EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019vol21i3p438-463

Formação do conceito de transformação linear de acordo com os pressupostos de Davydov

Formation of the concept of linear transformation according to the propositions of Davydov

ALINE MOTA DE MESQUITA ASSIS [1]

Resumo

Este artigo objetiva compreender e analisar as contribuições da teoria do ensino desenvolvimental para o ensino de Álgebra Linear, tendo em vista a aprendizagem do conceito de transformação linear. A questão de pesquisa foi: que repercussões teriam, no processo de formação de conceitos pelos alunos, o ensino do conceito de transformação linear fundamentado na teoria histórico-cultural, em específico, na teoria do ensino desenvolvimental de Davydov? A metodologia utilizada foi um experimento didático formativo, pautado nos pressupostos davydovianos. Dentre os resultados obtidos tem-se: o desenvolvimento da capacidade de pensar a Matemática de acordo com a forma de pensar dessa ciência e indícios de mudanças qualitativas no desenvolvimento do pensamento teórico quanto ao conceito de transformação linear.

Palavras-chave: *Ensino desenvolvimental, Ensino de Álgebra Linear, Formação de conceitos matemáticos, Teoria histórico-cultural, Transformação Linear.*

Abstract

The aim of this paper is to analyze and understand the contributions of developmental teaching theory to the teaching of linear algebra regarding the concept of linear transformation. The research question was: what repercussions would the teaching of the concept of linear transformation based on historical-cultural theory, specifically on Davydov's theory of developmental teaching, have on students' concept formation process? The methodology used was a didactic formative experiment, based on Davydov's ideas. Among the results obtained are the development of the ability to think Mathematics according to the framework of this science and signs of qualitative changes in the development of theoretical thinking regarding the concept of linear transformation.

Keywords: *Developmental teaching, Teaching linear algebra, Formation of mathematical concepts, historical-cultural theory, Linear transformation.*

[1] Doutora em Educação: PUC Goiás, Mestre em Matemática: UFG, Professora da Coordenação de Matemática: IFG – Câmpus Goiânia – e-mail: amm.aline@gmail.com.

Introdução

A Álgebra Linear é um campo da Matemática que visa estudar os espaços vetoriais e as transformações lineares entre esses espaços, associando esses conteúdos à teoria matricial. Com a evolução da ciência nos últimos anos, ela se tornou um conhecimento essencial aos matemáticos, engenheiros e outros profissionais que trabalham com tecnologias, estando diretamente relacionada a diversos domínios do conhecimento matemático, como, por exemplo, análise, geometria e equações diferenciais, domínios estes necessários aos cursos de Ciências Exatas e da Terra e Engenharias, tanto nas disciplinas de Matemática quanto nas disciplinas específicas de cada curso. Devido a isso, um lugar significativo nos estudos em Educação Matemática tem sido ocupado pelas pesquisas envolvendo o ensino e a aprendizagem em Álgebra Linear, como as pesquisas desenvolvidas por Cardoso (2014), Dorier (1995; 2002), França (2007), Furtado (2010), Furtado e Cabral (2011) e Oliveira (2005).

Destaca-se a pesquisa empírica qualitativa realizada por Furtado e Cabral (2011) com o intuito de investigar de que forma os conceitos[2] básicos de Álgebra Linear eram assimilados pelos alunos, na qual eles constataram que a maior dificuldade apontada pelos alunos era a abstração presente no curso de Álgebra Linear, com 65% dos participantes da pesquisa apontando isso explicitamente. Apenas 29% disseram que a falta de aplicações era um dificultador. O fato mais surpreendente foi que os alunos não souberam reconhecer uma transformação linear. Esta pesquisa revela um desafio para a organização e a condução do processo de ensino-aprendizagem dessa disciplina, pois, como os alunos não estão se apropriando dos conceitos, eles não desenvolvem processos mentais que levam a uma síntese do objeto algébrico em estudo.

Nas publicações que discutem a formação de conceitos matemáticos na perspectiva da teoria histórico-cultural e na teoria do ensino desenvolvimental, é também recorrente o reconhecimento de que o ensino de Matemática não tem contribuído para a solução de importantes problemas relacionados à aprendizagem, isso porque, segundo essas pesquisas, os métodos de ensino predominantes são baseados na lógica formal de ensino, não promovendo a formação do pensamento teórico dos alunos.

Diante desse contexto, esta pesquisa surge como uma possibilidade metodológica para superar os problemas do processo de ensino-aprendizagem da Álgebra Linear,

[2] Para Furtado e Cabral (2011), conceitos são as informações que se espera que o aluno saiba e que são colocadas em uma rede de relações com outras informações já adquiridas.

particularizando-o para o conceito de transformação linear, que é fundamentada na teoria do ensino desenvolvimental de Davydov, a qual consiste em promover, por meio do ensino, o desenvolvimento do pensamento do aluno, colocando-o no patamar do pensamento teórico, de caráter abstrato e generalizante, em que o aluno aprende formando abstrações, generalizações e conceitos, os quais constituem a base do processo de desenvolvimento do pensamento teórico. Nesse sentido, é necessário que o professor organize a atividade de ensino de modo a contribuir para a formação de conceitos na mente do aluno.

Assim, a presente pesquisa foca no problema da formação de conceitos, relacionando o modo de organização do ensino do conceito de transformação linear e a formação do pensamento teórico pelos alunos. Procura-se esclarecer a seguinte questão: que repercussões teriam, no processo de formação de conceitos pelos alunos, o ensino do conceito de transformação linear fundamentado na teoria histórico-cultural, em específico, na teoria do ensino desenvolvimental de Davydov?

Para isso, objetiva-se, de forma geral, compreender e analisar as contribuições e os desafios da teoria do ensino desenvolvimental para o ensino de Álgebra Linear, tendo em vista a aprendizagem do conceito de transformação linear por alunos do curso de Bacharelado em Engenharia Elétrica do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás (IFG) – Câmpus Goiânia. Especificamente, objetiva-se apreender, no decorrer do processo de ensino-aprendizagem do conceito transformação linear, elementos que indiquem mudanças qualitativas e quantitativas no desenvolvimento do pensamento do aluno e demonstrar as peculiaridades da teoria do ensino desenvolvimental para a organização do ensino do conceito transformação linear e sua contribuição para o desenvolvimento intelectual dos alunos.

Para investigar a aprendizagem do conceito transformação linear, realizou-se um experimento didático formativo em conformidade com os princípios da teoria do ensino desenvolvimental, sendo este o método de pesquisa utilizado. O experimento didático é uma intervenção pedagógico-didática, realizada por meio de um plano intencional que busca interferir nas ações mentais dos alunos e provocar mudanças em seus níveis de desenvolvimento mental (DAVYDOV, 1988). Consiste na experimentação teórica e metodológica do processo de ensino-aprendizagem no contexto da sala de aula. No caso desta pesquisa, visou a formação do conceito de transformação linear e foi realizado por um professor colaborador com formação específica em Matemática que ministrava a disciplina de Álgebra Linear no curso de Bacharelado em Engenharia Elétrica do IFG –

Câmpus Goiânia, sendo este o *lócus* da pesquisa. Já os sujeitos da pesquisa são os alunos devidamente matriculados na referida disciplina, que assistiram a, pelo menos, nove das treze aulas constitutivas do experimento, resultando em um total de 14 alunos, aqui chamados de A1, A2, ..., A14.

O plano de ensino sobre o conceito de transformação linear utilizado no experimento didático foi organizado com a participação do professor colaborador, com base nas orientações propostas por Davydov (1988) para a realização das aulas. Para a coleta de dados, recorreu-se à observação, à gravação das aulas em áudio e vídeo e às atividades realizadas pelos alunos.

A análise focou no processo de formação de conceitos e as categorias de análise foram organizadas a partir das ações de aprendizagem de Davydov (1988): transformação dos dados da tarefa na condução da identificação do princípio geral do conceito de transformação linear; da modelação à transformação de um modelo para o conceito de transformação linear; o uso do conceito de transformação linear como ferramenta mental. Além da apropriação e da interiorização do conceito de transformação linear por parte dos alunos, buscou-se, também, oferecer uma análise com elementos que auxiliassem na compreensão das fragilidades do ensino desse conceito e fornecer elementos que servissem como referência aos professores de Álgebra Linear que buscarem promover uma melhor aprendizagem de seus alunos, particularmente a aprendizagem do conceito de transformação linear.

Para uma melhor organização do texto, inicia-se discutindo os pressupostos da teoria de Davydov que contribuíram para a realização do experimento didático formativo e para a análise dos dados. Em seguida, fazemos algumas considerações acerca da pesquisa.

A teoria do ensino desenvolvimental de Davydov

Vasili Vasilievich Davydov (1930-1998) foi um psicólogo russo pertencente à terceira geração dos seguidores de Vygotsky. Seus estudos versam sobre os modos de ensinar e aprender a partir dos escritos deste autor, apresentando importantes contribuições para repensar a aprendizagem conceitual, a partir da apropriação dos conhecimentos científicos. Assim, concebe o ensino como a forma universal de mediação cultural para o desenvolvimento humano. Para tanto, a organização do ensino é o desafio colocado para o professor, que precisa organizá-lo de forma intencional e sistematizada para que ocorra a aprendizagem por meio da formação de conceitos teóricos (DAVYDOV, 1988).

Nessa perspectiva, Davydov (1988) formulou uma explicação teórica para a atividade de estudo, propondo um modo de organização do ensino voltado para o desenvolvimento intelectual do aluno, no qual o conteúdo da atividade de estudo é o pensamento teórico ou conceito. Por meio da atividade de estudo, o aluno pode apropriar-se do desenvolvimento histórico de um objeto, interferindo em sua forma de ver e lidar com ele. Nela, o pensamento do aluno deve ser semelhante ao pensamento dos cientistas "que expõem os resultados de suas investigações por meio das abstrações, generalizações, e conceitos teóricos substantivas (...)" (DAVYDOV, 1988, p. 166). Assim, para que o aluno realize uma tarefa de estudo, ele precisa cumprir determinadas ações de aprendizagem, as quais são:

> - transformação dos dados da tarefa a fim de revelar a relação universal do objeto estudado;
> - modelação da relação diferenciada em forma objetivada, gráfica ou por meio de letras;
> - transformação do modelo da relação para estudar suas propriedades em "forma pura";
> - construção do sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento geral;
> - controle da realização das ações anteriores;
> - avaliação da assimilação do procedimento geral como resultado da solução da tarefa de aprendizagem dada. (DAVYDOV, 1988, p. 173, destaques do autor)

Em síntese, a atividade de estudo dos alunos se desenvolve por meio de tarefas e estas por meio de ações de aprendizagem organizadas com a finalidade de solucionar os problemas propostos na tarefa. Para o autor, um problema é uma questão que desafie o aluno a pensar nela, que o instigue a querer apreender os procedimentos ali contidos, podendo ser em forma de situações-problema que envolvam uma aplicação direta do conteúdo ou de exercícios teóricos que visem a utilização do conceito. Sobre o pensamento teórico ou conceito, Davydov (1988, p. 127-128) afirma que:

> O pensamento teórico é o processo de idealização de um dos aspectos da atividade objetal-prática, a reprodução, nela das formas universais das coisas. Tal reprodução tem lugar na atividade laboral das pessoas como experimentação objetal sensorial peculiar. Depois, (...) adquire cada vez mais um caráter cognoscitivo, permitindo às pessoas passar, com o tempo, aos experimentos realizados mentalmente. (...) Ter um conceito sobre um objeto significa saber reproduzir mentalmente seu conteúdo, construí-lo. A ação mental de construção e transformação do objeto constitui o ato de sua compreensão e explicação, a descoberta de sua essência.

O processo de construção do pensamento teórico está intrinsecamente relacionado com o desenvolvimento intelectual do aluno, sendo que, para formar o conceito, é necessário intervir em sua zona de desenvolvimento proximal para que ela se torne um nível de desenvolvimento real (VYGOTSKI, 1991). Para o autor, o nível de desenvolvimento real é constituído pelas funções mentais que se consolidaram como resultados de ciclos de desenvolvimento já completados. Há ainda o nível de desenvolvimento potencial que é evidenciado pelas situações que podem ser apropriadas pelo aluno por meio da mediação do professor. Já a zona de desenvolvimento proximal é a distância entre o nível de desenvolvimento real e o nível de desenvolvimento potencial. Nela estão presentes as funções mentais que ainda não amadureceram, mas que poderão amadurecer e tornarem-se o nível de desenvolvimento real (VYGOTSKI, 1991).

O conteúdo do ensino é o conhecimento teórico científico mediado pela ciência e pelo professor que organiza o ensino, propondo tarefas, as quais constituem a atividade de estudo, que conduzem os alunos à busca das conclusões científicas obtidas com a investigação do objeto e guiadas pelo movimento do abstrato (geral) ao concreto (particular). Aqui, a mediação é vista como o processo que resulta da intervenção de um elemento em uma relação, logo, considera-se que a mediação pedagógica realizada pelo professor no processo de ensino-aprendizagem, é a mediação por signos descrita por Vygotski (1991). Essa mediação por signos, segundo o autor, acontece por meio da interação sociocultural dos indivíduos da mesma espécie, principalmente daqueles que são mais experientes e capazes, por meio da utilização de instrumentos que elevam o pensamento, resultando na interiorização, ou seja, na reconstrução interna do objeto de estudo, o qual é externo, enquanto conceito.

Sobre o movimento do abstrato ao concreto, Marx (1974, p. 228) esclarece que:

> (...) O concreto é concreto por ser a síntese de múltiplas determinações, logo, unidade da diversidade. É por isso que ele é para o pensamento um processo de síntese, um resultado, e não um ponto de partida, apesar de ser o verdadeiro ponto de partida e, portanto, igualmente o ponto de partida da observação imediata e da representação. O primeiro passo reduziu a plenitude da representação a uma determinação abstrata; pelo segundo, as determinações abstratas conduzem à reprodução do concreto pela via do pensamento.

Atingir o concreto requer iniciar o processo de ensino-aprendizagem por meio das conexões historicamente construídas do objeto de estudo, conexões simples das quais ele deriva e que devem ser desvendadas em suas objetividades, complexidades e contradições, revelando o movimento do objeto para garantir a apropriação do que lhe é essencial, a saber, o seu nuclear (DAVYDOV, 1988). Desse modo, a formação do conceito científico resulta em um processo pelo qual a zona de desenvolvimento proximal deve passar para se tornar um nível de desenvolvimento real, processo este que se inicia com a obtenção da relação universal do objeto, a primeira ação de aprendizagem de Davydov.

Com o desvelar do nuclear do objeto, surge a formação do conceito como resultado mental da reunião das abstrações, em que atinge-se o concreto partindo do abstrato, formando o conhecimento teórico, que é a combinação unificada da abstração inicial, da generalização e dos conceitos teóricos (DAVYDOV, 1988). Com o conceito formado, o aluno se apropria de uma ferramenta mental que lhe possibilita pensar cientificamente, sendo capaz de deduzir e explicar as manifestações particulares e singulares da base universal do conceito, construindo o seu sistema de conceitos conforme descreve Vigotski (2001, p. 294):

> Por isso o conceito científico pressupõe necessariamente outra relação com objetos, só possível no conceito, e esta outra relação com o objeto, contida no conceito científico, por sua vez pressupõe necessariamente a existência de relações entre os conceitos, ou seja, um sistema de conceitos. Desse ponto de vista, poderíamos dizer que todo conceito deve ser tomado em conjunto com todo o sistema de suas relações de generalidade, sistema esse que determina a medida de generalidade própria desse conceito.

É por meio da formação de conceitos que se pode pensar teoricamente e formar novos conceitos, construindo, assim, um sistema de conceitos científicos com o qual o aluno adquire uma consciência teórica que lhe permite pensar teoricamente e desenvolver-se integralmente (social, cultural e historicamente).

A análise dos dados

Visando compreender o processo de formação do pensamento teórico nos alunos, realizou-se uma análise dos dados empíricos do experimento didático formativo em três categorias, estabelecidas a partir das ações de aprendizagem de Davydov (1988), quais sejam: transformação dos dados da tarefa na condução da identificação do princípio geral do conceito de transformação linear; da modelação à transformação de um modelo para o conceito de transformação linear; o uso do conceito de transformação linear como ferramenta mental. Com estas categorias, objetivou-se identificar momentos que indicassem indícios do movimento do pensamento do abstrato ao concreto e do uso do conceito de transformação linear como instrumento do pensamento. Para identificar os níveis de organização do pensamento e as ações que impulsionam o desenvolvimento psíquico dos alunos, considerou-se os seguintes conceitos: zona de desenvolvimento proximal, mediação, formação de conceitos e pensamento teórico.

Transformação dos dados da tarefa a fim de revelar a relação universal do conceito de transformação linear

Na categoria "transformação dos dados da tarefa a fim de revelar a relação universal do conceito de transformação linear", relacionou-se os momentos da aula que correspondiam ao movimento lógico-histórico do conceito de transformação linear e as tarefas que visavam levantar o universal do conceito. A apresentação e discussão do movimento lógico-histórico do conceito foi o recurso utilizado para conduzir o aluno à descoberta do desejo e da necessidade por aprender o conceito, pois como Davydov (1988, p. 29) afirma, "A atividade do sujeito está sempre associada a certa necessidade" e esta vem do desejo por realizar a atividade. Nesse momento, discutiu-se a gênese e o desenvolvimento do conceito, culminando com a apresentação de situações práticas da atualidade nas quais são utilizadas transformações lineares, como fazer uma ligação telefônica, ouvir música em dispositivos eletrônicos e enviar mensagens via WhatsApp. Esses fatos geraram nos alunos curiosidade em saber o que era uma transformação linear, consequentemente, o desejo e a necessidade de saber o que era o conceito, afinal, "a necessidade da atividade de aprendizagem estimula [os alunos] (...) a assimilarem os conhecimentos teóricos" (DAVYDOV, 1988, p. 170). Ressalta-se que, ao discutir o lógico-histórico, não foi apresentado aos alunos a definição formulada por seu criador, detendo-se aos aspectos de sua criação e desenvolvimento.

Com os alunos já envolvidos no processo de ensino-aprendizagem, propôs-se uma tarefa constituída de problemas que envolviam o conceito e que, por meio da análise das questões de cada problema, permitiriam que os alunos chegassem às relações universais do conceito, ou seja, eles já estariam resolvendo problemas que utilizam o conceito de transformação linear sem saber o que é o conceito em si, trabalhando apenas com suas propriedades.

Para a resolução da tarefa, os alunos foram divididos em grupos com o intuito de que a aprendizagem se desse do interpessoal para o intrapessoal (VYGOTSKI, 1991). Ao professor coube a função de mediador da formação de novas estruturas cognitivas via a mediação dos signos (VIGOTSKI, 2001), auxiliando os grupos, quando solicitado, na resolução dos problemas.

Durante a mediação do professor, alguns questionamentos surgiram ao constatarem que estavam trabalhando em um ambiente diferente dos que já haviam trabalhado, pois, naquele momento, o domínio não era mais o conjunto dos números reais como sempre viram ao estudar funções. Isso pode ser visto no diálogo entre o professor e o grupo 1, apresentado a seguir, quando os alunos tentavam resolver um problema que envolvia a utilização da aplicação reflexão (reflexão no plano) em um logotipo de uma empresa.

> *A6: Nós não entendemos essa parte aqui da aplicação T. Seria como? $T(x) = -x$? Seria uma função que caracteriza isso aqui?*
> *Professor: Isso, só que você tem que observar em qual universo que você está trabalhando. Como é que são os pontos daí?*
> *A4: Os pontos, como assim os pontos?*
> *A6: Ele está em $\mathbb{R}^2$?*
> *A13: Sim (x, y), $x = -1$ e $y = -1$.*
> *Professor: Está em $\mathbb{R}^2$. Então os pontos são?*
> *A4: (x, y).*
> *Professor: Então é T de?*
> *A6: (x, y).*
> *A4: Ah tá, entendi.*
> *Professor: Aí $T(x, y)$ vai ser o que?*
> *A13: (x, y) .*
> *A6: Pois é, a simetria está só em relação a y, certo? (Faz algumas anotações)*
> *Professor: Pega pontos específicos e vê o que acontece. Pega um ponto aqui e faz a reflexão dele. (Os alunos fazem, graficamente, o que o professor indica.)*
> *A6: O y é o mesmo.*
> *A4: $T(2,1) = (-2, 1)$.*
> *A6: É, o y é igual e o x é o oposto.*
> *A13: $T(x, y) = (-x, y)$.*
> *A6: Isso, $T(x, y) = (-x, y)$.*
> *A4: $T(x, y) = (-x, y)$?*
> *A13: Ah, entendi.*
> *Professor: Mas é só isso que caracteriza uma função? Não está faltando nada não?*

Nota-se que, com a mediação pedagógica do professor, o grupo apreendeu que era necessário situar os pontos do domínio no plano ($\mathbb{R}^2$) e quais são as condições necessárias para isso. Desse modo, eles compreenderam que não estavam mais trabalhando em conjuntos cujos elementos possuem apenas uma entrada, mas em espaços vetoriais. Em seguida, ao conseguirem formalizar a aplicação solicitada escrevendo-a de acordo com as normas matemáticas, viu-se que os alunos conseguiram ampliar o seu pensamento, desvinculando-o das funções de uma variável. Pôde-se observar também o início da constituição do sistema de conceitos (VIGOTSKI, 2001) dos alunos, relacionando o conceito de função ao de espaço vetorial rumo à conceptualização de transformação linear. Em todo esse diálogo, o professor recorreu à mediação pedagógica para conduzir os alunos à mediação pelos signos que os fizessem recordar os elementos que constituem uma função (a lei de formação, que eles acabaram de formular, o domínio e o contradomínio) e da escrita formalmente aceita pela Matemática.

As dificuldades enfrentadas pelo grupo 1 foram recorrentes para os demais grupos. Os alunos reconheciam que não estavam mais lidando com funções reais, mas transpor a escrita para um conjunto com mais de uma dimensão era o entrave a ser superado. Eles falavam corretamente como era a aplicação e conseguiam explicar o que estavam pensando, porém não conseguiam escrever sozinhos a aplicação, necessitando da mediação do professor para estabelecer a formalização da aplicação e a criação de novas conexões conceituais. Esta mediação do professor, dada por meio de perguntas, provocou processos reflexivos nos alunos que conduziram ao desvelamento das condições da atividade. Entretanto, não é possível afirmar que isso se deu em todos os alunos, mas o desvelamento das condições da atividade, se não adquiridas nesta tarefa, podem ser adquiridas na continuidade da atividade de estudo ou em momentos posteriores. Também não se pode afirmar que todos os alunos estão desenvolvendo as características do pensamento teórico.

Com a primeira tarefa finalizada, solicitou-se que cada aluno, individualmente, levantasse as propriedades comuns a todos os problemas que eles haviam respondido na Tarefa 1. O aluno A4 explicou assim sua resposta: “As condições que eu acho que foram satisfeitas são: que a imagem da soma de vetores é igual a soma da imagens de cada vetor e que a imagem de um produto escalar é o produto escalar pela imagem do vetor. Eu vi que em todas as questões essas condições eram satisfeitas”. Nota-se que A4 expressa claramente as propriedades necessárias para que uma transformação seja linear, entretanto, sua abstração foi parcial, pois ele não especificou como eram os conjuntos utilizados nas questões, a saber, espaços vetoriais, estando esta ideia implícita ao dizer que está trabalhando com vetores. Aqui, o núcleo do conceito de transformação linear está quase formado, faltando apenas a especificação dos conjuntos.

A partir da resposta de A4, o professor questionou a turma sobre os aspectos levantados, fazendo a mediação cognitiva da turma. Assim, percebeu-se que o processo de abstração está em desenvolvimento em vários alunos que estão prestes à chegar à síntese do nuclear do conceito, pois vários deles concordaram com A4 e, outros ainda, conseguiram expor uma generalização dos conjuntos. Apesar de não dizerem claramente que eram espaços vetoriais, conseguiram dizer as características desses conjuntos. Sobre o processo de síntese, Davydov (1988, p. 148) ressalta que "(...) a recriação do concreto está ligada, no fundamental, ao processo de síntese, ainda que dentro deste se produza permanentemente a análise a fim de se obter as abstrações indispensáveis. A atividade de síntese se provê a si mesma das abstrações de que necessita".

Quanto à ação do professor, este percebeu que alguns alunos ainda estavam presos às situações particulares dos problemas. Então, ele solicitou que a turma falasse das características de forma generalizada, independente das situações particulares das quais foram retiradas, procedendo o seguinte diálogo:

> *A4: Domínio, contradomínio e imagem.*
> *Professor: Que tem que ser o que?*
> *A14: Espaços vetoriais.*
> *Professor: E tem que satisfazer o que?*
> *A14: As propriedades.*
> *Professor: Quais?*
> *A4: Associativa, comutativa...*
> *A14: Associatividade, comutatividade...*
> *Professor: Mas essas aí já estão embutidas em espaços vetoriais. Quais são as outras? Está escrito no quadro.*
> *A4: A soma dos...*
> *Professor: Em termos matemáticos eu escrevo como?*
> *A4 e A14 (falando simultaneamente):* $F(a+b) = F(a) + F(b)$.
> *A14:* $F(\alpha a) = \alpha F(a)$.
> *Professor: Mais alguma coisa? Está faltando algo?*
> *A14: Não.*
> *Professor: A imagem, geralmente aparece naturalmente. Como que vai aparecer a imagem em uma função?*
> *A4: Pela lei.*
> *Professor: Então eu posso trocar a imagem por alguma coisa?*
> *A4: Você pode acrescentar.*
> *Professor: Posso acrescentar?*
> *A4: Sim.*
> *Professor: Então estou escrevendo o que A4 falou, a lei de formação.*

Nesse diálogo, vê-se que os alunos conseguiram identificar e abstrair as relações universais dos problemas da Tarefa 1, desvinculando-se das situações particulares. Entretanto, nenhum grupo realizou o processo completo de abstração, sempre faltou algum detalhe em cada grupo. Como se vê no diálogo acima, as relações universais foram construídas com o auxílio mútuo dos grupos, cada um contribuindo de acordo com o que havia pensado. Entretanto, é inegável que algum aluno possa ter atingido, individualmente, a completude da relação universal, mas não é possível afirmar isso neste momento. O que se pode dizer é que aqueles que ainda não conseguiram concluir esse processo, ainda o podem concluir durante o desenvolvimento da atividade de estudo.

Esse processo é de suma importância para a obtenção do pensamento teórico, pois constitui a primeira etapa do desenvolvimento do pensamento, a qual dará significado às ações futuras. Essas relações levantadas já possuem um caráter de síntese conforme diz Davydov (1988), necessitando serem trabalhadas, agora, por meio de um modelo matemático que estruture o conceito de acordo com as normas e o pensamento matemático.

Da modelação à transformação de um modelo para o conceito de transformação linear

A ação de aprendizagem (DAVYDOV, 1988) denominada modelação e a transformação desse modelo para estudar o conceito em sua "forma pura" formam a segunda categoria a ser analisada: "da modelação à transformação de um modelo para o conceito de transformação linear". Para que um modelo seja considerado um "modelo de aprendizagem", ele precisa estabelecer a relação universal do objeto de estudo. Para isso, solicitou-se aos alunos a construção de um modelo literal (ou textual ou linguístico) que refletisse o aspecto nuclear do conceito de transformação linear. Esse tipo de modelo foi escolhido com o intuito de auxiliar a desenvolver nos alunos a habilidade de escrever textos matemáticos conforme as normas da linguagem matemática, mundialmente aceitas.

Guiados por esses pressupostos, cada grupo criou um modelo para o conceito de transformação linear. Em uma totalidade, todas as relações internas do objeto foram apresentadas nos modelos, mas não em um único deles, pois em todos eles faltou uma ou outra relação universal. Esse fato mostra que cada grupo tem o seu ritmo próprio de formação do conceito.

O grupo 1 (Figura 1) foi o que apresentou um maior nível de abstração, uma vez que o modelo por eles construído contempla o maior número de características do nuclear do objeto: a transformação linear F e as propriedades que ela deve satisfazer, contando com a especificação da localização dos elementos aplicados na transformação F, faltou apenas mencionar que os conjuntos são espaços vetoriais.

Figura 1 – Modelo criado pelo grupo 1

$$F: U \to V$$
$$\{F(a+b) = F(a) + F(b) \mid a, b \in U\}$$
$$\{F(\alpha b) = \alpha F(b) \mid \alpha \in \mathbb{R} ; b \in U\}$$

Fonte: Obtida pela autora durante o experimento didático formativo.

Na Figura 2, tem-se o modelo criado pelo grupo 2. Nele há a generalização do conteúdo quando expressam o domínio e o contradomínio como espaços vetoriais quaisquer. Entretanto, ainda não abstraíram as propriedades que a transformação linear deve satisfazer, comprovando que os componentes do grupo ainda não conseguiram estabelecer as relações universais do objeto.

Figura 2 – Modelo criado pelo grupo 2

Sendo $f: U \to V$, tal que U e V são espaços vetoriais, é possível concluir que existirá α, β escalares e A, B, C, D pontos de U, tal que se:

$$\alpha(F(A) + F(B) = \beta(F(C) + F(D))$$

implicará que:

$$\alpha A + \alpha B = \beta C + \beta A$$

Será uma transformação linear.

Fonte: Obtida pela autora durante o experimento didático formativo.

Por meio modelo criado pelo grupo 3, percebe-se que o processo de abstração do grupo está ainda longe de ser finalizado, uma vez que os alunos não conseguiram extrair as relações gerais dos casos particulares, como vê-se na Figura 3.

Figura 3 – Modelo criado pelo grupo 3

Transformações Lineares são formas de determinar funções que satisfaçam as condições de um vetor: domínio, contradomínio e imagem.

$$F(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

Para k uma constante, $k \in \mathbb{R}$ e x um vetor

$F(x_1) + F(x_2)$ ou $kF(x)$ tal que:

$F(x_1) + F(x_2) = F(x_1 + x_2)$ e $kF(x) = F(kx)$

$F(Kx) = g(y)$ e $F(x_1 + x_2) = h(z)$

$g(y) = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \;\; \forall y \in \mathbb{R}^n \quad h(z) = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \;\; \forall z \in \mathbb{R}^n$

Fonte: Obtida pela autora durante o experimento didático formativo.

Neste modelo há alguns equívocos conceituais: o grupo escreve que transformações lineares são “formas” para determinar funções, porém escreve uma transformação linear utilizando a notação de função, contradizendo o que haviam escrito, e também há equívocos quanto aos conceitos de vetor e de espaço vetorial, pois a expressão “condições de um vetor” não condiz com a situação em estudo, visto que vetores são os elementos dos espaços vetoriais e não possuem “condições”, quem possui tais condições são os espaços vetoriais. Tais condições são chamadas de condições de existência ou axiomas de um espaço vetorial e necessitam ser satisfeitas para que um conjunto seja considerado como um espaço vetorial. Nota-se também que não houve uma generalização completa do conteúdo, pois o grupo especifica o domínio e o contradomínio da função $f(x)$ como sendo o conjunto $\mathbb{R}^n$ e não um espaço vetorial qualquer, como deve ser na relação universal. Em relação às propriedades que uma transformação deve satisfazer para ser linear, o grupo as representa corretamente, porém, cria outras que não condizem com as relações particulares anteriormente levantadas.

O grupo 4 apresentou um modelo (Figura 4) cujo texto mostra que a linguagem matemática deles não está bem desenvolvida, uma vez que não escrevem o conceito em conformidade com a escrita matemática. Além disso, não conseguiram desvelar totalmente a relação universal do conceito, pois não apresentam os conjuntos que determinam o domínio e o contradomínio da transformação, a saber, espaços vetoriais quaisquer, nem as condições a serem satisfeitas. Eles têm consciência de que a transformação linear deve possuir uma lei de formação, mas a expressam como sendo uma “relação entre seus elementos” e ainda dizem que essa lei deve obedecer às propriedades dos espaços vetoriais, apresentando um pensamento confuso e demonstram que não conseguiram realizar a abstração necessária.

Figura 4 – Modelo criado pelo grupo 4

Dada uma função $f(x, y, z, \ldots, n)$, entende-se por transformação linear a relação entre seus elementos respeitando uma lei de formação que obedeça as propriedades dos espaços vetoriais com domínio, contradomínio, imagem contidos em espaços vetoriais.

Fonte: Obtida pela autora durante o experimento didático formativo.

Nota-se, em todos os modelos apresentados, o reconhecimento da necessidade de trabalhar com uma transformação dentro de espaços vetoriais e satisfazer algumas condições, mesmo nenhum grupo tendo apresentado isso completamente. Apesar disso, observa-se que alguns alunos estão estabelecendo as conexões necessárias à formação do conceito, mesmo que bem sucintas.

Após a escrita dos modelos e a apresentação comparativa[3] de cada um perante a turma, o professor iniciou uma discussão visando mediar a compreensão dos alunos em relação à transformação dos modelos apresentados em um outro modelo, também literal, que contenha todas as relações universais do objeto de estudo e, assim, represente o nuclear do conceito de transformação linear. Após a análise dos modelos e a identificação dos pontos em comuns entre eles, o professor utilizou o modelo do grupo 1, o qual estava mais generalizado em termos de conteúdo, para estruturar, com o auxílio dos alunos, o novo modelo, conforme mostra a fala abaixo:

> *Professor: Então, o conceito vocês disseram e está bem escrito aqui. O grupo 1 falou corretamente, faltou uma e outra palavrinha pra ficar tudo correto, então vamos usar o deles para escrever aqui.*

Observa-se nessa fala do professor, uma preocupação em valorizar a atividade e o desenvolvimento dos alunos, além da intenção de despertar neles uma visão crítica que confronte o modelo criado por seu grupo com os dos demais grupos e com o novo modelo que está prestes a ser "criado" a partir dos modelos apresentados. Em seguida, o professor conduz os alunos, por meio de uma mediação pedagógica e cognitiva, na transformação do modelo, mostrando-lhes como escrever um conceito em conformidade com as normas da escrita matemática, visando que ele seja aceito como um modelo matemático. O modelo transformado pela turma com o auxílio do professor pode ser visto na Figura 5.

Figura 5 – Modelo transformado pelos alunos com o auxílio do professor

Sejam U e V espaços vetoriais. Uma transformação linear é uma aplicação $T: U \to V$ tal que,
$i)$ $T(u+v) = T(u) + T(v), \forall\, u, v \in U$,
$ii)$ $T(\alpha u) = \alpha T(u), \forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ u \in U$.

Fonte: Obtida pela autora durante o experimento didático formativo.

Mesmo com o professor escrevendo a relação universal no quadro negro, ele não a construiu sozinho, os alunos o conduziram no processo de escrita; com isso, ele pôde ensinar aos alunos como escrever um princípio geral de acordo com as normas da linguagem matemática e com o uso de uma simbologia adequada. Desta forma, chegou-

[3] Cada grupo apresentava o seu modelo e o comparava com os que já haviam sido apresentados, levantando o que havia em comum e as diferenças entre eles.

se à abstração das relações particulares e identificou-se o nuclear do conceito de transformação linear. Obviamente, o processo de abstração não foi total em todos os alunos, mas ainda há a possibilidade de completá-lo no decorrer das demais ações de aprendizagem, visto que o desenvolvimento cognitivo não é linear nem ocorre simultaneamente nos alunos, pois cada um tem o seu próprio ritmo de aprendizagem.

O uso do conceito de transformação linear como ferramenta mental

Obtido o modelo final para o conceito de transformação linear, passa-se à execução das próximas ações de aprendizagem expressas por Davydov (1988): resolução do sistema de tarefas particulares, utilizando o conceito teórico de transformação linear e controle da realização das ações anteriores e avaliação da assimilação do conceito de transformação linear como um procedimento geral. Além dessas ações, executou-se também uma verificação da aprendizagem por parte do professor. Todas essas ações constituem a terceira e última categoria de análise: o uso do conceito de transformação linear como ferramenta mental.

Nessa categoria será analisada a capacidade do aluno de utilizar o conceito de transformação linear como instrumento do pensamento para resolver problemas, pois, segundo Davydov (1988), um conceito é tanto o reflexo mental do objeto de estudo quanto o meio de reprodução mental desse objeto, ou seja, o conceito é uma forma de atividade mental pela qual o objeto de estudo, que agora está refletido em seu intelecto, é reproduzido junto com o seu sistema de relações.

Desta forma, o aluno utiliza um conceito como ferramenta mental quando o utiliza como meio para pensar nas situações que lhe são propostas, sejam elas direcionadas a conteúdos científicos ou a situações cotidianas. Nesse momento, segundo Davydov (1988), o pensamento lida com as abstrações transformadas em concreto pensado com o intuito de agir nas situações particulares de aplicação do conceito, ocorrendo o movimento do geral para o particular. E, em se tratando do conceito de transformação linear, isso significa utilizá-lo para pensar nos problemas que são propostos em forma de tarefas e que desafiem os alunos a pensarem teoricamente utilizando esse conceito.

Nas tarefas que visavam verificar se os alunos conseguiam utilizar o conceito de transformação linear, foi proposto uma questão que continha várias aplicações e solicitado que os alunos identificassem, justificando, se elas eram lineares ou não. O aluno A4 dá a seguinte resposta para a aplicação $C: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $C(x, y) = (xy, y)$:

Figura 6 – Resposta de A4 utilizando a prova por contraexemplo

Não é linear.
$C(1,1) + C(2,2) = (1,1) + (4,2) = (5,3)$
$C(1 + 2,1 + 2) = C(3,3) = (9,3)$

Fonte: Obtida pela autora durante o experimento didático formativo.

Vê-se que este aluno recorre ao conceito para resolver a questão e ainda utiliza uma demonstração por contraexemplo, mostrando que ele compreende o pensamento matemático no que tange às formas de demonstração/verificação de resultados. Ele exibe dois pontos do plano que não satisfazem a propriedade da soma contida no princípio geral do conceito, mostrando que esta condição não é satisfeita, logo, não tem como a aplicação ser linear.

A partir da resposta de A4 no quadro negro, o professor, almejando despertar a reflexão nos alunos, iniciou o seguinte diálogo:

> *Professor: Alguém discorda? Alguém fez diferente?*
> *A8: Eu fiz com (a, b) mesmo, mas pode ser do jeito dele.*
> *Professor: Por que fazer com (a, b) não é bom?(Sem obter resposta o professor continua) Porque podem ter (a, b) que funcionem. Querem ver?*
> *Professor escreve no quadro a expressão $C(a + x, b + y) = ((a + x)(b + y), b + y)$ e diz:*
> *Professor: Se x e y forem zero, a expressão não vai dar certo?*
> *A8: Vai, mas é um caso particular, você tem que ver para todos.*
> *Professor: Pois é. Isso!*
> *A8: Mas já está para todos aí. Se ele não obedece pra um não vai obedecer para os outros.*
> *Professor: Mas mostrar que não obedece para um é fazer isso (apontando para a resolução de A4).*
> *A8: Então, também. O que eu falo é que se eles não fossem zero não iria acontecer isso. Já é mais generalizado.*
> *Professor: Mas quando você escreve assim, você não está provando que não vale. Você escreveu uma equação que pode valer ou não.*
> *A8: Pode, mas ainda vai depender. É isso que eu estou falando. Se não forem zero aí vai.*
> *A4: Mas não vai ser uma resposta satisfatória.*
> *Professor: É!*
> *A13: Quando você mostra o contraexemplo você já está provando.*
> *A8: Já.*
> *Professor: Mas você entendeu?*
> *A8: É, mas eu prefiro do meu jeito.*

Este diálogo mostra que A8 ainda não possui um pensamento matemático que lhe possibilite compreender os processos demonstrativos por completo. Nota-se que os cálculos são bem compreendidos por ele, mas falta-lhe significado. Isso mostra que provar por contraexemplo ainda não é um procedimento concreto do seu pensamento, o que nos conduz a ver que a lógica formal, que é predominante no ensino de Matemática, não tem sido eficaz no processo de ensino-aprendizagem e não contribui para desenvolver o modo de pensar a Matemática. Vê-se também, no diálogo acima, que, apesar da dificuldade com a prova por contraexemplo, A8 compreende e opera com o conceito de transformação linear, apresentando indícios de ter desenvolvido o pensamento teórico em relação ao conceito formado.

Objetivando a realização das ações de controle e avaliação descritas por Davydov (1988), propôs-se uma questão que relacionava Álgebra e Geometria, que continha alguns gráficos de aplicações lineares e não lineares, inserindo, assim, um novo aspecto a ser analisado, pois, como diz Davydov (1988, p. 176), "Para executar as ações de monitoramento [controle] e avaliação, a atenção [dos alunos] deve ser dirigida ao conteúdo das próprias ações e ao exame dos seus fundamentos, do ponto de vista da correspondência com o resultado exigido pela tarefa". Além desse objetivo, esta questão procurava elucidar a seguinte propriedade das transformações lineares: se uma aplicação $T: U \to V$ é linear, então $T(0_U) = O_V$.

Após a disponibilização de um momento para os alunos responderem à questão, passou-se à discussão dela. Quando questionados sobre o que havia em comum aos gráficos das transformações lineares, item (a) da questão, todos os alunos concordaram que é o fato de que todos eles passam pela origem do plano e, quanto às que não são lineares, item (b) da questão, eles responderam que por não ser linear, não passam na origem. Entretanto, esta última afirmação não é correta e pode conduzir os alunos a um equívoco conceitual, pois interfere na formação de outros conceitos, carecendo, assim, de uma intervenção mediadora do professor para fazê-los perceber este erro. Desse modo, o professor deu início a um diálogo visando à percepção de tal fato e à construção de uma conjectura correta.

> *Professor: Mas será que isso é sempre verdade?*
> *A8: Só para função afim, nesse caso.*
> *Professor: Só para função afim?*
> *A8: Sim, porque não dá para garantir para todas. Eu acho que até quadrática vai.*
> *Professor: Então você acha que toda função quadrática não linear não passa pela origem?*

A8: Sim.
Professor: É?
A8: Sim.
Professor: Vamos escrever uma função quadrática. (o professor escreve no quadro a função real $f(x) = x^2$) e pergunta: Passa na origem?
A4: Passa.

Visto que apenas o aluno A4 apresentou uma resposta ao último questionamento do professor, este deixa o item (b) em aberto e passa para a discussão do item (c) da mesma questão, estimulando a reflexão nos alunos, pois é por meio da reflexão que "(...) o homem examina permanentemente os fundamentos de suas próprias ações mentais e com eles medeia uma com outras, desentranhando assim suas inter-relações internas" (DAVYDOV, 1988, p. 156).

O item (c) solicitava a aplicação das respostas dos itens (a) e (b) nos itens de outra questão que continha várias aplicações, algumas lineares, outras não, de acordo com a sua classificação. Depois questionava qual conclusão era possível obter. Entretanto, nenhum aluno respondeu por completo a este item, mesmo tendo respondido aos itens anteriores de forma correta ou não, consequentemente, eles tinham argumentos necessários para dar uma resposta a este item, seja ela certa ou errada. Isso mostra a dificuldade dos alunos em transpor a fala para a linguagem escrita, pois nos itens (a) e (b) bastava falar o que se via, agora era necessário verificar se o que foi concluído nos itens anteriores era satisfeito em outros casos, necessitando de alguns cálculos algébricos. Sobre esta dificuldade, Vigotski (2001, p. 318) diz que

> Os signos da linguagem escrita e o seu emprego são assimilados [pelos alunos] (...) de modo consciente e arbitrário, ao contrário do emprego e da assimilação inconscientes de todo o aspecto sonoro da fala. A escrita leva [os alunos] (...) a agir de modo mais intelectual (...) a ter mais consciência do próprio processo da fala. Os motivos da escrita são mais abstratos, mais intelectualísticos e mais distantes do emprego. (...) Ela [a escrita] é uma álgebra da fala, uma forma mais difícil e complexa de linguagem intencional e consciente. Esta conclusão (...) nos explica por que o aluno escolar apresenta tamanha divergência entre a sua linguagem falada e a linguagem escrita; essa divergência é determinada e medida pela divergência de níveis de desenvolvimento da atividade espontânea, não arbitrária e inconsciente, por um lado, e da atividade abstrata, arbitrária e consciente, por outro (...).

Insistindo em promover a reflexão e conduzir os alunos à generalização do conteúdo e à obtenção de uma resposta para o item (b), o professor volta a questionar qual é a conclusão possível de se obter a partir dos itens (a) e (b). Surge, então, o diálogo:

A14: Se ela for linear ela passa pela origem.
Professor: Eu vou escrever isso.

A14: E se ela passar pela origem...
A2: Não implica ser linear.
Professor: Como que você concluiu essa segunda parte?
A14: A partir...
A2: Da demonstração da função quadrática aí (se referindo à função $f(x) = x^2$ que o professor deixou no quadro).
Professor: Então já deu um passo bom aqui, você percebeu que essa função não é linear mesmo passando pela origem.

Tem-se aqui que A14 e A2 se apropriaram das falas do diálogo entre A8 e o professor, descrito anteriormente, sobre o item (b) para formular sua resposta, ocorrendo, assim, a aprendizagem que parte do interpessoal e vai para o intrapessoal, conforme Vygostki (1991) descreve. Nesta situação, a mediação do professor impulsionou a mediação dos signos no plano mental dos alunos, desenvolvendo as funções psicológicas superiores que auxiliaram na obtenção da resposta. Segundo Vigotski (2001), nesse momento, ocorreu o amadurecimento das funções psicológicas superiores relacionadas à escrita. Os alunos utilizaram o conceito de transformação linear e outros já formados em seu intelecto, como o de função, para dar uma resposta à questão que exigia um pensamento mais complexo do que o que estava sendo desenvolvido. Têm-se, assim, indícios de pensamento teórico nos alunos A2 e A14.

O último item desta questão, item (d), pedia para provar que o resultado do item (a) era válido para qualquer transformação linear, isso é a conclusão solicitada no item (c), generalizando o resultado do item (a). Com isso, os alunos deveriam criar uma conjectura e verificar sua veracidade por meio da formalização matemática e com o uso do conceito de transformação linear. Como ninguém havia respondido ao item (c), consequentemente, não havia respondido ao item (d). Então o professor iniciou uma mediação via uma discussão sobre como escrever uma conjectura de acordo com as normas matemáticas.

Professor: Passar pela origem é o que para uma função?
A4: Coeficiente angular ser igual a zero.
Professor: Se ela for uma função afim. E uma qualquer?
A7: x e y é zero.
Professor: Que em outras palavras, considerando a função $f(x) = y$, o que significa passar na origem?
A2: Os dois elementos serem zero.
Professor: É o que ele falou ali, x e y zero é $f(0) = 0$. Então o que é que a gente tem que provar? O zero agora é quem? (se referindo ao zero do espaço vetorial da condição que havia escrito no quadro: $F: U \to V$, transformação linear).
A2: O elemento nulo.
Professor: Então é provar que a imagem do vetor nulo...

A14: É o vetor nulo.
Professor escreve no quadro enquanto alunos falam: $F(0_U) = 0_V$.

Nota-se que a zona de desenvolvimento proximal dos alunos A2, A7 e A14 se desenvolveu no quesito generalização de resultados, pois, para eles, gerar uma conjectura já não é mais algo inacessível. Prosseguindo o diálogo, inicia-se a verificação da conjectura:

Professor: E agora? Tem muitas maneiras.
A14: Pegar uma função qualquer aí.
Professor: A gente quer provar para todas, então uma qualquer não vale.
A8: Generaliza uma função linear e substitui.
Professor: Aí eu provaria para todas as funções lineares, mas ainda assim... Mas ajudaria, fazer os casos particulares ajuda. E se a gente utilizasse as propriedades de espaços vetoriais?
A8: Pode ser também.
Professor: Pode ser?
A8: Pode.
Professor: Vou começar indicando. Quais são as propriedades de transformação linear que a gente tem?
Aluno A2 cita as propriedades e o professor as escreve:$F(a+b) = F(a) + F(b)$ *e* $F(\alpha a) = \alpha F(a)$.
A2: Se α *for zero...*
Professor: Se α *for zero? Vamos tentar?*
A2 fala a resolução e o professor escreve no quadro perguntando a justificativa dos cálculos aos alunos: $F(0 \cdot a) = 0F(a)$, $F(0_U) = 0_V$.
Professor: Então provou não foi?

Aqui, A2 apresenta indícios de pensamento teórico quanto ao conceito de transformação linear, pois o utiliza na criação e verificação da conjectura. Além disso, nota-se que ele possui um raciocínio matemático bem estruturado.

A partir da demonstração dada por A2, o professor questionou se alguém via outra forma de verificar a conjectura, obtendo uma resposta negativa. Então, com o intuito de interferir na zona de desenvolvimento proximal dos alunos, ampliando a visão deles sobre as diferentes formas de pensar em um mesmo problema por meio da utilização de argumentos distintos, o professor apresentou outra forma de provar a questão, utilizando a propriedade de transformação linear relacionada com a soma de vetores, conforme se vê na Figura 7.

Figura 7 – Solução alternativa para o item (d) da questão relacionada à ação de controle

$$F(a+b) = F(a) + F(b), \quad \text{fazendo } a = b = 0_U$$
$$F(0_U + 0_U) = F(0_U) + F(0_U)$$
$$F(0_U) = 2F(0_U)$$
$$0_V = 2F(0_U) - F(0_U)$$
$$F(0_U) = 0_V$$

Fonte: Obtida pela autora durante o experimento didático formativo.

Formalizar conjecturas, verificar/demonstrar propriedades não é tarefa fácil para os alunos, pois requer um raciocínio matemático muito apurado, com vários conceitos bem formados e estruturados em seu sistema de conceitos. Entretanto, com uma mediação eficaz é possível romper esta barreira e possibilitar aos alunos o desenvolvimento necessário do pensamento para que eles consigam fazer as demonstrações com mais facilidade.

Este fato pode ser comprovado com a resposta de A8, o aluno que apresentava dificuldade na demonstração por contraexemplo, para uma questão que solicitava a decisão quanto à função determinante de uma matriz de ordem dois ser ou não linear. Ele utilizou esse tipo de demonstração para mostrar que esta função não era linear, conforme se pode ver na Figura 8.

Figura 8 – Resposta de A8 utilizando a prova por contraexemplo

Assumindo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \alpha = \frac{1}{2}.$ Temos:

$$T(A+B) = \det(A+B) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 7 \end{vmatrix} = -14$$

$$T(A) + T(B) = \det A + \det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -2 + (3-8) = -7$$

Pelo fato de não gozar da propriedade é possível concluir que não será uma função linear.

Fonte: Obtida pela autora durante o experimento didático formativo.

O desenvolvimento mental de A8 dá indícios de apropriação desse modo de pensar a Matemática, uma vez que, anteriormente, ele não concordava com este método de demonstração e agora o utiliza para resolver o problema. Vê-se, também, como destacado anteriormente, indícios de pensamento teórico quanto ao conceito de transformação linear, pois A8 conseguiu utilizá-lo e ainda estabeleceu uma conexão conceitual entre esse conceito e os conceitos de matriz e determinante.

Pensar teoricamente é utilizar o conceito formado por meio de abstrações e generalizações para pensar nos problemas que surgem e que exigem do aluno uma resolução com respaldo científico (DAVYDOV, 1988). Um experimento didático formativo, como esse que foi descrito, não basta para comprovar que um aluno possui um pensamento teórico, mas ele nos dá indícios de tal ato, como se verificou no desenvolvimento das tarefas de estudo. Por isso é possível alegar que alguns alunos tiveram suas zonas de desenvolvimento proximal interferidas no desenvolver deste experimento, com elevação do seu nível, podendo até ter se tornado um nível de desenvolvimento real com respeito a alguns conceitos discutidos, como o de função, espaço vetorial, matriz e determinante. Porém, não se pode afirmar que todos os alunos mostraram indícios de pensamento teórico, visto que alguns apresentam essas características, mas outros não, carecendo estes de mais tempo para o amadurecimento das funções psíquicas que conduzem à utilização do conceito como instrumento do pensamento.

No entanto, em todos os alunos nota-se uma postura diferente frente à forma de ver e de pensar a Álgebra Linear. Para eles, os conceitos inseridos nesta disciplina não estão mais soltos nem desconectados de outros conceitos matemáticos que eles já estudaram e outros que ainda estudarão de modo mais aprofundado, gerando mais significado e sentido no processo de ensino-aprendizagem da disciplina.

Considerações finais

Esta pesquisa objetivou compreender e analisar as contribuições da teoria do ensino desenvolvimental de Davydov para a aprendizagem do conceito de transformação linear por alunos do curso de Bacharelado em Engenharia Elétrica do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás (IFG) – Câmpus Goiânia. Contatou-se uma transformação na forma de o aluno lidar com os conceitos algébricos. Com a observação das aulas, percebeu-se que a concepção inicial deles era de que cada conceito está isolado, não havendo conexões entre os conceitos da disciplina, mesmo quando utilizavam conceitos já estudados, como o de matriz e espaço vetorial para resolver os problemas envolvendo transformações lineares. Com o decorrer das aulas, viu-se que esta concepção foi transformada e que os alunos conseguiram relacionar o conceito de transformação linear com os conceitos de função, matriz, espaço vetorial e determinantes, dentre outros, transformando a sua forma de olhar e pensar a Álgebra Linear, consequentemente, a Matemática, apresentando indícios de formação e desenvolvimento do pensamento matemático nos alunos. Entretanto, não se pode afirmar que todos eles tiveram essa transformação de concepção algébrica, mas boa parte sim, passou a conceber a Álgebra Linear como um conjunto articulado e interdependente de conceitos.

Quanto ao pensamento teórico, notam-se indícios de sua formação e desenvolvimento em relação ao conceito de transformação linear, uma vez que os alunos o utilizaram em situações particulares como uma ferramenta mental, fato que, segundo Davydov (1988), caracteriza tal pensamento. Uma dificuldade enfrentada pelos alunos foi em escrever uma função ou mesmo um conjunto de acordo com as normas da escrita matemática, pois eles necessitaram da mediação do professor para isso. Tal fato resulta das deficiências dos conhecimentos algébricos, advindos de aprendizagens passadas que são pautadas na lógica formal de ensino, as quais não conduziram os alunos ao desenvolvimento de um pensamento matemático teórico.

Os resultados da pesquisa mostraram que, a partir de condições de ensino adequadas e intencionalmente organizadas, pode-se obter o surgimento e o desenvolvimento do pensamento teórico no plano interior das ações mentais. Quando interiorizado pelo aluno, o conceito de transformação linear torna-se uma ferramenta mental para pensar a Álgebra Linear e os conteúdos de outras disciplinas relacionados à área específica do curso e que dependem dele para sua estruturação. As conexões conceituais, instauradas a partir desse conceito, ampliam o campo de atuação do pensamento do aluno e lhe permite ir do geral para o particular, utilizando o conceito para resolver problemas específicos.

Todavia, essa forma de pensar a realidade não é adquirida imediatamente logo após um grupo pequeno de aulas, como no caso deste experimento, mas vai se desenvolvendo à medida que as atividades de estudo visem à formação do pensamento teórico. Por isso, não é possível afirmar que todos os sujeitos desta pesquisa passaram a pensar teoricamente, nem que todos atingiram o mesmo nível de desenvolvimento. Pode-se, sim, afirmar que houve indícios de pensamento teórico quanto ao conceito de transformação linear em boa parte desses sujeitos e que a zona de desenvolvimento proximal de cada aluno sofreu interferências durante todo o experimento didático, com muitos conteúdos passando para o nível de desenvolvimento real.

Um campo de pesquisa que fica em aberto, a partir deste trabalho, é o que visa pensar em atividades de estudos para os desdobramentos do conceito de transformação linear, como suas propriedades, proposições e teoremas, bem como para os demais conteúdos da disciplina Álgebra Linear. Desse modo, seria possível gerar um material didático que sirva de apoio ao professor para a elaboração e a execução de aulas fundamentadas na teoria do ensino desenvolvimental de Davydov.

Em suma, conclui-se que, por meio da teoria do ensino desenvolvimental, é possível conduzir os alunos na formação de conceitos científicos pautados na lógica dialética de ensino, em que esses conceitos são estruturados com consistência e sentido e não isolados como na lógica formal. Assim, esta pesquisa pôde contribuir com um novo olhar sobre a forma de ensinar e aprender a Álgebra Linear, com possibilidades de mudanças na forma tradicional de ensino desta disciplina. Mostrou-se ainda outro caminho exequível de ser seguido pelo professor, pelo qual se desenvolve no aluno uma forma diferente de ver e pensar a Matemática, fazendo surgir o pensamento teórico por meio da formação de conceitos científicos.

Referências

CARDOSO, V. C. *Ensino e aprendizagem de álgebra Linear*: uma discussão acerca de aulas tradicionais, reversas e de vídeos digitais. 2014. 204 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática)-Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2014.

DORIER, J.-L. A general outline of the genesis of vector space theory. *Historia Mathematica*, Genève, v. 22, 1995, p. 227-261.

DORIER, J.-L. *On the teaching of linear algebra*. Mathematics Educations Library, volume 23. New York / Boston / Dordrecht / London / Moscow: Kluwer Academic Publishers, 2002.

FRANÇA, M. V. D. de. *Conceitos fundamentais de álgebra linear*: uma abordagem integrando geometria dinâmica. 2007. 139 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

FURTADO, A. L. *Dificuldades na aprendizagem de conceitos abstratos da álgebra linear*. 2014. 165 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática)-Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.

FURTADO, A. L. C.; CABRAL, M. A. P. Aprendizagem de conceitos da álgebra linear. *In*: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XIII. 2011, Recife. *Anais* [...]. Recife, 2011.

OLIVEIRA, L. C. B. de. *Como funcionam os recursos-meta em aula de álgebra linear?* 2005. 131 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

DAVYDOV, V. V. *Problemas do ensino desenvolvimental*: A experiência da pesquisa teórica e experimental na psicologia. Tradução José Carlos Libâneo e Raquel A. M. M.

Freitas, de Problems of developmental Teaching – The experience of theoretical and experimental psychological research. Soviet Education, Ago. 1988, vol. XXX, nº. 8.

MARX, K. *Contribuição para a crítica da economia política.* Lisboa: Editorial Estampa, 1974, pp. 228-237.

VIGOTSKI, L. S. *A construção do pensamento e da linguagem*. Tradução Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

VYGOTSKI, L. S. *A Formação Social da Mente*. Tradução José Cipolla Neto; Luís Silveira Menna Barreto e Solange Castro Afeche. 4 ed. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

Texto recebido: 24/07/2019
Texto aprovado: 30/09/2019