) para cada um dos 3 nós. Isto é, que cada escolha de uma cor de blusa (cada decisão tomada em relação à cor de uma blusa, em cada “nó”) tem alcance em 4 possíveis escolhas de cores de saias.

Portanto, é preciso compreender - e fazer com que os alunos compreendam - como se dá a relação de “combinação” entre objetos, associada à correspondência “um-para-muitos”, tal como: em cada “nó” é tomada a decisão de escolher uma dentre as 4 cores de saias, por vez, de modo a formar cada um dos “conjuntos blusa-saia”. Por essa razão, se diz que há uma relação de multiplicidade (operação multiplicativa: 1 para 4, relativamente ao primeiro “nó”). Igualmente, para os outros dois nós restantes, há também a proporcionalidade 1 para 4, o que permite considerar as relações de multiplicidade (proporcionalidade direta): 1 para 4; 2 para 8; 3 para 12, para este particular problema. Portanto, verifica-se que a relação “um-para-muitos” está diretamente imbricada ao conceito de proporcionalidade e, então, fica estabelecida a proporção: $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12}$.

Ademais, uma vez que a relação “um-para-muitos” esteja presente na resolução de um problema de contagem, ela aponta para a aplicação do Princípio Fundamental da Contagem (também conhecido como Princípio Multiplicativo - nomeação atribuída, como visto, por razão natural). Por sua vez, a aplicação do Princípio Multiplicativo envolve a utilização de uma representação numérica essencialmente multiplicativa, a saber: 3 (total de modos de tomar a decisão acerca da escolha da cor da blusa) x 4 (para cada cor de blusa escolhida se pode escolher uma das 4 cores de saia de modo a fazer as “combinações” e assim, formar os “conjuntos blusa-saia”) = 12 possibilidades, ou a formação de 12 “conjuntos blusa-saia”. Ou ainda, a obtenção de 12 agrupamentos-solução.

Finalizando, convém observar que cada um dos 3 nós (junto à última linha pontilhada) aponta para a necessidade de uma segunda tomada de decisão - a qual pode ser tomada de 4 modos, para cada “nó”. Ou seja, aponta que há 4 “folhas terminais” obtidas a partir de cada um dos últimos 3 “nós”. Quando isso ocorre se diz que a árvore de possibilidades é uma “árvore simétrica” e uma representação numérica que dê conta de contabilizar o total de possibilidades (o total de “conjuntos blusa-saia”) pode ser escrita, exclusivamente, sob a forma de um produto (para este problema: 3 x 4 = 12), onde o 1º fator multiplicativo: o número 3 indica o número de modos que há para se tomar a decisão d_1: escolha da cor da blusa, e o 2º fator multiplicativo: o número 4, indica o número de modos de tomar a decisão d_2: escolha da cor da saia que pode “combinar” com cada uma das possíveis escolhas dentre as cores de blusa que foram objeto da decisão d_1. Por outro lado, é conveniente lembrar, aqui, a respeito da validade da propriedade comutativa da multiplicação, ou seja, que 3 x 4 = 4 x 3 = 12. Para este particular problema de contagem, quando se faz uso do registro multiplicativo 4 x 3 = 12, é preciso levar em conta as ações que estão sendo consideradas e a ordem entre elas, a saber: que a 1ª decisão: d_1 recai sobre o número de modos de escolha da cor de uma saia e a 2ª decisão: d_2 recai sobre o número de modos de escolha da cor de uma blusa que irá “combinar” com a cor da saia, para cada possibilidade, a partir da tomada de decisão d_1. A confirmação acerca da quantidade de modos que uma decisão pode ser tomada por quem está resolvendo um problema de contagem poderá ser apropriada quando a pessoa se coloca na posição de quem está fazendo (ou vai fazer) cada ação: primeiramente, na escolha da cor de uma blusa e, depois, na escolha da cor de uma saia. Ademais, considerando que 2 x 6 = 6 x 2 = 12 são igualdades verdadeiras, no sentido algébrico-numérico da operação, e embora o resultado final seja igual ao quantitativo de “conjuntos blusa-saia” encontrado para solução do Problema 1, tal registro multiplicativo não encontra amparo nas duas decisões associadas às ações de “combinações entre cores de saias e cores de blusas", para este particular exemplo, no tocante aos quantitativos de peças de cada um dos tipos disponibilizadas para a resolução do problema.

Portanto, é importante ressaltar que, uma vez um registro multiplicativo seja utilizado para computar o total de possibilidades que atendem à solução de um problema de contagem, tal registro deve estar em consonância com as possibilidades de tomada de decisões. Ou seja, deve estar imbricado diretamente às correspondentes quantidades de tomadas de decisão e aos respectivos quantitativos de modos como cada uma das decisões pode ser tomada - bem como, em relação às quantidades de objetos disponibilizados - para que sejam feitas as devidas "combinações". Esta situação é muito frequente ocorrer em sala de aula. Por exemplo, quando um aluno interroga o professor: "Mas, o resultado total das possibilidades não está correto?".

Relativamente ao problema 2 há que levar em conta que foram feitas reflexões, discussões e considerações parecidas àquelas que foram objeto do Problema 1 – agora, considerando a impossibilidade de uma representação numérica via a utilização de um único produto, e a relação desta impossibilidade com o fato de a árvore de possibilidades ser "assimétrica" (não ser simétrica). Este Problema 2 é de um tipo de problemas em que é preciso reparti-lo em partes para encaminhar a sua resolução, e a aplicação do princípio aditivo faz-se necessário para determinar o total de 2 x 2 + 1 x 4 = 8 ou 1 x 4 + 2 x 2 = 8 possibilidades. Foi amplamente enfatizado entre os sujeitos de pesquisa, a necessidade de eles compreenderem que a não possibilidade de fazer uso de uma única representação numérica, essencialmente multiplicativa, ocorre toda vez que a árvore de possibilidades for assimétrica, e vice-versa. Neste problema, é significativa a aplicação do Princípio Aditivo em conjunto com o Princípio Multiplicativo: 2 x 2 + 1 x 4 à resolução do problema, vez que apenas duas tomadas de decisão não dão conta de abarcar todas as possibilidades para formar todos os conjuntos saia-blusa que atendem às condições do enunciado por conta de haver escolhas distintas de cores de blusas em função das escolhas feitas em relação às cores de saias, para as "correspondentes combinações”. Alguns sujeitos de pesquisa chegaram a expor opinião a respeito do desconhecimento acerca do Princípio Aditivo, com se constata na fala do professor P9:

> [...] em alguns problemas eu até uso a soma para obter o resultado, mas nem sabia que era por conta da aplicação do Princípio. Eu nunca precisei conhecer o Princípio para resolver um problema de contagem. Também nem sei quando eu preciso somar ou não, para encontrar a resposta. As vezes acerto, e outras não (P9). Fonte: a pesquisa.

Tal desconhecimento sobre o Princípio Aditivo pode estar associado à referência que os professores do grupo tinham à época da pesquisa, qual seja: apenas consultas aos livros didáticos como um recurso essencial para fundamentar e preparar as aulas e a demasiada valorização que os professores emprestam a estas obras. Junta-se a essa posição os resquícios de algumas crenças e modelos que foram vivenciados e formadas à época dos estudos na escola básica, e que se estenderam durante a formação inicial nos cursos de Licenciatura, por conta de a formação inicial para o trabalho docente não ter sido suficientemente assertiva a tal ponto de dar conta de reverter uma formação conceitual fragilizada da Matemática, que se tem visto nos dias de hoje.

Em relação ao componente algorítmico, o grupo fez uso, em diversas ocasiões, de uma ou mais fórmulas para dar conta da contagem das possibilidades em resposta ao problema objeto da resolução, embora tivesse sido acordado de início, pelo pesquisador e os sujeitos de pesquisa, que somente deveriam ser exploradas as seguintes ferramentas combinatórias: construção de uma representação: gráfica e/ou numérica; o exercício constante do raciocínio combinatório durante a etapa de resolução, e a aplicação do princípio multiplicativo e do princípio aditivo, quando fosse o caso. Deste modo, faz-se necessário salientar que professores e alunos precisam compreender o que está por detrás da orientação apresentada por Fischbein (1994), apud Teixeira (2012), quando refere que os aspectos formal e algorítmico constituem condições básicas para o desenvolvimento de um raciocínio matemático eficiente, não prescindindo do aspecto intuitivo. Assim, é preciso que o estudante conheça e explore a íntima relação que há entre os dois aspectos.

Ademais, é preciso deixar claro que este autor não demoniza o uso de uma fórmula, e por conta, que não seja boa a exploração do aspecto algorítmico - desde que se conheça em que condições formais o algoritmo pode ser utilizado. Também, é preciso ter o cuidado de verificar antes se o seu uso para a resolução de um problema contempla o cômputo de todas as possibilidades, que precisam ser contabilizadas como os agrupamentos-solução.

Assim, tomando por base os resultados da pesquisa apresentados neste recorte identificou-se que a proposição e o desenvolvimento de atividades que envolvam o raciocínio combinatório com quantitativos de objetos em pequeno número, no início do estudo, permite ao aluno encontrar maneiras próprias de sistematização para a obtenção de todas as possibilidades que atendem à solução enquanto obtém os agrupamentos-solução que representam todas as possibilidades a partir da construção, por completo, de uma representação gráfica. E, em prosseguimento, permite que o aluno efetue a contagem direta de tais possibilidades.

Se uma solução intuitiva for apresentada pelos alunos durante a resolução de um problema de contagem, o professor deve incentivar a sua apresentação e de outras mais e, se assim considerar, sugerir que o aluno também construa uma representação gráfica que confirme o resultado por ele obtido. Em seguida é preciso que o professor peça ao aluno que faça correlações entre os quantitativos de ações necessárias à construção de uma árvore de possibilidades, por exemplo, e à aplicação do Princípio Multiplicativo - sem que o professor se veja obrigado a apresentar este Princípio de imediato, naquele momento, de maneira formal. Tal sugestão pedagógica permite que os alunos encarem a resolução de problemas de contagem de maneira atraente e desafiadora, uma vez que eles poderão manipular objetos e utilizarem-se de representações gráficas e numéricas para a obtenção de todas as possibilidades sem fazer uso de uma fórmula.

A estimulação gradual ao exercício do raciocínio combinatório durante a resolução de diferentes problemas de contagem sem a utilização de uma fórmula promove os raciocínios abstrato e crítico, e desenvolve habilidades cognitivas por meio da compreensão acerca da escolha de uma estratégia de resolução, do porquê de certos procedimentos e de quais competências são necessárias serem apropriadas pelo aluno, de modo a promover a ampliação de seus conhecimentos na resolução de problemas de contagem. Uma vez que o professor considere que o exercício do raciocínio combinatório esteja consolidado entre os alunos, é imperioso que proponha problemas com grandes quantidades de objetos a "combinar" de modo que o aluno mobilize os conhecimentos sem a construção de uma representação gráfica, mas de uma representação numérica.

Estes conhecimentos, por sua vez, passam a fazer parte da ampliação conceitual, segundo Tall & Vinner (1981), e inclusive podem ser generalizados mais adiante, em outras situações. A resolução de problemas de contagem que tomam o raciocínio combinatório como ferramenta combinatória - indispensável durante a apropriação de conceitos e a construção de representações gráficas e numéricas - têm nela uma importante e imprescindível aliada. Por sua vez, tais instrumentos ajudam o aluno quanto à escolha, compreensão e utilização de uma estratégia e os procedimentos que se fazem necessários ele encaminhar para a obtenção da resposta qualitativa e/ou quantitativa. Portanto, a experiência com o uso de ferramentas combinatórias e a construção de uma representação gráfica e de uma representação numérica são fundamentais e necessárias para o desenvolvimento do ensino de problemas de contagem sem o uso de uma fórmula, uma vez que elas contribuem, de modo decisivo, para a formação de cidadãos críticos, autônomos e intervenientes - tarefa que os professores têm de abraçar com os seus alunos.

Analisando o desenvolvimento das atividades propostas, os resultados obtidos com a coleta de dados e o conteúdo matemático associado ao exercício do raciocínio combinatório, entendemos deva haver uma busca pela aproximação entre o conteúdo escolar e o universo da cultura matemática ao longo do ensino fundamental que proporcione ampliação conceitual qualitativa para a aprendizagem dos alunos.

Tais ações, indispensáveis para a apropriação e a sistematização dos conceitos, procedimentos e competências, devem mirar no propósito de reunir condições satisfatórias para a compreensão de outros tantos conceitos e procedimentos próprios às temáticas probabilidade e estatística, presentes nos currículos de Matemática no ensino médio. Mesmo considerando que tal ampliação conceitual já exista em algumas regiões do nosso país, é preciso, sempre, que os professores reflitam acerca do que acontece nas suas práticas da sala de aula em relação ao que está prescrito nos currículos; acerca do que é apontado nos PCN e prescrito na BNCC; nas propostas de formações iniciais de professores, e nas formações continuadas propostas ao longo da trajetória profissional de cada um.

Tais preocupações residem no fato de que embora as questões de formação de professores e práticas docentes guardem entre si relações muito próximas, resultados de pesquisas têm mostrado que elas não têm sido refletidas, discutidas e postas em prática da maneira articulada que é desejável, o que corrobora com a tese de haver dificuldades para a aceitação e a implementação de propostas de formação sem que se tenha um olhar diferenciado para o tipo de formação inicial que os professores tiveram e as experiências docentes que os professores vivenciaram ao longo de suas carreiras.

Ademais, corroborando com as ideias de Pietropaolo (2002, p.34), salienta-se a não clareza quanto ao tipo de profissional docente que as universidades têm formado e o desejável para atender às novas demandas nestes novos tempos, o que de certo modo pode vir a clarear o entendimento quanto às dificuldades que têm sido encontradas para o desenvolvimento de projetos colaborativos que visam à melhoria da formação de professores que ensinam Matemática na escola básica.

Conclusões

Durante a fase de preparação das atividades que iriam fazer parte do trabalho de campo objeto da pesquisa e a definição dos objetivos que as permeariam, a hipótese com maior potencial pedagógico dava conta que todas as atividades deveriam ser pensadas e elaboradas de modo a não haver necessidade de fazer uso de uma fórmula para obter a solução quantitativa, para todo e qualquer problema de contagem que viesse a ser proposto. Tal hipótese trazia em si a preocupação de ofertar aos sujeitos da pesquisa a oportunidade de vivenciarem situações tal qual as que poderiam ser propostas aos seus alunos dos anos finais do ensino fundamental. Àquela altura o pesquisador mostrava-se confiante que a prática intensiva de resoluções de problemas de contagem de maneira intuitiva, ou por meio da construção de uma representação gráfica, anularia por completo a ideia de haver necessidade de fazer uso de uma fórmula que pudesse povoar o pensamento de algum dos sujeitos da pesquisa. Mas, não foi isso o que aconteceu na prática, ao longo de todo o trabalho de campo.

Uma das crenças que mais fortemente se fez presente entre a maioria dos sujeitos da pesquisa foi a de que uma resposta quantitativa de um problema de contagem só poderia ser considerada correta se uma fórmula (aspecto algorítmico) fosse utilizada para determinar a totalidade de possibilidades que satisfariam o enunciado de tal problema. Os dados obtidos na pesquisa mostraram que o grupo utilizou, majoritariamente, o componente algorítmico, fazendo menção ao componente formal sempre que sentiam necessidade ou precisavam justificar o uso de uma fórmula para obter a solução, além de terem feito muito pouco uso do aspecto intuitivo para encontrar a solução em um pequeno universo de problemas, dentre a grande totalidade de problemas que foram propostos.

Tal crença foi confirmada em diversos momentos, pela maioria dos sujeitos, fazendo com que o componente algorítmico fosse mais salientado e utilizado que os componentes intuitivo e formal durante o desenrolar das atividades, não obstante o pedido do pesquisador para que fórmulas não fossem usadas. Assim, a hipótese inicial mostrou-se enfraquecida pois a proposta de não uso de fórmulas, feita pelo pesquisador, não foi capaz de atenuar essa crença ao longo de todo o trabalho de campo, e tampouco foi possível constatar a sua extinção por completo, entre todos os sujeitos da pesquisa, ao final da pesquisa de campo. Ademais, e também para alguns sujeitos da pesquisa, caso uma fórmula não fosse usada para obter a solução quantitativa a um dado problema, havia a crença de que seria necessário que se justificasse o resultado que foi obtido através da construção de uma representação gráfica ou numérica, por meio do uso de uma ou mais fórmulas, uma vez que em alguns problemas esses mesmos sujeitos pontuaram que tal prática deveria ser incorporada à resolução de modo a validar a resposta que foi obtida por meio da construção de uma árvore de possibilidades, por exemplo.

Outra concepção presente no grupo foi a que dava conta que uma solução obtida via uma ideia intuitiva, um desenho ou uma representação gráfica, era uma "solução a menor". Ou seja, uma solução que teria "menor peso" que uma solução obtida por meio da aplicação de uma fórmula. Segundo esses sujeitos, o desembaraço de alguém, no tocante ao uso de fórmulas, representava para eles a crença de que tal pessoa tinha amplo domínio do conteúdo combinatória, a ponto de eles culparem os erros que cometiam em alguns problemas à não clareza dos enunciados, considerando que estes não permitiam fosse possível identificar a maneira adequada para aplicar uma fórmula diretamente.

Ao analisar as dificuldades apresentadas pelos professores - alguns com mais de dez anos de exercício docente -; identificar lacunas de conhecimentos pedagógicos de conteúdo que envolvem a temática, e a carência de ofertas de formação continuada que permeia o trabalho docente em serviço - importantes para atender às legítimas necessidades formativas -, evidencia-se a importância que emprestamos e legitimamos no que refere à necessidade de fomentar a criação e o desenvolvimento de espaços pedagógicos que examinem o que os professores sabem "do" e "sobre" o ensino da Matemática na educação básica.

Entendemos que tais espaços precisam se consolidar. Primeiramente, no seio das universidades, e posteriormente haver transferência dessa expertise para os professores da educação básica, nas suas escolas, na perspectiva de em assim sendo se estar contribuindo para o desenvolvimento profissional docente, por meio de experiências e reflexões na ação e sobre a ação. Por sua vez, tais experiências apresentam possibilidades de novas aprendizagens no exercício docente a partir de ações dialógicas e da interação entre pares, as quais vêm reforçar uma tese muito presente na área de formação e prática docente de professores, em grupos colaborativos, segundo a qual é pela reflexão na prática e sobre a prática que se pode reestruturar os conhecimentos profissionais dos professores.

Portanto, em face dos resultados que foram apresentados neste recorte, com este pequeno universo de sujeitos da pesquisa, fica claro a necessidade de fomentar formações continuadas que contribuam para a consolidação e o aprofundamento, de maneira articulada, para a ampliação dos conhecimentos de conteúdo, pedagógico de conteúdo e curricular, na perspectiva de Shulman (1986).

De preferência, em grupos colaborativos, vez que esses grupos têm sido polos catalizadores de aprendizagens e mostrado serem espaços adequados à superação das dificuldades de professores, alunos e cidadãos em geral, bem como têm sido suficientemente atraentes para promover a (re) significação de práticas educativas, no seio de uma comunidade aprendente[5].

[5] Brandão (2005) refere que uma "**Comunidade Aprendente**" é aquela que aprende também a ser **comunidade** enquanto aprende a fazer o que faz. Considera que no interior de qualquer grupo humano que seja criado para viver ou fazer qualquer atividade, todas as pessoas são fontes originais de saber.

Ademais, tais reflexões nos remetem à imperiosa necessidade de firmar posição em defesa dos programas de formação inicial de professores que irão ensinar Matemática aos estudantes da educação básica - Licenciaturas em Pedagogia e Licenciaturas em Matemática - de modo que os envolvidos nesses programas se emprenhem, em suas disciplinas, em oferecer condições para que os licenciandos se apropriem dos conceitos e os compreendam plenamente, em detrimento do domínio de técnicas operatórias que privilegiam o "paradigma do exercício".

Também, que os futuros professores sejam preparados para compreender como devem proceder para "transformar" os saberes matemáticos em conhecimentos pedagógicos de conteúdo - suficientes para a legítima atuação docente dos futuros professores em suas práticas pedagógicas com os alunos da educação básica.

Referências

Brandão, C. (2005). Comunidades Aprendentes. In: *Encontros e Caminhos*. Brasília, Ministério do Meio Ambiente.

Brasil. (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. 1º e 2º ciclos*. Ministério da Educação. Secretaria de Ensino Fundamental. Brasília.

Brasil. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental: Matemática.* Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF.

Cobb, P.; Confrey, J.; DiSessa, A.; Lehrer, R. & Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher*, volume (32. No. 1) pp. 9-13.

Fischbein, E. (1975). The intuitive sources of probabilistic thinking in children. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E. (1994). The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity. In: *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Mathematics Education Library. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Lüdke, M.; André, M. E. D. A. *Pesquisa em educação*: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986

Navarro-Pelayo, V.; Batanero, C. & Godino, J.D. (1996). Razonamiento combinatório em alumnos de secundaria. *Educación Matemática*. Grupo Editorial Ibero América, Madrid, volume (8(1)), pp. 26-39.

Pietropaolo, R. C. (2002). Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental. *Educação Matemática em Revista*, v. 6, n. 11a, pp. 34-38.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand knowledge growth in teaching. *Educational,* volume (15, n.2), pp.4-14.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*.

Teixeira, P.J.M. (2012). *Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor de Matemática para a exploração de problemas de contagem no Ensino Fundamental*. [Tese de doutorado em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo].

Teixeira, P.J.M. (2012). *Construção da linguagem matemática no Ensino Fundamental: reflexões e práticas relativas ao raciocínio combinatório*. [Tese de doutorado em Ciências de la Educacion, Universidad Americana].

Teixeira, P.J.M. (2013). Professores de Matemática e problemas de contagem no Ensino Fundamental. In: *Anais do XI ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática. Educação Matemática: Retrospectivas e Perspectivas*, Curitiba: PUC-PR.

Teixeira, P.J.M. (2014). *Resolvendo problemas de Análise Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental*. 1ª Ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda. 173p.

Teixeira, P.J.M. (2015). *Práticas acerca do Raciocínio Combinatório no Ensino Fundamental*. 1ª Ed. São Paulo: NEA – Novas Edições Acadêmicas. 456p.

Teixeira, P.J.M. (2018). *Resolvendo problemas de Análise Combinatória nos anos finais do Ensino Fundamental*. 1ª Ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda. 445p.

Recebido em: 03/07/2019
Aprovado em: 16/11/2019