# Faceta Epistémica Del Conocimiento Didáctico-Matemático Sobre La Derivada

## Epistemic Facet of the Didactic-Mathematics Knowledge About The Derivative

LUIS ROBERTO PINO-FAN [1]
JUAN DÍAZ GODINO[2]
VICENÇ FONT MOLL[3]

***Resumen***

*Una enseñanza idónea de un contenido matemático específico requiere por parte del profesor de la apropiación, entre otros, de una trama compleja de conocimientos sobre el propio contenido a enseñar, los significados personales de los estudiantes sobre el mismo, así como recursos instruccionales específicos. En este trabajo presentamos una síntesis de conocimientos sobre la derivada relativos al componente epistémico del conocimiento didáctico-matemático. Utilizando las nociones de configuración epistémica y de significado holístico del "enfoque ontosemiótico" del conocimiento y la instrucción matemática presentamos una reconstrucción de dicho significado para la noción derivada, que tiene en cuenta los tipos de problemas abordados en distintos momentos históricos y los sistemas de prácticas correspondientes. Este significado holístico constituye un aspecto esencial del conocimiento didáctico-matemático del profesor de matemáticas.*

***Palabras clave:*** *formación de profesores, conocimiento del profesor, derivada, enfoque ontosemiótico, configuración epistémica.*

***Abstract***

*The effective teaching of a specific mathematical content requires that the teacher's appropriation of a complex network of knowledge on the content to teach, the students' personal meanings about the specific topic, as well as the specific instructional resources. In this paper we present a synthesis of knowledge about the derivative concerning to the epistemic facet of didactic-mathematical knowledge. We use the notions of "epistemic configuration" and "holistic meaning" from the onto-semiotic approach in mathematics education to present a reconstruction of the holistic meaning of the derivative that takes into account the types of problems addressed in different historical moments and their systems of practices associated. This holistic meaning is an essential aspect of didactic-mathematical knowledge of the mathematics teacher.*

***Keywords:*** *teacher's training, teacher knowledge, derivative, onto-semiotic approach, epistemic configuration.*

[1]Universidad de Granada, España - lrpino@ugr.es
[2] Universidad de Granada, España - jgodino@ugr.es
[3] Universidad de Barcelona, España - vicencfont@ono.com

## Introducción

### Conocimiento didáctico-matemático y sus componentes

Actualmente, la formación matemática y didáctica de los futuros profesores constituye un campo de investigación que reclama atención por parte de la comunidad de investigadores en Didáctica de las Matemática y de las administraciones educativas. La principal razón es que el desarrollo del pensamiento y de las competencias matemáticas de los alumnos depende de manera esencial de la formación de sus respectivos profesores. Es por esto que, recientemente, ha habido un incremento notable de las investigaciones sobre la formación de profesores de matemáticas, como se refleja en las revisiones incluidas en los "handbooks" de investigación en educación matemática (BISHOP et. al., 2003; ENGLISH et al., 2002; LLINARES y KRAINER, 2006; HILL y COLS, 2007; FRANKE y Cols, 2007; SOWDER, 2007), y la publicación de revistas específicas como Journal of Mathematics Teacher Education.

Una de las problemáticas que más ha interesado es la de determinar cuál es el conocimiento didáctico-matemático del profesorado requerido para enseñar matemáticas. En este sentido, se han realizado diversos intentos para determinar los componentes del complejo de conocimientos que un profesor debería tener para desarrollar eficazmente su práctica y facilitar el aprendizaje de los estudiantes.

Uno de los pioneros en esta área, como es bien sabido, fue Shulman, quien en su trabajo de 1986 propuso tres categorías para el conocimiento del profesor: conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico del contenido (PCK[4]) y conocimiento curricular. El PCK es descrito por Shulman como "la forma particular del conocimiento del contenido que incorpora el aspecto del contenido que guarda más relación con la enseñanza" (p. 9). Posteriormente, en otro trabajo, Shulman (1987) amplía sus ideas y propone siete categorías para el conocimiento del profesor: conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico general, conocimiento curricular, conocimiento pedagógico del contenido (PCK), conocimiento de los estudiantes y sus características, conocimiento de los contextos educativos, y conocimiento de los fines, propósitos y valores de la educación.

Otro de los trabajos importantes en el campo, es el desarrollado, en diversas investigaciones, por Deborah Ball y colaboradores (BALL, 2000; BALL, LUBIENSKI

[4] Pedagogical Content Knowledge

y MEWBORN, 2001; HILL, BALL y SCHILLING, 2008), quienes apoyándose en las ideas de Shulman (concretamente en las nociones del conocimiento del contenido y conocimiento pedagógico del contenido), han propuesto la noción de "conocimiento matemático para la enseñanza (MKT[5])" definido como "el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno" (HILL, BALL y SCHILLING, 2008, p. 374). Este conocimiento (MKT) está conformado por dos grandes categorías, cada una de las cuales, a su vez, están conformadas por otras categorías de conocimiento: el conocimiento del contenido (que incluye el conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido y conocimiento en el horizonte matemático) y el conocimiento pedagógico del contenido (conformado por el conocimiento del contenido y los estudiantes, conocimiento del contenido y la enseñanza y conocimiento del currículo). Esto se puede ver de manera más clara en la  Figura 1.

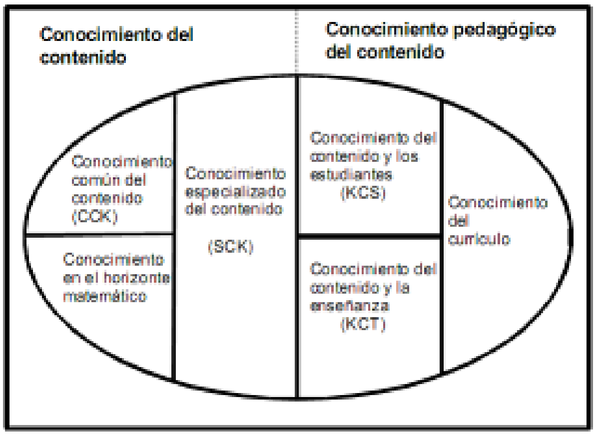


**Figura 1. Conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 377)**

En general, como señala Godino (2009), los modelos de conocimiento matemático para la enseñanza elaborados desde las investigaciones en educación matemática, incluyen categorías demasiado globales, por lo que sería útil disponer de modelos que permitan un análisis más detallado de cada uno de los tipos de conocimiento que se ponen en juego en una enseñanza efectiva de las matemáticas. Además, esto permitiría orientar el diseño de acciones formativas y la elaboración de instrumentos de evaluación de los conocimientos de profesor de matemáticas.

En este sentido Godino (2009) propone un modelo de "conocimiento didáctico-matemático" que permite categorizar y analizar los conocimientos didácticos-

[5] Matematical Knowledge for Teaching

matemáticos del profesor, mediante la aplicación del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Este marco teórico propone tener en cuenta seis facetas o dimensiones del conocimiento didáctico-matemático: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional (ver Figura 2); aportando además para cada una de ellas criterios e indicadores empíricos de idoneidad didáctica.


**Figura 2. Facetas y niveles del conocimiento del profesor**

Nosotros usamos la expresión *"conocimiento didáctico-matemático (CDM)"* del profesor, para referir a la fusión de las nociones MKT (Mathematical Knowledge for Teaching) y PCK (Pedagogical Content Knowledge), al considerar que la expresión "Conocimiento matemático para la enseñanza" no refleja adecuadamente los diversos componentes o facetas que se deben tener en cuenta, al igual que ocurre con la expresión "Conocimiento pedagógico del contenido". Entendemos que la "Didáctica de la Matemática" es la disciplina académica y el área de conocimiento cuyo objetivo específico es la articulación coherente de las distintas facetas o dimensiones que se ponen en juego en el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Además, hay que resaltar, que el término "conocimiento" lo usamos en el sentido de constructo que incluye comprensión, competencia y disposición.

Así, el CDM viene a ser la trama de ***relaciones*** que se establecen entre los objetos que se ponen en juego en las prácticas operativas y discursivas realizadas con el fin de resolver un determinado campo de situaciones - problemas matemáticos para implementar procesos de instrucción eficaces (idóneos) que faciliten el aprendizaje de los estudiantes.

## Didáctica de la derivada

Las cuestiones relativas a la enseñanza y aprendizaje del cálculo infinitesimal han sido intensamente investigadas en educación matemática. En particular la *derivada*, considerada una noción clave en el estudio del Cálculo, ha sido objeto de especial atención desde distintas aproximaciones teóricas, particularmente las cuestiones de índole cognitiva (concepciones de los estudiantes, esquemas cognitivos y tipos de errores) e instruccionales (estrategias y alternativas para la enseñanza de la derivada), tal y como se muestra en Artigue, Batanero y Kent (2007) o en Sánchez, García y Llinares (2008). Sin embargo, como bien señala Gavilán (2005), existen muy pocas investigaciones centradas en los profesores, y menos aún, en los conocimientos que debe de tener un profesor sobre esta noción.

Dentro de estas investigaciones centradas en el profesor, podemos encontrar aquellas que estudian aspectos de su práctica profesional y aquellas que estudian sus creencias y concepciones sobre la enseñanza-aprendizaje de la derivada. Las investigaciones sobre la práctica del profesor en la enseñanza de la derivada se pueden clasificar en dos grupos: aquellas relativas al uso de las nuevas tecnologías (ordenadores, calculadoras gráficas) y aquellas que señalan el uso de problemas de aplicación a ciencias del cálculo, introduciéndolo a través de problemas, por ejemplo, de la física. Estas investigaciones ponen de manifiesto la búsqueda de formas de modelar o caracterizar dicha práctica a través del uso de herramientas tecnológicas, presencia de diferentes representaciones o uso de situaciones en las que se aplica el cálculo (Gavilán, 2005).

El estudio de las creencias y concepciones, por su parte, resulta necesario para comprender la práctica de los profesores de matemáticas. Al respecto, Moreno (2005), señala que las creencias juegan un papel muy importante en todo lo que se relaciona con el profesor y la toma de decisiones en su ámbito profesional, por lo que cualquier intento de implementación de la calidad docente debería pasar por detectar, identificar, analizar e interpretar cuáles son las concepciones y creencias de los profesores sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y la materia en sí misma en su contexto específico de enseñanza. Sin embargo, las investigaciones desarrolladas cuyo objetivo es determinar las creencias y concepciones de los profesores con relación a la enseñanza de la derivada, han sido muy escasas. Uno de ellos es el trabajo propuesto por García, Azcárate y Moreno (2006) en el cual se estudian las creencias y concepciones de diez profesores universitarios del área de ciencias económicas, sobre cómo abordan la enseñanza del cálculo diferencial.

Otro tipo de investigaciones, que se han desarrollado recientemente, son aquellas que se han centrado en el discurso del docente cuando utiliza un razonamiento matemático para la demostración de teoremas en el salón de clase; principalmente los investigadores se han interesado en cómo se consigue dar validez a la argumentación. También están las investigaciones que estudian el uso de las metáforas en el discurso del profesor. Por ejemplo, Font (2009) centrándose en el uso de metáforas, analiza dos secuencias de actividades para calcular la derivada de la función $f(x) = x^2$ en las que no se utiliza la definición de la función derivada como límite de las tasas medias de variación.

En general, esta gran cantidad de resultados de la investigación didáctica sobre la derivada, plantea un reto a los formadores de profesores que sintetizamos con la pregunta: *¿Qué debería conocer un profesor para que su enseñanza de las derivadas tenga la mayor idoneidad didáctica posible?*

Para responder a esta pregunta se precisa reconstruir el sistema de conocimientos disponibles sobre cada uno de los aspectos involucrados en la enseñanza y el aprendizaje de la derivada. De esta manera, en el presente artículo pretendemos abordar, de manera parcial, la cuestión planteada anteriormente. Nuestro objetivo es avanzar en la reconstrucción del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada mediante la descripción del *significado epistémico global de la derivada*, distinguiendo los significados parciales de la misma y su articulación. Consideramos que el conocimiento de dichos significados parciales por parte del profesor es un aspecto relevante del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada.

La reconstrucción del mencionado significado global la realizamos mediante un estudio de tipo histórico-epistemológico, apoyados en el uso de algunas de las herramientas teóricas que nos proporciona el enfoque ontosemiótico del cognición y la instrucción matemática, mismas que se describen en el siguiente apartado.

## 1. Nociones Teóricas y Metodología

Para lograr nuestro propósito, como señalamos anteriormente, hemos adoptado el modelo teórico conocido como Enfoque Onto-Semiótico (EOS) de la cognición e instrucción matemática desarrollada en diversos trabajos por Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino, Batanero y Font, 2007).

Concretamente, la noción de configuración epistémica[6] (CE) nos permitió reconstruir el *significado global de referencia*[7] mediante la identificación de los significados parciales de la noción derivada, a partir de los informes de investigación y documentos históricos del cálculo infinitesimal. Se trata de identificar y describir de manera sistemática, los objetos primarios (situaciones, lenguajes, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos) intervinientes en los sistemas de prácticas de los cuales emerge el objeto derivada (ver figura 3).

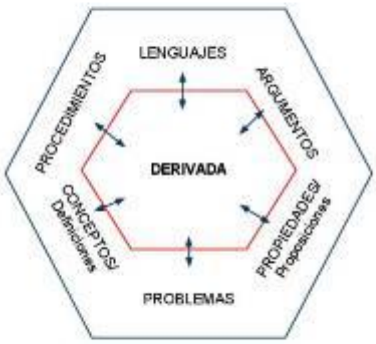


**Figura 3. Objetos intervinientes en las prácticas de las cuales emerge la derivada**

Además, en el análisis de las configuraciones epistémicas, cada uno de los objetos intervinientes puede verse desde las distintas facetas duales que propone el EOS, razón por la cual las tendremos presentes en nuestro análisis. La figura 4 resume dichas facetas duales.


**Figura 4. Facetas duales desde la que se pueden ver los elementos de cada configuración**

---

[6] Las *configuraciones epistémicas* se componen de los objetos que intervienen y emergen de los sistemas de prácticas matemáticas en distintos contextos de uso. Un objeto matemático puede tener varias configuraciones epistémicas las cuales a su vez llevan asociadas un significado parcial distinto para dicho objeto matemático (Font y Godino, 2006).

[7] El *significado global de referencia* se define a partir de dos nociones: *significado global* (también denominado *significado holístico* u *holosignificado*, comprende los diferentes significados parciales de un objeto matemático) y *significado de referencia* (entendido como los sistemas de prácticas que se usan como referencia para elaborar los significados que se pretenden incluir en un proceso de estudio. Para una institución de enseñanza concreta, el significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático).

Concretamente nos centramos en los aspectos intensivos-extensivos (o general-particular), de los objetos primarios que componen cada configuración, puesto que dicha dualidad nos permite determinar los distintos niveles de generalización entre las configuraciones.

Así, el presente trabajo puede verse como un estudio documental, en cuanto que, a partir del análisis de las diversas fuentes, identificamos y describimos de manera detallada las distintas configuraciones epistémicas y los significados parciales asociados a éstas. La reconstrucción del significado global de la derivada se realizó a partir de los significados parciales identificados y sus respectivas configuraciones epistémicas.

En los siguientes apartados describiremos las nueve configuraciones epistémicas identificadas a lo largo del recorrido histórico de la derivada. Para ello, organizamos nuestra descripción partiendo de las tres problemáticas generales: 1) problemas sobre tangentes, 2) problemas sobre máximos y mínimos, y 3) problemas sobre velocidades.

## 2. El Problema Del Trazado de Tangentes

Los sistemas de prácticas que involucran el "cálculo" de tangentes, fue uno de los más recurrentes en la evolución histórica de la derivada. En esta sección describimos las configuraciones asociadas a los problemas sobre tangentes; para ello partimos del análisis de un ejemplo de problema prototípico de cada configuración.

**Problema 1: La tangente en la matemática griega**

*"Desde un punto dado trazar una recta tangente a un círculo".*

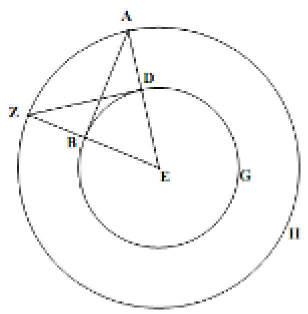


**Figura 5. Solución de Euclides de la proposición XVII**

Este problema es la proposición XVII que Euclides enuncia en su *libro III* de su obra *Elementos de Geometría*. La respuesta que, de acuerdo con Vera (1970, vol. 1), da Euclides es la siguiente: "(Con base en la figura 5) sea *A* el punto y *BGD* el círculo; tómese el centro *E* de éste y trace el segmento *AE*; con centro en *E* y radio *EA* trace el círculo *AZH*; desde *D* trazar *DZ* perpendicular a *AE* y una *E* con *Z* y *A* con *B*. Por ser *E* centro de los círculos *BDG* y *AHZ*, las rectas *EA* y *EZ* son iguales y también *ED* y *EB*, luego las dos *AE* y *EB* con iguales a *ZE* y *ED*, y forman el ángulo común en *E*. Por tanto, *DZ* y *AB* son iguales e iguales los triángulos *DEZ* y *EBA* y, por consiguiente, el ángulo *EDZ* será igual al ángulo *EBA*, y cómo el ángulo *EDZ* es recto, el ángulo *EBA* también será recto, y por ser *EB* perpendicular desde el centro en el extremo del diámetro, la *AB* es tangente al círculo".

Primeramente, como podemos observar, el problema que plantea Euclides se trata de trazar una recta tangente a una curva específica, en este caso el círculo. Este tipo de problemas del trazado de tangentes, son propios de esta configuración, pues los matemáticos griegos no disponían de métodos generales para trazar rectas tangentes a cualquier curva, por lo que los problemas que abordaban eran múltiples casos particulares. En este sentido, estamos de acuerdo con Ibarra y Gómez (2005) con el hecho de que las *situaciones-problemas* que se presentan en esta configuración, son aquellas en las que se debe trazar la recta tangente a una curva específica (círculos, cónicas de Apolonio, espiral de Arquímedes, etc.) en un punto determinado aunque genérico.

En la solución del ejemplo vemos cómo se utiliza un *lenguaje* propio de la geometría euclidiana y sus *argumentaciones*, tal y como lo señala Vera (1970, vol. 1), son puramente sintéticas. Además, en dicha solución intervienen *conceptos* tales como círculo, segmento, radio, perpendicularidad, congruencia de triángulos y segmentos, igualdad (de ángulos) y el concepto de tangente. Así mismo, aparece la *propiedad* de perpendicularidad entre la recta tangente y el radio que toca al punto de tangencia, la cual Euclides enuncia de la siguiente forma: "Si una recta es tangente a un círculo y se traza el radio en el punto de contacto, este radio es perpendicular a la tangente" (Vera, 1970, vol.1). Como se puede observar, los *procedimientos* geométricos que se utilizan en dicha solución están encaminados a construir la recta tangente buscada, basándose en ésta propiedad; esto se puede ver cuando argumenta: "…y por ser *EB* perpendicular desde el centro en el extremo del diámetro, la *AB* es tangente al círculo".

El ejemplo analizado nos permite ver, de manera global, las características de ésta configuración epistémica: "La tangente en la matemática griega". En general, puede decirse que esta configuración es más extensiva que intensiva, en cuanto a que las situaciones-problemas, procedimientos, argumentos, etc., se encuentran enfocados a casos particulares, pues como hemos señalado, las *situaciones-problemas* que se presentan, son aquellas en las que se debe trazar la recta tangente a una curva específica en un punto determinado. Euclides fue el matemático más influyente de esa época, razón por la cual el *lenguaje* y *argumentación* eran propios de la geometría sintética. Por esta misma razón, los *conceptos-definiciones* y *proposiciones* involucrados en la resolución de problemas eran, en su mayoría, las que había propuesto Euclides en su obra *Los elementos,* o variaciones de éstos. Ejemplos de conceptos-definiciones que intervienen en esta configuración son: “a) Se dice que una recta es tangente al círculo cuando lo toca y prolongada no lo corta (Definición II del libro III de los Elementos de Euclides); b) Se dice que dos círculos son mutuamente tangentes cuando se tocan mutuamente y no se cortan (Definición IV del libro III de los Elementos de Euclides)” (Vera, 1970, vol. 1). Algunos ejemplos de proposiciones son: “a) La recta perpendicular en el extremo de un diámetro cae fuera del círculo; entre esta recta y la periferia no se interpondrá ninguna otra y el ángulo del semicírculo es mayor que cualquier ángulo rectilíneo agudo y lo restante menor (Proposición XVI del libro III de los Elementos de Euclides); b) Si una recta es tangente a un círculo y se traza el radio en el punto de contacto, este radio es perpendicular a la tangente (Proposición XVIII del libro III de los Elementos de Euclides); c) La paralela desde el vértice de una sección cónica a una recta trazada ordenadamente es tangente a la sección y ninguna otra recta caerá entre la tangente y la sección (Proposición 32 del libro I de las Cónicas de Apolonio)” (Vera, 1970).

Con respecto a los *procedimientos* característicos en esta configuración, debemos señalar que los matemáticos griegos basaban sus demostraciones en las construcciones geométricas, por lo cual puede decirse que los procedimientos utilizados son una combinación de estas construcciones y las argumentaciones y lenguaje propios de la geometría sintética, basados en las definiciones y proposiciones.

Para finalizar debemos señalar que Apolonio también abordó problemas de máximos y mínimos, aunque en realidad, sus teoremas de máximos y mínimos, eran sobre tangentes y normales a las secciones cónicas, razón por la cual, se han considerado sus aportaciones en el análisis de esta configuración epistémica.

**Problema 2: Métodos algebraicos para hallar tangentes**

Con las aportaciones de Viète al campo de álgebra y la creación de la Geometría Analítica, el desarrollo del Cálculo en general se dio a marchas agigantadas. Los matemáticos del siglo XVII, con las ventajas de las nuevas y poderosas “herramientas”, comenzaron a desarrollar distintos métodos para abordar problemas sobre tangentes, máximos y mínimos, y velocidades, todos ellos con la finalidad de encontrar métodos generales aplicables a determinados campos de problemas. Sin embargo, todos esos métodos fueron concebidos desde distintos enfoques conceptuales. Uno de ellos, que da pie a esta configuración, son los métodos algebraicos desarrollados principalmente por Descartes, Hudde y Sluse, para el cálculo de tangentes, normales o subnormales. A continuación describimos esta configuración epistémica mediante el análisis del siguiente problema: (con base en la figura 6)

*"Supongamos dada la curva algebraica ACE, trazar la normal a la curva en C"*

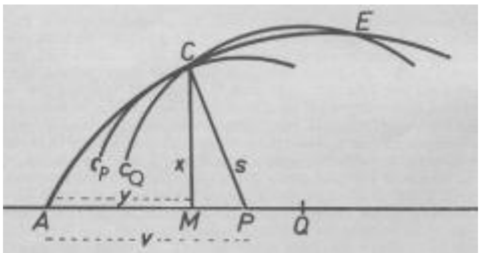


**Figura 6. Método del círculo de Descartes**

Para la solución, Descartes supone que la recta *CP* es la solución del problema. Sea *CM=x*, *AM=y*, *AP=v*, *CP=s*. Además de la curva *x=f(y)* o *ACE*, Descartes consideraba el círculo $c_P$ con centro en *P* y que pasa por *C*; es decir, el círculo de ecuación $x^2 + (v-y)^2 = s^2$. La circunferencia de este círculo toca a la curva *CE* en *C* sin cortarla, mientras que la circunferencia $c_Q$ de ecuación $x^2 + (v_Q - y)^2 = {s_Q}^2$, con centro en un punto *Q* distinto de *P* y que pasa por *C*, cortará a la curva no sólo en *C*, sino también en algún otro punto; sea este punto *E*. Esto significa que la ecuación $(f(y))^2 + (v_Q - y)^2 - {s_Q}^2 = 0$, obtenida sustituyendo *x=f(y)* en la ecuación de $c_Q$, tiene dos raíces distintas[8]; pero "cuanto más se aproximen uno al otro *C* y *E*, más pequeña será la diferencia de las dos raíces, y al final, cuando los puntos coincidan, las raíces serán exactamente iguales, es decir, cuando la circunferencia que pasa por *C* toque a la curva en el punto *C* sin cortarla" (Descartes, citado en Andersen, 1984, p. 30). Descartes llegó a la conclusión de que *CP* será una normal a la curva *C* cuando *P* (es decir, *v*) esté determinado de tal manera que la ecuación $(f(y))^2 + (v-y)^2 - s^2 = 0$, tenga dos raíces iguales $y_0$.

[8] Descartes consideraba solamente curvas para las cuales $(f(y))^2$ es un polinomio en *y*, o $y^2$ un polinomio en *x*.

Como señalamos al principio, los tipos de *situaciones-problemas* que se abordan en esta configuración, son el trazar rectas normales, tangentes o subtangentes a una curva dada en un punto determinado, tal como el ejemplo propuesto. En la solución de Descartes es fácil ver cómo el *lenguaje*, con respecto al utilizado en las configuraciones anteriores, cambia del netamente geométrico-descriptivo al de ecuaciones algebraicas y de la geometría analítica. Por ejemplo, en la descripción de la solución aparecen expresiones algebraicas para la curva *ACE*, ecuaciones de circunferencias y manipulaciones algebraicas de éstas para obtener la solución. En general, para resolver un problema geométrico, Descartes partía del estudio de éste para traducirlo a un lenguaje de ecuaciones algebraicas y después, una vez simplificada la ecuación lo más posible, resolvía dicha ecuación mediante la geometría. De esta forma, el *lenguaje* usado en esta configuración es el característico de los *procedimientos* algebraicos y de la geometría analítica.

Así mismo, los *argumentos* que presenta Descartes en la solución, son de tipo algebraico, basándose en las *proposiciones* de la geometría analítica, o análisis geométricos, por ejemplo: a) "…esto significa que la ecuación $(f(y))^2 + (v_Q - y)^2 - {s_Q}^2 = 0$, obtenida sustituyendo $x=f(y)$ en la ecuación de $c_Q$, tiene dos raíces distintas…"; b) "cuanto más se aproximen uno al otro *C* y *E*, más pequeña será la diferencia de las dos raíces, y al final, cuando los puntos coincidan, las raíces serán exactamente iguales…". De esta forma, los *argumentos* en esta configuración van a ser algebraicos (basándose en las *proposiciones* de la geometría analítica) y/o geométricos.

En cuanto a las *proposiciones*, podemos señalar un ejemplo claro en la solución de Descartes: "*CP* será una normal a la curva *C* cuando *P* (es decir, *v*) esté determinado de tal manera que la ecuación $(f(y))^2 + (v - y)^2 - s^2 = 0$, tenga dos raíces iguales $y_0$". En general, las *proposiciones* características de esta configuración, son aquellas provenientes del algebra y del estudio de las curvas mediante la geometría analítica, por ejemplo: a) "Si una ecuación tiene una raíz doble y multiplicamos la ecuación por una progresión aritmética arbitraria, de forma que el primer término de la progresión multiplica al primer término de la ecuación y así sucesivamente, el producto obtenido es una ecuación que tiene la raíz dada (Regla de Hudde para la obtención de raíces dobles)" (González, 1992, p. 193); b) "…la subtangente en cuestión será el cociente obtenido, dividiendo los términos del polinomio $f(x, y)$ que contengan la variable $y$, cada uno de ellos multiplicado por el exponente de la potencia de $y$ que aparece, por los términos en que aparezca la variable *x*, multiplicado cada uno de ellos por el correspondiente exponente de *x* y divididos todos ellos por *x* (regla de Sluse para hallar tangentes)" (Boyer, 1999, p. 471).

Como ejemplos de *conceptos-definiciones* propios de esta configuración, podemos señalar las distintas formas de concebir la recta tangente a una curva: a) "…como la posición particular de una secante que gira en torno al pie de la tangente, hasta que dos de sus puntos de intersección con la curva llegan a coincidir"; y b) "…aquella que está determinada por una recta que gira alrededor del punto de contacto dado, hasta que el otro punto en el que aquella corte a la curva, coincida con el primero". Descartes, como muchos matemáticos de la época, tenía la finalidad de encontrar un método general para encontrar tangentes (o mejor dicho, normales) a una curva, esto se evidencia claramente cuando señala: "Habré dado aquí todo lo que es necesario para el estudio de las curvas, una vez que dé un método general para trazar una línea recta que forme ángulos rectos con una curva en un punto arbitrario de ella…" (Descartes; citado en Boyer, 1999, p. 435). Sin embargo, a pesar de que su método es aplicable a cualquier curva algebraica, éste se complica cuando la ecuación de la curva no es una ecuación algebraica sencilla, debido a los laboriosos cálculos que hay que hacer para determinar *v* comparando los coeficientes (Andersen, 1984). Aún así, los desarrollos que hemos enmarcado en esta configuración, muestran serios intentos para encontrar métodos cada vez más generales, para abordar los problemas sobre el trazado de tangentes.

**Problema 3: Métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes**

En esta configuración epistémica hemos incluido las aportaciones que realizan, principalmente Barrow y Fermat, para abordar *situaciones-problemas* sobre el cálculo de tangentes o subtangentes. Consideremos el siguiente ejemplo:

*"Hallar la subtangente a la curva dada por la expresión $y^2 = 3x$"*

Lo primero que hace Barrow para resolver el problema es sustituir *x* y *y* por *x*+*e* y *y*+*a* respectivamente, de donde obtiene: $y^2 + 2ya + a^2 = 3x + 3e$. Luego despreciando los términos que contienen potencias de orden superior a 1 de $a$ y $e$ (regla 1) obtiene: $y^2 + 2ya = 3x + 3e$. Sustrayendo de la expresión anterior $y^2 = 3x$ (regla 2): $2ya = 3e$. Finalmente aplicando la *regla 3*: $\frac{PM}{PT} = \frac{m}{t} = \frac{a}{e} = \frac{3}{2y}$, de donde la subtangente viene dada por $PT = t = \frac{2my}{3}$.

El método, o *procedimiento*, que sigue Barrow para hallar la subtangente consta de tres reglas en las cuales moviliza una serie de propiedades, definiciones y argumentos. Una de estas *proposiciones*, en la solución de Barrow, se tiene al aplicar la *regla 3* (para el cálculo de la subtangente *t*), ya que encuentra la razón $\frac{a}{e}$ considerando la semejanza entre los triángulos *MTP* y *MNR* (ver figura 7). Otro ejemplo son los dos incrementos *e* y $a$, que considera Barrow para las variables independiente y dependiente respectivamente (en la figura 7 *MR*=$a$ y *NR*=*e*); los cuales al aplicar la regla 1, en la solución del ejemplo, considera "tan próximos a cero" y, al aplicar (intuitivamente) el límite, suprime las potencias de $a$ y *e* de orden superior a uno.

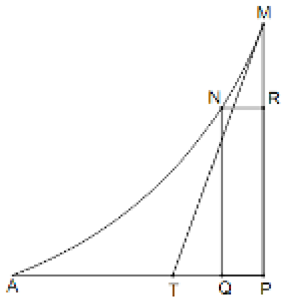


**Figura 7. Método de las tangentes de Barrow**

Otras *proposiciones* utilizadas en esta configuración, son: a) la relación de semejanza entre los triángulos, que contienen las subtangentes, *BCE* y *OIE* para establecer que $\frac{BC}{OI} = \frac{CE}{IE}$ (ver figura 8), en la aplicación del método de los extremos de Fermat al cálculo de tangentes y subtangentes; b) "Sea una curva de ecuación $p(x, y) = 0$, donde $p$ es un polinomio en $x$ e $y$; la subtangente *t* correspondiente a un punto $(x, y)$ viene dada por $t = \frac{-x(\ p(x,y),\ \ a,\ \ d)_y}{(\ p(x,y),\ \ a,\ \ d)_x}$, donde los subíndices significan que en el numerador $p(x, y)$ debe ser considerado como un polinomio en $y$ mientras que en el denominador como un polinomio en *x*" (regla de Hudde para determinar subtangentes).

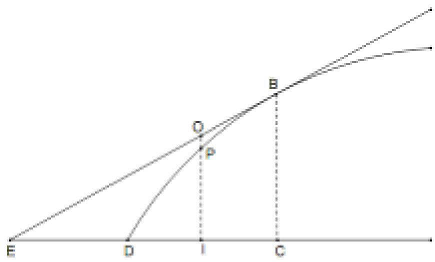


**Figura 8. Aplicación del método de los extremos al cálculo de la tangente a la parábola**

En general, algunos de los principales *conceptos-definiciones* que se manejan en esta configuración son: a) la concepción de Barrow sobre la tangente, como posición límite de la secante cuando $a$ y $e$ se aproximan a cero, hecho del cual subyace suprimir las potencias de $a$ y $e$ de orden superior a uno en la primera regla de Barrow; b) la noción intuitiva de límite, tanto en el método de Barrow para hallar las subtangentes, como en el método de los extremos de Fermat el cual será descrito en el siguiente apartado; y c) la noción intuitiva de la derivada. En cuanto a los *argumentos*, en esta configuración, se siguieron manteniendo los algebraicos, geométricos y consideraciones infinitesimales, como se puede apreciar claramente en la solución del ejemplo planteado, cuando (en la regla 1) se "suprime las potencias mayores de uno" de $a$ y $e$ por ser infinitamente pequeños. Así mismo, el *lenguaje* utilizado es de tipo geométrico, algebraico y/o descriptivo.

Los métodos para el cálculo de tangentes y subtangentes considerados en esta configuración (métodos de Fermat, Barrow y Hudde) son interesantes por ser algunos de los primeros métodos o reglas generales que se dieron.

## 3. Estudio de la Variación

**Problema 4: Sobre la variación en la edad media**

Durante el siglo XIV, comenzaron los estudios sobre el cambio en general y el movimiento como caso particular. Las investigaciones medievales sobre el movimiento comenzaron principalmente en las universidades de Oxford (por los escolásticos del Merton College) y París (principalmente Oresme). En particular, la demostración que realiza Oresme de la denominada "Regla de Merton", conduce a la idea de que el espacio recorrido por un móvil es igual al área bajo la gráfica de su velocidad en función del tiempo. A continuación, analizaremos esta demostración de Oresme de la Regla de Merton y, a partir de dicho análisis, describiremos los objetos primarios que componen esta configuración. Expresada en términos de tiempo y distancia, la regla de Merton nos dice:

> *"Si un cuerpo se mueve con aceleración uniforme durante un intervalo de tiempo dado, la distancia total s es tal como aquella que se tendría durante el mismo intervalo de tiempo con una velocidad uniforme igual al promedio de su velocidad inicial $v_o$ y su velocidad final $v_f$ (es decir, su velocidad instantánea en el punto medio del intervalo de tiempo)".*

Para la demostración geométrica, Oresme considera el movimiento uniformemente acelerado durante un intervalo de tiempo $(0,\ t)$ correspondiente a la longitud *AB* (ver figura 9), la latitud en cada punto *P* de *AB* es una ordenada *PQ* cuya longitud es la velocidad en el instante correspondiente, por lo que el lado *CD* es un grafo velocidad – tiempo. Oresme vio que la definición de aceleración uniforme implica que *CD* es un segmento de línea recta, y que la *figura* o *figura total*, es un trapezoide con base $AB=t$ y alturas $AD=v_o$ y $BC=v_f$. Supuso que el área *s* de ese trapezoide es igual a la distancia total recorrida y a partir de la fórmula para hallar el área del trapezoide se sigue inmediatamente que $s = \frac{1}{2}(v_o + v_f)t$ (Cantoral y Farfán, 2004).

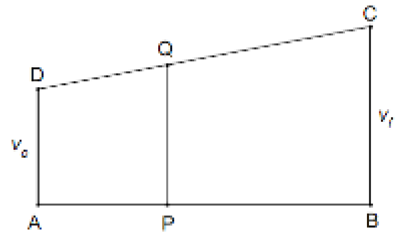


**Figura 9. Demostración geométrica de Oresme de la Regla de Merton**

En cuanto a la *situación-problema* planteada, es decir, el enunciado de la Regla de Merton, vemos que se trata de un problema que involucra el cálculo de la distancia recorrida por un cuerpo que se mueve con aceleración uniforme, lo cual va a ser característico de esta configuración ya que los matemáticos de aquella época se habían interesado en abordar problemas físicos (o del mundo real) relacionados con el cambio en general y el movimiento en particular, lo que los escolásticos de Merton llamaban "variaciones de la intensidad de una cualidad, desde un punto a otro de un cuerpo, o desde un punto a otro del tiempo". Otro ejemplo de una *situación-problema* característica de esta configuración es la denominada ley artificial: "Si a lo largo de la primera mitad de un cierto intervalo de tiempo, una forma se mantiene con cierta intensidad; a lo largo del siguiente cuarto de intervalo la forma se mantiene al doble de dicha intensidad; a lo largo del siguiente octavo de intervalo la forma se mantiene al triple de intensidad, y así ad infinitum, entonces la intensidad media durante todo el intervalo será la intensidad de la forma durante el segundo intervalo [el doble de la intensidad inicial]" (GONZÁLEZ, 1992, p. 47). Estos ejemplos de *situaciones-problemas* (la regla de Merton y la ley artificial), son a su vez, ejemplos típicos de *proposiciones*, puesto que se empleaban en la resolución de nuevas situaciones-problemas. Otros ejemplos de proposiciones-propiedades, son las que González señala como ideas innovadoras introducidas por Oresme: a) la medida de diversas variables físicas por medio de segmentos; b) algún tipo de relación funcional entre variables; c) una aproximación a la introducción de las coordenadas mediante la representación gráfica de relaciones funcionales; d) la constancia de la disminución de la variación en las proximidades de un extremo y, e) una especie de integración o sumación continua para calcular la distancia como el área bajo el grafo velocidad-tiempo.

Respecto a los *conceptos-definiciones*, observamos que desde el enunciado del problema, es decir, la regla de Merton, intervienen conceptos tales como: a) aceleración uniforme, definida por los escolásticos de Merton como aquella para la cual incrementos iguales de velocidad se adquieren en intervalos de tiempo iguales; b) movimiento uniforme, definido como aquel que se tiene cuando las distancias iguales eran recorridas en tiempos iguales; c) velocidad instantánea, que es la forma en que definieron al movimiento variable; d) longitudo (longitud), la cual sería nuestra abscisa, que considera es el tiempo; e) latituto (latitud), que sería nuestra ordenada, y considerada la intensidad o la amplitud del fenómeno, ya sea velocidad, calor u otros; f) representación gráfica de las intensidades de las cualidades, que es la representación de la forma de acuerdo con la variación de la intensidad, respecto del tiempo. Este último concepto, introducido por Oresme, se hace presente mediante el grafico de la figura 9, con el cual describe la demostración de la regla de Merton. Los *conceptos-definiciones* que acabamos de mencionar, son algunos de los más representativos en esta configuración.

El *lenguaje* y *procedimientos* utilizados por Oresme en su demostración eran netamente geométricos, mediante la representación de la forma (como el gráfico de la figura 9), lo cual queda constatado cuando el propio Oresme señala: “La dimensión de los fenómenos está sometida a múltiples variaciones y dicha multiplicidad es difícilmente discernible si su estudio no se remite al estudio de figuras geométricas. Todo lo que varía, se sepa medir o no, lo podemos imaginar como una cantidad continua representada por un segmento rectilíneo” (GONZÁLEZ, 1992, p. 42). Sin embargo, los procedimientos y el lenguaje utilizados en un inicio por los escolásticos del Merton College, fueron descriptivos, con *argumentaciones* verbales extensas y confusas. En general, los *lenguajes* y *procedimientos* característicos de esta configuración fueron los descriptivos, geométricos (mediante la representación de la forma), o una combinación entre ambos.

Los *argumentos* que realiza Oresme en la demostración de la regla de Merton, fueron descriptivos mediante la representación de la forma, ya que, de acuerdo con Oresme, la noción de gráfico como elemento descriptivo de una cualidad, es importante, pues facilita la comprensión de la variación de un fenómeno (a lo que él llama la representación gráfica de *las intensidades de las cualidades*). Hay que señalar que durante este período, los resultados fueron hallados mediante *argumentaciones* verbales o geométricamente mediante la representación de la forma, más que mediante consideraciones aritméticas basadas en la noción intuitiva de límite, que fue ampliamente usada durante el siglo XVII.

En general, la configuración se puede considerar más extensiva que intensiva, puesto que aún no se contaban con métodos generales para resolver problemas sobre variación, y en particular, sobre movimiento.

**Problema 5: Concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes**

Las investigaciones medievales sobre el movimiento, en particular las de Oresme, conducen a la idea de que el espacio recorrido por un móvil es igual al área bajo la gráfica de su velocidad en función del tiempo. Galileo toma estas ideas y las demuestra con argumentos de indivisibles. Así mismo, Galileo establece la ley fundamental de la composición vectorial del movimiento y la aplica para determinar la trayectoria descrita por un proyectil. Además, si se representa el movimiento en un gráfico de desplazamiento-tiempo, la dirección de éste da la dirección de la tangente a la trayectoria, mientras la velocidad da la pendiente de la línea tangente (GONZÁLEZ, 1992). Estas ideas posteriormente serían recogidas y desarrolladas por matemáticos como Roberval, Torricelli y Newton quien más tarde desarrollaría su cálculo de fluxiones, mismo que hemos considerado en una configuración aparte, debido a las diferencias conceptuales de las cuales hablaremos más adelante.

En esta configuración epistémica, se siguen abordando *problemas* relacionados con el trazado de tangentes a distintas curvas. Del mismo modo los *procedimientos* y *lenguajes* son los de la geometría analítica y el álgebra. Sin embargo, al haber cambios conceptuales en los métodos de ésta configuración, los elementos de ésta (definiciones, proposiciones y argumentos) también varían. Así, mediante *argumentaciones cinemáticas*, se logran establecer nuevos *conceptos-definiciones* y *proposiciones* inherentes a esta configuración epistémica.

Ejemplos de *conceptos-definiciones* utilizados en esta configuración son: a) concepto intuitivo de movimiento instantáneo; b) "Una curva es la trayectoria de un punto móvil"; c) "…en todas las demás líneas curvas, cualesquiera que sean, su tocante en cualquier punto es la línea de dirección del movimiento que tiene en ese mismo punto el móvil que la describe (concepción de tangente de Roberval)"; d) "…una tangente es la que resulta de la composición de dos movimientos de un punto móvil que traza la curva (concepción de tangente de Sluse)".

Algunas *proposiciones* prototípicas de esta configuración son: a) "Si el movimiento que describe la curva es una combinación de movimientos simples, la línea instantánea del movimiento o dirección de la tangente puede hallarse por composición de movimientos, mediante la ley del paralelogramo"; b) "Trazar la tangente a una curva descrita por el movimiento de un punto que resulta de la composición de dos movimientos consiste en determinar la resultante de las velocidades de los dos movimientos"; c) "…si $s = s(t)$ y $v = v(t)$ representan respectivamente el espacio y la velocidad en función del tiempo, se tiene que: 1) el área limitada por la curva $v = v(t)$ y el eje de las abscisas representa, para cada *t*, el espacio recorrido $s = s(t)$, y 2) la pendiente de la tangente a la curva $s = s(t)$ representa, para cada *t*, la ordenada de la curva $v = v(t)$ en la abscisa *t*".

Nuestra lectura final, respecto a la dualidad *extensiva-intensiva*, es que los métodos empleados, en esta configuración, para el trazado de tangentes nuevamente son extensivos en cuanto a que no son generalizables para todos los casos. Esto lo señala Andersen (1984) de la siguiente manera: "Al tomar la dirección instantánea del movimiento como conocida, tanto Roberval como Torricelli habían evitado el uso de infinitesimales en su método, el cual tenía la ventaja adicional de ser aplicable a curvas que no están referidas directamente a un sistema de coordenadas. Sin embargo, el método no era general en cuanto a que no todas las velocidades podían ser determinadas".

## 4. Cálculo de Máximos y Mínimos

Esta configuración epistémica ha surgido, principalmente, de las obras de Fermat, uno de los matemáticos más influyentes respecto al desarrollo del cálculo diferencial. De hecho, sus trabajos sobre máximos y mínimos y tangentes, hizo que diversos matemáticos del siglo XVIII, tales como Laplace y Lagrange, lo consideraran el verdadero inventor del cálculo diferencial.

Con base en las obras fundamentales de la antigüedad clásica griega (los *Elementos* de Euclides, las *Cónicas* de Apolonio, las obras de Arquímedes, la *Aritmética* de Diofanto, la *Colección matemática* de Pappus, etc.), así como en la teoría de ecuaciones de Viète (en particular en el método de la *Syncrisis* de su *Arte analítica*), Fermat desarrolla los primeros métodos generales, en la historia de las matemáticas, para la determinación de extremos (González, 2008), que posteriormente aplica a la determinación de las normales y tangentes.

**Problema 6: Las ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos**

Como en las secciones anteriores, partiremos del análisis de un problema para describir los elementos que componen esta configuración. El problema es el siguiente:

*"Dividir un segmento de longitud N en dos partes de manera que el producto sea el máximo posible"*

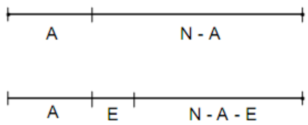


**Figura 10. Aplicación del método de los extremos de Fermat**

Para dar solución al problema, sea *A* la cantidad desconocida por la que tendremos que dividir el segmento de longitud *N* (ver figura 10). De tal forma que el producto pedido estará dado por la expresión:

$$f(A) = A(N - A) = AN - A^2 \ldots(1)$$

Ahora bien, dado que queremos que el producto sea el máximo posible, incrementemos a nuestra variable *A* una magnitud *E*, de tal forma que el producto estaría dado por:

$$f(A + E) = (A + E)(N - A - E) = AN - A^2 + NE - 2AE - E^2 \ldots(2)$$

*"Adigualando"* las expresiones (1) y (2) obtenemos:

$$AN - A^2 \approx AN - A^2 + NE - 2AE - E^2$$

$$NE \approx 2AE + E^2 \ldots(3)$$

Dividiendo ambos miembros de la *"adigualdad" por E, obtenemos:*

$$N \approx 2A + E \ldots(4)$$

Finalmente, haciendo *E=0*, en (4) nos queda:

$$2A = N$$

Lo que significa que el producto es máximo cuando $A = \frac{N}{2}$ (González, 2008).

Otro tipo de *situaciones-problemas* que fueron abordados en esta configuración, además de aquellos en los que se pretendían calcular extremos (como en el ejemplo que estamos analizando), fueron los problemas de aplicación práctica sobre máximos y mínimos. Ejemplo de esto es el problema abordado por Kepler sobre el cálculo de volúmenes de barriles de vino; Kepler estudió la forma de los barriles que con menor superficie (menor cantidad de madera utilizada para hacerlos) tuviera mayor volumen (pudieran albergar más cantidad de vino).

El *lenguaje* utilizado por Fermat en la solución del problema, es prácticamente el mismo que en las configuraciones anteriores: algebraico, gráfico y/o descriptivo. Este lenguaje es el que utilizaron la mayoría de los matemáticos del siglo XVII hasta antes de los desarrollos de Newton y Leibniz.

Una de las *propiedades* principales en esta configuración, radica en la idea de incrementar una magnitud considerable a la variable independiente o a la magnitud que podríamos interpretar como la variable independiente (González, 2008; Andersen, 1984); situación que representa el punto de partida para el uso de magnitudes infinitamente pequeñas, es decir, los infinitesimales. La propiedad que acabamos de mencionar se puede identificar en la solución que da Fermat al problema, que hemos planteado a manera de ejemplo, cuando señala: "…incrementemos a nuestra variable *A* una magnitud *E*...". Otra *proposición* clave en el método de Fermat, es la "Adigualdad" que establece para "aproximar tanto como sea posible" la expresión que determina el producto a la expresión que determina el producto cuando se incrementa la cantidad desconocida (*A*), es decir, $AN - A^2 \approx AN - A^2 + NE - 2AE - E^2$. Esto significa que *E* es tan pequeña, que ambas cantidades son "casi iguales"; en términos actuales, que *E* se aproxima a cero. Un último ejemplo de una *proposición* característica de esta configuración es la formulación general, dada por Hudde, de un patrón subyacente a las soluciones de problemas de máximos y mínimos por el método de Fermat, que en notación moderna, afirma que dado un polinomio de la forma $y = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, entonces, se tiene un máximo o un mínimo cuando $\sum_{k=0}^{n} k a_k x^{k-1} = 0$ (Grabiner, 1983).

El método de Fermat para el cálculo de extremos en sí mismo, un claro ejemplo de los *procedimientos* utilizados, es incluso, el más importante en esta configuración.

En cuanto a las *argumentaciones*, además de las algebraicas y las geométricas, se empiezan a elaborar, aunque de manera implícita, argumentaciones basadas en las cantidades infinitesimales. Esto puede verse, en la solución del ejemplo, cuando Fermat "adiguala" las cantidades, de trasfondo radica la idea de que *E* se aproxima a cero. Así mismo, cuando se divide ambos miembros de la "adigualdad" por *E*, nuevamente detrás está la idea de que *E* se aproxima a cero pero no llega a ser cero. En contradicción con esto último, cuando se hace *E=0*, la idea subyacente es que *E* es "tan pequeña" que se le puede desestimar. Lo anterior, de hecho, es una de las principales críticas a su método, ya que en el mismo proceso considera $E = 0$ y $E \neq 0$. Aún así, el proceso utilizado por Fermat es, en esencia, similar al cálculo de $lim_{E \to 0} \frac{f(A+E)-f(A)}{E}$, que se emplea en la actualidad para hallar la primera derivada.

Para finalizar, hay que señalar que en esta configuración aparecen, aunque de manera muy intuitiva, *conceptos-definiciones* importantes tales como el límite y la derivada. Otra cuestión es que, al desarrollarse métodos generales para la determinación de máximos y mínimos (por ejemplo, el método de Fermat o la formulación de Hudde), esta configuración tiene características más *intensivas* que las anteriores.

## 5. La Derivada Como Fluxión

Como señala González (1992), es indiscutible que Newton y Leibniz son los verdaderos artífices del *cálculo infinitesimal*. Sin embargo, existen diferencias conceptualmente importantes entre las ideas de Newton y las de Leibniz, razón por la cual, a diferencia del trabajo de Ibarra y Gómez (2005), hemos considerado ambos planteamientos en configuraciones distintas.

Newton comienza con la consideración de elementos infinitesimales, a la manera de Fermat y Barrow, pero enseguida deriva hacia una concepción mecánica, basada en la idea intuitiva del movimiento continuo, manejando el *concepto* de *fluente*, como cantidad que varía respecto al tiempo, y de *fluxión* como su velocidad de cambio respecto al tiempo (González, 1992); de ahí que al cálculo desarrollado por Newton se le conozca como *cálculo fluxional*.

El siguiente ejemplo (Bos, 1984) fue uno de los propuestos por Newton en su obra de 1671, y ejemplifica cómo aplicaba su método de las fluxiones.

**Problema 7: El Cálculo de fluxiones**

*"Dada la curva de ecuación* $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$*, calcular las fluxiones"*

Para resolver el problema, Newton sustituye en la ecuación dada $x$ y $y$ por $x + \dot{x}o$ y $y + \dot{y}o$ respectivamente, obteniendo:

$$\begin{aligned}(x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2o^2x + \dot{x}^3o^3) - (ax^2 + 2a\dot{x}ox + a\dot{x}^2o^2)& \\ + (axy + a\dot{x}oy + a\dot{y}ox + a\dot{x}\dot{y}o^2) - (y^3 + 3\dot{y}oy^2 + 3\dot{y}^2o^2y + \dot{y}^3o^3)& \\ = 0&\end{aligned}$$

luego elimina $x^3 - ax^2 + axy - y^3$, que es igual a cero (de acuerdo con la ecuación dada originalmente), divide después por *o* y desprecia finalmente los términos en que todavía figura el factor *o*, quedando finalmente:

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0$$

Primeramente, observemos que Newton introduce nuevos *conceptos-definiciones* en sus desarrollos sobre el cálculo infinitesimal y, con ellos, nuevas expresiones terminológicas y notacionales (además del lenguaje algebraico, geométrico y descriptivo), entre los cuales podemos señalar: a) *"o"* es un intervalo de tiempo infinitamente pequeño b) "momento de *x*" que define como un incremento infinitesimal de *x* y que representa con *ox* (análogamente define el momento de *y*, *oy*); c) en palabras de Newton: "Llamaré *cantidades fluentes*, o simplemente *fluentes*, a estas cantidades que considero aumentadas gradualmente e indefinidamente; las representaré mediante las últimas letras del alfabeto *v, x, y, z,* para distinguirlas de las otras cantidades"; d) el concepto fluxión definido con sus palabras: "representaré con las mismas últimas letras coronadas con un punto $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, las velocidades con que las fluentes aumentan por el movimiento que las produce y que, por consiguiente, se pueden llamar fluxiones…"; e) *"momento de la fluente"* es la cantidad infinitamente pequeña que varía una fluente como *x* en un intervalo de tiempo infinitamente pequeño *"o"*, es decir, $\dot{x}o$.

El método de las fluxiones de Newton es, a su vez, el *procedimiento* más importante de esta configuración; por ejemplo, en la siguiente descripción Newton sugiere (y a la vez *argumenta*) la sustitución de $x$ e $y$ por $x + \dot{x}o$ e $y + \dot{y}o$ respectivamente: "Ya que los momentos como $\dot{x}o$, $\dot{y}o$ son las anexiones o aumentos infinitamente pequeños de las cantidades fluentes $x$ e $y$ durante los intervalos de tiempo infinitamente pequeños, se sigue que estas cantidades $x$ e $y$, después de un intervalo de tiempo infinitamente pequeño, se convierten en $x + \dot{x}o$ $e$ $y + \dot{y}o$...De ese modo, se puede sustituir en la misma ecuación $x + \dot{x}o$ e $y + \dot{y}o$ en lugar de $x$ e $y$" (Collette, 1993, p.110). En este último ejemplo, al igual que en el problema propuesto al inicio, vemos como Newton *argumenta* los procedimientos (y en general sus definiciones y proposiciones) con base en consideraciones dinámicas y de infinitesimales, apoyándose siempre en el álgebra y el análisis geométrico.

Dentro de las *proposiciones* dadas por Newton, podemos mencionar las siguientes: a) *Si* $ax^{m/n} = y$*, entonces el área será* $z = \frac{n}{m+n} ax^{\frac{m+n}{n}}$; b) Supongamos una curva cuya área está dada por la expresión $z = ax^m$, donde *m* es entero o fraccionario, entonces la curva está dada por la expresión $y = max^{m-1}$; c) dada una curva $y = max^{m-1}$, entonces el área comprendida bajo la curva es $z = ax^m$ (recíproco del inciso b); d) "Las cantidades, y las razones de cantidades, que en cualquier tiempo finito tienden continuamente a la igualdad, y antes de terminar ese tiempo se aproximan una a otra más que por ninguna diferencia dada, acaban haciéndose en última instancia iguales" (Durán, 1996, p. 54).

En cuanto a los tipos de *situaciones-problemas* de esta configuración, Newton abordó problemas sobre el cálculo de la velocidad del movimiento en un tiempo dado cualquiera, dada la longitud del espacio descrito y viceversa; así mismo Newton hacía uso de sus algoritmos para la determinación de máximos y mínimos, tangentes y curvaturas (Bos, 1984). En este sentido, al ser los algoritmos de Newton universales, en palabras de González (1992), es decir, aplicables a una variedad de problemas, esta configuración la reconocemos como altamente intensiva.

Así, vemos como en esta configuración las *fluxiones* o velocidades de los movimientos de las fluentes, es lo que en la actualidad conocemos como la *derivada*, y los momentos como $\dot{x}o$ y $\dot{y}o$ del *cálculo de fluxiones* de Newton, serían las diferencias infinitamente pequeñas o *diferenciales* $dx$ y $dy$ en el cálculo diferencial de Leibniz.

## 6. La Derivada Como Cociente de Diferenciales

A diferencia de Newton, el cálculo de Leibniz tiene un carácter más simbólico y analítico, siendo las *diferencias infinitesimales* y la suma de *infinitamente pequeños*, las bases de su cálculo diferencial e integral respectivamente (González, 1992). Como señala Collette (1993), su finalidad era elaborar un método eficaz mediante el cual, sin recurrir a diagramas, ciertas propiedades de las curvas puedan ser determinadas por medio de su *cálculo de las diferencias*. A continuación describiremos, con algunos ejemplos, los elementos primarios que componen esta configuración.

**Problema 8: El Cálculo de diferencias**

Leibniz abordó *situaciones-problemas* sobre máximos y mínimos, tangentes y puntos de inflexión; esto se evidencia claramente en el título de su obra *"Nova methodus pro maximis et minimis, intemque tangetibus, qua nec irrationales quantitates moratur"* (Nuevo método para los máximos y mínimos, así como para las tangentes, el cual puede también aplicarse a las cantidades fraccionarias e irracionales), en la cual introduce por primera vez la expresión *cálculo diferencial* y proporciona las fórmulas, que hasta ahora conocemos, para derivar productos, cocientes, potencias y raíces, todas éstas acompañadas de aplicaciones geométricas tales como la búsqueda de tangentes, máximos y mínimos, y de los puntos de inflexión.

Uno de los objetivos de Leibniz, y que de acuerdo con Bos (1984) fue una de las tres ideas principales que permitieron el desarrollo de su cálculo infinitesimal, es la construcción de una *characteristica generalis*, es decir, un *lenguaje* simbólico general mediante el cual se pudieran escribir con símbolos y fórmulas todos los procesos de *argumentación* y de razonamiento. Con este fin, Leibniz logró introducir un nuevo lenguaje accesible, que aún se mantiene en nuestros días, el cual facilita la manipulación de los conceptos, procedimientos y argumentos, en el cálculo diferencial. Por ejemplo, Leibniz introduce los símbolos $\int$ y $\partial$, los cuales concibe como operadores que representan respectivamente la suma de rectángulos o suma de áreas y las diferencias entre dos valores sucesivos de $x$ o $y$. Así mismo, denota con $dy$ y $dx$ a las diferenciales de las variables $x$ e $y$ respectivamente, es decir, diferencias infinitamente pequeñas de $x$ e $y$.

Los lenguajes, nuevos términos y notaciones, introducidos por Leibniz, estaban asociados a una serie de nuevos *conceptos-definiciones* o *procedimientos* primordiales en su cálculo de diferencias. Por ejemplo, $dy$ la utiliza para denotar el concepto de diferencial de una variable $y$, la cual define como la diferencia infinitamente pequeña entre dos valores sucesivos de $y$ (análogamente define la diferencial de la variable $x$, $dx$). Así mismo, como ya señalamos anteriormente, introduce los símbolos $\int$ para representar el proceso de sumar rectángulos o áreas, y $\partial$ para representar las diferencias entre dos valores sucesivos de $x$ o $y$. Las fórmulas proporcionadas por Leibniz, que hasta ahora conocemos, para derivar productos, cocientes, potencias y raíces, son ejemplos de *proposiciones* y *procedimientos* al mismo tiempo.

En cuanto a las *proposiciones* utilizadas en esta configuración, dos de las principales, que de acuerdo con Bos (1984) fueron utilizadas por Leibniz, en el desarrollo de su cálculo de diferencias, son: la relación que dedujo a partir de sus estudios sobre sucesiones numéricas $a_1, a_2, a_3, \ldots$ y sus sucesiones de diferencias primeras asociadas, $b_1 = a_1 - a_2$, $b_2 = a_2 - a_3$,…; Leibniz se dio cuenta de la relación $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = a_1 - a_{n+1}$. La segunda es la relación de semejanza entre el triángulo *cc*'$d$ situado a lo largo de la curva en la figura 11, y los triángulos formados por la ordenada, tangente y subtangente, o por la ordenada, normal y subnormal.

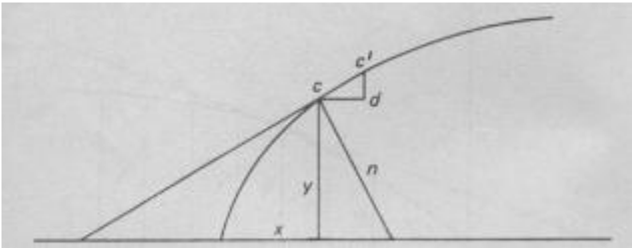


**Figura 11. Triángulo diferencial de Leibniz**

Otros ejemplos de *proposiciones* son los siguientes: a) "…una suma tal como $\int y\,dx$ es la suma de los rectángulos infinitamente pequeños de base *dx* y altura *y*; por lo tanto, la cuadratura de una curva es igual a $\int y\,dx$"; b) "…la integración en cuanto a proceso de sumación es la inversa de la diferenciación"; c) "la mejor manera de encontrar las tangentes es determinando el cociente $\frac{dy}{dx}$, ya que la determinación de la tangente a una curva depende de la razón de las diferencias de ordenadas y abscisas cuando se hacen infinitamente pequeñas".

Finalmente, hay que señalar que para sus *argumentaciones,* Leibniz utilizó consideraciones algebraicas, geométricas e infinitesimales. Además, al desarrollar un método general para el cálculo de la diferencial de una variable, esta configuración es altamente intensiva, a pesar de que quedaran pendientes cuestiones sobre la fundamentación.

Observemos también, la importante diferencia conceptual entre las ideas de Newton, discutidas en el apartado anterior, y las de Leibniz. Newton tiene una visión dinámica de las curvas, como generadas por un movimiento. En este sentido, para el cálculo de las fluxiones (o derivadas), hace uso de los infinitésimos pero no le interesan estos por sí mismos, sino el límite cuando estos van *desvaneciéndose*. En cambio Leibniz, concibe una curva como formada por un conjunto de segmentos rectos de longitud infinitesimal, de esta forma, se interesa por las propiedades de estas cantidades infinitesimales en sí. De ahí que desarrolle su método para la suma de estas cantidades (integración) y para la diferencia de ellas (derivación). Como señala Durán (1996), el desarrollo de los conceptos de diferencial e integral con la apreciación explícita de que son conceptos inversos, el desarrollo de unas reglas para el cálculo de la diferencial y la aplicación de estos conceptos a la resolución de problemas de tangentes, cuadraturas, máximos y mínimos, problemas inversos de tangentes, etc., situaron el cálculo de las diferencias de Leibniz por encima del cálculo de fluxiones de Newton.

## 7. La Derivada Como Límite

Al final del siglo XVII, el cálculo diferencial estaba establecido sobre los trabajos de Newton y Leibniz, aunque sin una fundamentación matemática rigurosa. Los matemáticos que sucedieron a Newton y Leibniz, continuaron los desarrollos y sobre todo, las aplicaciones de las nuevas ideas a una gran cantidad de problemas principalmente de la física, por ejemplo, el de la cuerda vibrante, la catenaria o el de la braquistócrona. Además, los aportes realizados en esta etapa, posterior al establecimiento del cálculo Newtoniano y Leibniziano, se orientaron hacia la búsqueda de una fundamentación rigurosa de las nuevos métodos generales desarrollados por Newton y Leibniz. De esta forma, el concepto de *derivada* y su fundamentación, fue desarrollándose gradualmente durante los siglos XVIII y XIX, junto con las ideas de función, continuidad y límites, principalmente. Describimos a continuación la configuración epistémica, a partir del análisis del estudio histórico sobre el desarrollo de una fundamentación rigurosa de la derivada, hasta llegar a la definición que conocemos en la actualidad.

**Problema 9: La derivada como límite**

Como se ha señalado antes, entre las principales *situaciones-problemas* de esta configuración, se encuentra la aplicación de los nuevos métodos generales de Newton y Leibniz, en la resolución de problemas principalmente de la física, por ejemplo, el de la cuerda vibrante, así como para el cálculo de tangentes, máximos y mínimos, puntos de inflexión, velocidades. Pero sobre todo, las *situaciones-problemas* iban encaminadas al desarrollo de conceptos, propiedades, etc., para dar una fundamentación rigurosa a los aportes de Newton y Leibniz, esto es, se trata de una configuración fuertemente formal.

En este sentido, en esta etapa se desarrollaron una serie de *conceptos-definiciones* primordiales no sólo para el desarrollo de la fundamentación de la derivada, sino para el Cálculo Infinitesimal en general. El concepto de función, por ejemplo, el cual Euler comienza a considerar como una aplicación que a un número *x* asocia otro *f(x)*. El concepto de límite, del cual se dieron diversas definiciones a lo largo de esta etapa, como por ejemplo: a) "el valor del que una variable puede llegar a diferir en menos que una cantidad arbitrariamente pequeña (Simon Lhuilier)"; b) "Cuando los sucesivos valores atribuidos a una variable aproximan indefinidamente a un valor fijo tanto que al final difieren de él tanto como uno desea, esta última cantidad es denominada el límite de todas las otras (Cauchy)"; c) *"*el límite de una función *f(x)* vale $L$ cuando *x* tiende a $x_0$ si para cualquier cantidad positiva $\varepsilon > 0$ existe otra cantidad positiva $\delta > 0$ de manera que para todo punto *x* verificando $0 < |x - x_0| < \delta$ y donde la función *f* esté definida se tiene que $|f(x) - L| < \varepsilon$ (Weierstrass)*"*. Así mismo, la *derivada* es definida por Cauchy de la siguiente manera: "Cuando la función $y = f(x)$ es continua entre dos límites dados de la variable *x*, y uno asigna un valor entre estos límites a la variable, un incremento infinitesimal de la variable produce un incremento infinitesimal en la función misma. Consecuentemente, si ponemos $\Delta x = i$ los dos términos del cociente de diferencias $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ serán infinitésimos. Pero considerando que estos términos tienden a cero simultáneamente, el cociente mismo puede converger a otro límite, positivo o negativo. Este límite, cuando exista, tiene un valor definido para cada valor particular de *x*; pero varía con *x*. Así, por ejemplo, si tomamos $f(x) = x^m$, siendo *m* un entero positivo, la razón de las diferencias infinitesimales será $\frac{(x+i)^m - x^m}{i} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^{m-2}i + \cdots + i^{m-1}$; y su límite será la cantidad $mx^{m-1}$, esto es, una nueva función de la variable *x*. Lo mismo ocurrirá generalmente; sólo que la forma de la nueva función que sirve de límite a la razón $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ dependerá de la forma de la función $y = f(x)$. Para indicar esta dependencia, damos a la nueva función el nombre de derivada y la designamos, usando un apóstrofe, por la notación $y'$ o $f'(x)$". Por su parte, Bolzano define la *derivada de una función* como "la cantidad $f'(x)$ hacia la que se aproxima el cociente $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ cuando $\Delta x$ se aproxima a cero". Finalmente, en el primer cuarto del siglo XIX la *derivada de una función* se define como:

$$f^{'}(x) = \lim_{h \to 0} \left( \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$$

Como *proposiciones* características de esta configuración, se tienen, entre otros, varios teoremas tales como: a) El teorema del valor medio para funciones derivables, así como la primera expresión para el resto en la fórmula de Taylor que hoy conocemos como la expresión de Lagrange del resto; b) "si *f(x)* es una función continua entre $x = x_0$ y $x = X$, entonces $\min_{[x_0,\ X]} f^{'}(x) \leq \frac{f(X)-f(x_0)}{X-x_0} \leq \max_{[x_0,\ X]} f^{'}(x)$, del cual se deduce que si $f^{'}(x)$ es continua entre $x = x_0$ y $x = x_0 + h$, entonces habrá un $\theta$ entre 0 y 1, tal que $\frac{[f(x_0+h)-f(x_0)]}{h} = f^{'}(x_0 + \theta h)$ (Cauchy)"; c) "$f(x)$ es continua en $x_0$ si para cualquier cantidad positiva $\varepsilon > 0$, existe otra cantidad positiva $\delta > 0$ de manera que, para todo punto del intervalo $|x - x_0| < \delta$ donde la función $f$ esté definida, se verifica que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (Weierstrass)"; d) la derivabilidad implica continuidad pero no viceversa.

En cuanto a los elementos lingüísticos propios de esta configuración, estamos de acuerdo con Ibarra y Gómez (2004), es formal, predominantemente algebraicos, en ocasiones apoyado en lenguajes geométricos. Durante esta etapa se introduce las notaciones que se conservan en la actualidad, por ejemplo $y^{'}$ o $f^{'}(x)$ para denotar la derivada de una función, se representó con $\varepsilon$ y $\delta$ a las cantidades infinitamente pequeñas que aparecen en la definición actual del límite; en general, el lenguaje simbólico característico del álgebra se puede ver en las definiciones de conceptos (y proposiciones) tales como límite, continuidad, derivada, entre otros. Así mismo, los *procedimientos* característicos de esta configuración son más aritméticos, es decir, predominan las manipulaciones algebraicas sustentadas en las propiedades y proposiciones establecidas; ejemplo de esto son las diversas demostraciones de teoremas sobre el cálculo diferencial.

Como señala Ibarra y Gómez (2004), los *argumentos* de esta configuración no presentan las incoherencias de las argumentaciones con infinitésimos ya que se ha conseguido fundamentar el análisis infinitesimal sobre conceptos aritméticos; primordialmente el de límite que fue la noción clave para fundamentar el objeto derivada.

## 8. Otras Generalizaciones de la Derivada

En los apartados anteriores, hemos realizado la descripción de las nueve configuraciones epistémicas identificadas en el estudio de la evolución histórica de la derivada de una función real de una sola variable. Sin embargo, es conveniente señalar la existencia de diversas generalizaciones que se han realizado sobre dicho objeto matemático, algunas más conocidas que otras en el campo de Didáctica de la Matemática. Por ejemplo, la *derivada parcial* que, en síntesis, es la derivada de una función de varias variables con respecto a una de esas variables, y que resulta de gran utilidad en ramas de las matemáticas tales como el cálculo de variaciones y la geometría diferencial. La *derivada parcial* describe la variación de una función real de dos o más variables en dirección de cada uno de los ejes coordenados. Existe una generalización llamada *derivada direccional*, que estudia la variación de una función en una dirección de un vector arbitrario, y se aplica tanto a funciones vectoriales reales como complejas.
Menos conocida es la definición de derivada en un punto que presentó Carathéodory en su libro *Theory of Functions of a Complex Variable*. Aunque Carathéodory presenta su definición dentro del marco de la teoría de funciones de variable compleja, Kuhn (1991) muestra que esta definición aplicada a funciones de variable real, facilita en gran parte el manejo demostrativo de algunos teoremas del cálculo diferencial tales como la regla de la cadena y el teorema de la función inversa. Posteriormente, Acosta y Delgado (1994) extienden la definición de Carathéodory a funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$.

En el marco de los espacios normados, específicamente para los espacios de Banach, tiene lugar otra definición de la derivada conocida como *derivada de Fréchet* o *diferencial total* (Pinzón y Paredes, 1999; Acosta y Delgado, 1994).

Otra definición importante de la derivada es la conocida con el nombre de *derivada de Gâteaux*, que fue introducida por Gâteaux en 1913 para funcionales. La *derivada de Gâteaux* es una generalización de la noción de *derivada direccional* y de la noción de *primera variación* manejada en el cálculo variacional para funciones de varias variables.

## 9. Significado Holístico de la Derivada

Nuestro esfuerzo por la reconstrucción de un significado global para la derivada, ha resultado en la identificación de nueve sistemas de prácticas los cuales llevan asociados, cada uno a su vez, una configuración epistémica y constituyen un significado parcial de la derivada. A estas nueve configuraciones, respectivamente asociadas a los sistemas de prácticas, las hemos denominado: 1) *la tangente en la matemática griega ($CE_1$)*; 2) *sobre la variación en la edad media ($CE_2$)*; 3) *métodos algebraicos para hallar tangentes ($CE_3$)*; 4) *concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes ($CE_4$)*; 5) *las ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos ($CE_5$)*; 6) *métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes ($CE_6$)*; 7) *el cálculo de fluxiones ($CE_7$)*; 8) *el cálculo de diferencias ($CE_8$)* y, 9) *la derivada como límite ($CE_9$).*

Es importante aclarar, que dentro del "enfoque ontosemiótico" del conocimiento matemático una de las maneras de entender el significado de un concepto es, desde la perspectiva pragmatista, en términos de los sistemas de prácticas en que dicho objeto interviene (significado sistémico). Tales sistemas de prácticas están ligados a tipos de situaciones-problemas, de donde se deriva la posibilidad de distinguir distintos significados cuando se abordan problemas diferentes.

De esta forma, el objeto derivada, a lo largo de su evolución histórica, ha adoptado nueve significados distintos (significados parciales), es decir, el objeto derivada se ha activado implícita o explícitamente en nueve subsistemas de prácticas cada uno de los cuales tiene una configuración asociada de objetos y procesos. Estas nueve configuraciones (descritas en los apartados anteriores), a pesar de ser distintas entre sí, algunas de ellas tienen similitudes, de manera que se pueden relacionar como se ilustra en el esquema de la figura 12.

En la base del esquema en la figura 12, se han considerado cronológicamente seis *sistemas de prácticas/significados parciales* que pueden verse como "primarios" en cuanto que, las configuraciones activadas en dichos sistemas ($CE_1$, $CE_2$, $CE_3$, $CE_4$, $CE_5$ y $CE_6$), tienen un carácter extensivo, es decir, se resuelven ciertos tipos de situaciones-problemas, con métodos y procedimientos particulares. Sin embargo, dentro de estas seis configuraciones "primarias", hay algunas que son similares entre sí. Tal es el caso de las configuraciones $CE_1$, $CE_3$ y $CE_6$ que, al activar significados parciales similares para la derivada, pueden considerarse similares, razón por la que se pueden agrupar dando origen a un sistema de prácticas más "genérico" en el cual se abordan situaciones-problemas sobre tangentes en general. A este sistema de prácticas con su configuración asociada, la hemos denominado "tangentes". Análogamente, las configuraciones $CE_2$ y $CE_4$ se pueden agrupar dando paso a un nuevo sistema más general, con su respectiva configuración asociada, la cual denominamos "variación, velocidades" ya que se abordan problemas de este tipo. La configuración $CE_5$, también la hemos denominado "máximos y mínimos".

Posteriormente Newton, apoyándose en la configuración subyacente al sistema de prácticas genérico “variación, velocidades”, desarrolla un nuevo *sistema de prácticas* de la derivada como fluxión, en el cual se activa una configuración más general ($CE_7$), de tal forma que los nuevos procedimientos, lenguajes, conceptos, definiciones, etc., de dicha configuración, son aplicados luego para resolver situaciones-problemas característicos de los sistemas de prácticas “tangentes”, “máximos y mínimos” y “variación, velocidades”, aspecto que se señala con las flechas punteadas que salen de $CE_7$ a los tres sistemas de prácticas genéricos. Del mismo modo Leibniz, apoyándose en la configuración asociada al sistema de prácticas “tangentes”, desarrolla un nuevo *sistema de prácticas* de la derivada como cociente de diferenciales en el que se activa una configuración más general ($CE_8$), la cual posteriormente aplica para la resolución de situaciones-problemas característicos de los sistemas de prácticas puestos en juego en las situaciones de cálculo de tangentes y de máximos y mínimos.

Finalmente, los matemáticos que sucedieron a Newton y Leibniz, tomando como base sus desarrollos ($CE_7$ y $CE_8$) generaron un nuevo *sistema de prácticas* de carácter formal de la derivada como límite del cociente de incrementos, el cual lleva asociado una configuración ($CE_9$) que constituye la formalización del objeto derivada. Las flechas punteadas que salen de $CE_9$ indican que los elementos de dicha configuración son aplicados para la solución de problemas propios de los sistemas de prácticas “tangentes”, “variación, velocidades” y “máximos y mínimos”.

De esta forma, vemos como el objeto derivada comienza a emerger de los *sistemas de prácticas* “primarios” los cuales básicamente pueden agruparse en tres sistemas de prácticas genéricos en los cuales se abordan problemáticas sobre: a) tangentes; b) máximos y mínimos; y c) variación. Las configuraciones asociadas a dichos sistemas de prácticas primarios, dan paso a nuevos sistemas de prácticas en los cuales se activan $CE_7$ y $CE_8$, mismas que alcanzan justificaciones formales en $CE_9$. El nivel de generalización de cada una de las configuraciones, también ha sido ilustrado en el esquema de la figura 12.

La consideración conjunta de los elementos, y sus relaciones, ilustrados en el esquema de la figura 12, es lo que conforma, primordialmente, el *significado epistémico global de la derivada*.

Las relaciones existentes entre las distintas configuraciones epistémicas identificadas en la figura 12, podrían seguir extendiéndose, por ejemplo la configuración $CE_7$ que tiene vinculado el significado de la derivada como fluxión, junto con algunas ideas de provenientes de las configuraciones $CE_8$ y $CE_{9,}$ dan lugar a un nuevo sistema de prácticas del cual emerge una nueva rama de las matemáticas: “El cálculo de variaciones”. Sin embargo, esto no es objeto de estudio de nuestra investigación, ya que sólo pretendíamos reconstruir el significado holístico para la derivada de una variable real que sirva de referencia para sistematizar los conocimientos de los profesores de educación secundaria/bachillerato sobre la derivada, en lo que respecta a la faceta o dimensión epistémica. No obstante, el *significado global* de la derivada quedaría incompleto si no consideráramos las distintas generalizaciones que se han realizado sobre dicho objeto matemático (ver apartado 9). Estas generalizaciones de la derivada constituyen el *conocimiento matemático avanzado* sobre el objeto derivada; lo que en términos del modelo de Ball y colaboradores sería el conocimiento en el horizonte matemático.

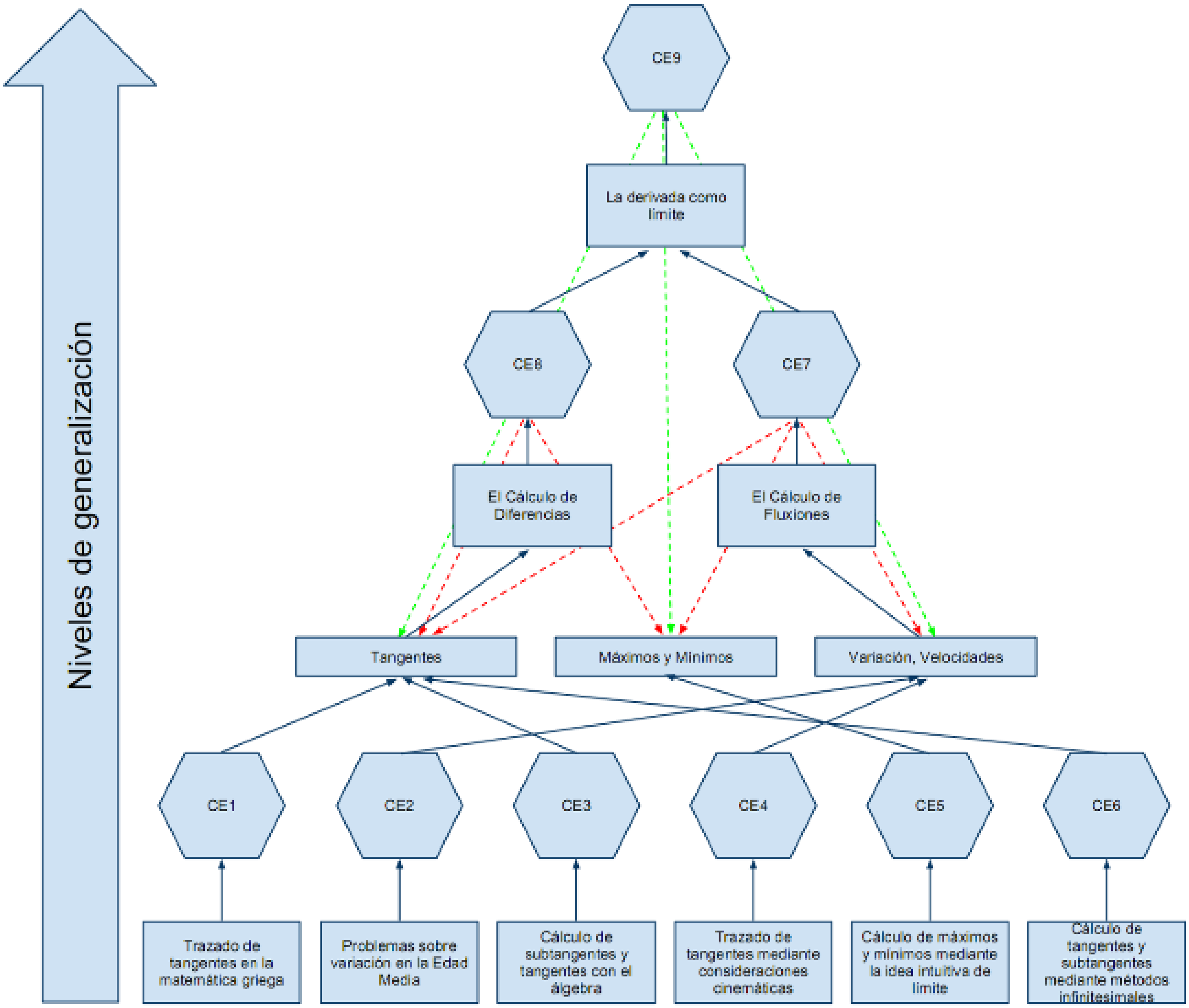


**Figura 12. Significado epistémico global de la derivada**

## 10. Síntesis e Implicaciones

La gran diversidad de investigaciones en el campo de didáctica de las matemáticas, referentes a los aspectos cognitivos e instruccionales sobre la derivada, plantea un reto a los formadores de profesores que sintetizamos con la pregunta: ¿Cuál es el conocimiento didáctico-matemático que necesita el profesorado de secundaria/ bachillerato con relación a la enseñanza de la noción de derivada? La complejidad y amplitud de esta cuestión nos ha llevado a focalizar la atención en un aspecto parcial, aunque relevante, como es la caracterización de los distintos significados del objeto derivada.

Nuestra propuesta de reconstrucción del significado global de la derivada resulta especialmente importante puesto que el diseño, implementación y evaluación de planes de formación matemática y de procesos instruccionales sobre un contenido matemático específico, requieren un estudio en profundidad sobre el significado de los objetos matemáticos que componen dicho contenido. Tal estudio debe aportar criterios para seleccionar los problemas y prácticas matemáticas a incluir en los planes y procesos de formación, según las necesidades sociales y profesionales del grupo de personas a quien se dirigen. Es decir, es a partir del significado holístico de un objeto, que se determina cuál o cuáles serán los significados pretendidos, implementados y evaluados, en una práctica educativa específica. De esta manera, es indudable que el *significado global de la derivada* es pieza clave del conocimiento didáctico-matemático del profesor.

Finalmente, los resultados aportados con este estudio pueden servir de punto de partida para el diseño de instrumentos de evaluación y desarrollo de conocimientos didácticos-matemáticos sobre dicha noción.

## Reconocimiento:

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación sobre formación de profesores, EDU2010-14947 (Universidad de Granada) y EDU 2009-08120/EDUC (Universidad de Barcelona). Ministerio de Ciencia e Innovación (MICINN), España.

## Referencias

ACOSTA, E., Y DELGADO, C. (1994). Fréchet vs Carathéodory. *The American Mathematical Monthly*, *v. 101*, *n.4*, pp. 332-338.

ANDERSEN, K. (1984). Las técnicas del cálculo, 1630-1660. En I. Grattan-Guinness (Ed.), *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica* (M. Martínez Trans.). (pp. 22-68). Madrid, España: Alianza Editorial.

ARTIGUE, M., BATANERO, C., Y KENT, P. (2007). Mathematics thinking and learning at post-secondary level. En F. Lester K. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national council of teachers of mathematics* (pp. 1011-1049). Charlotte, NC: Information Age.

BALL, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education, v.51*, pp. 241-247.

BALL, D. L., LUBIENSKI, S. T., Y MEWBORN, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

BISHOP, A. J., CLEMENTS, K., KEITEL, C., KILPATRICK, J. Y LEUNG, F. K. S. (Eds.). (2003). *Second International Handbook of Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer.

BOS, H. J. M. (1984). Newton, Leibniz y la tradición leibniziana. En I. Grattan-Guinness (Ed.), *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica* (M. Martínez Trans.). (pp. 69-124). Madrid: Alianza Universidad.

BOYER, C. B. (1999). *Historia de la matemática* (M. Martínez Trans.). Madrid: Alianza Editorial.

CANTORAL, R., Y FARFÁN, R. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo*. Australia: Thompson.

COLLETTE, J. (1993). *Historia de las matemáticas II*. Madrid: Siglo XXI.

DURÁN, A. (1996). *Historia con personajes de los conceptos del cálculo*. Madrid: Alianza Editorial.

ENGLISH, L. D., BARTOLINI-BUSI, M., JONES, G. A., LESH, R. Y TIROSH, D. (2002). *Handbook of International Research in Mathematics Education.* London: Lawrence Erlbaum Ass.

FONT, V. (2009). Formas de argumentación en el cálculo de la función derivada de la función $f(x)=x^2$ sin usar la definición por límites. *Unión, Revista Iberoamericana De Educación Matemática, v. 18*, pp. 15-28.

FONT, V. Y GODINO, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaçao Matemática Pesquisa*, *v. 8, n. 1*, pp.67-98.

FRANKE, M. L., KAZEMI, E. Y BATTEY, D. (2007). Understanding teaching and classroom practice in mathematics. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 225-256). Charlotte, N.C: NCTM and IAP.

GARCÍA, L., AZCÁRATE, C., Y MORENO, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, v. 9, n.* 1, pp. 85-116.

GAVILÁN, J. (2005). *El papel del profesor en la enseñanza de la derivada. Análisis desde una perspectiva cognitiva.* Tesis doctoral, Universidad de Sevilla, España.

GODINO, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, v. 20,* pp. 13-31.

GODINO, J. D., BATANERO, C., Y FONT, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, v. 39, n. 1,* pp. 127-135.

GONZÁLEZ, P. (1992). *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII: Una investigación histórica sobre las técnicas y métodos que condujeron al descubrimiento del cálculo infinitesimal*. Madrid: Alianza Editorial.

GONZÁLEZ, P. (2008). *Fermat y los orígenes del cálculo diferencial*. Madrid: Nivola.

GRABINER, J. (1981). *The origins of cauchy's rigorous calculus*. Cambridge, Massachusetts and London, England: The MIT Press.

GRABINER, J. (1983). The changing concept of change: The derivative from Fermat to Weierstrass. *Mathematics Magazine, v. 56, n.* 4, pp. 195-206.

GRATTAN-GUINNESS, I. (1984). La aparición del análisis matemático y los progresos en su fundamentación desde 1780 a 1800. En I. Grattan-Guinness (Ed.), *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630 - 1910. Una introducción histórica* (M. Martínez Trans.). (pp. 125-193). Madrid: Alianza Editorial.

HILL, H. C., BALL, D. L., Y SCHLLING, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, v. 39*, pp. 372-400.

HILL, H. C., SLEEP, L., LEWIS, J. M. Y BALL, D. L. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge: What knowledge matters. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 111-156). Charlotte, N.C: NCTM and IAP.

IBARRA, E., Y GÓMEZ, J. (2005). Estudio histórico-epistémico de la derivada. *Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas,* Universidad de Jaén, pp. 357-385.

KUHN, S. (1991). The derivative a la Carathéodory. *The American Mathematical Monthly, v. 98, n. 1*, pp. 40-44.

LLINARES, S. Y KRAINER, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education.* (pp. 429-459). Rotherdam/Taipei: Sense Publichers.

MORENO, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: Evolución, estado actual y retos futuros. *IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM),* Universidad de Córdoba, España, pp. 81-96.

PINZÓN, S., Y PAREDES, M. (1999). La derivada de Carathéodory en $\mathbb{R}^2$. Revista INTEGRACIÓN, v. 17, n. 2, pp. 65-98.

SÁNCHEZ, G., GARCÍA, M., Y LLINARES, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, v. 11, n. 2*, pp. 267-296.

SHULMAN, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, v. 15, n. 2,* pp. 4-14.

SHULMAN, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, v. 57, n. 1*, pp. 1-22.

SOWDER, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 157-224). Charlotte, N.C: NCTM and IAP.

VERA, F. (1970). *Cientificos griegos, 1, pitagoras, hipocrates, democrito, platon, aristoteles, teofrasto, eudemo de rodas, euclides, aristarco*. Madrid: Aguilar.

WILHELMI, M. R., GODINO, J. D., Y LACASTA, E (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathematiques, v. 27, n. 1*, pp. 77 - 120.