ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019vol21i3p188-208

Iconicidade: a produção de significações para o desenvolvimento do pensamento algébrico por alunos do 7.° ano

Iconicity the production of meanings for the development of the algebraic thinking by students from the 7th grade.

JEFFERSON TADEU GODOI PEREIRA [1]
ADAIR MENDES NACARATO [2]

Resumo

Este artigo é um recorte de uma pesquisa desenvolvida em uma sala de aula do 7. ° ano do ensino fundamental de uma escola pública estadual, na qual o professor atuou como pesquisador. Este recorte tem como objetivo apontar indícios do processo de iconicidade para o desenvolvimento do pensamento algébrico a partir das interações e das mediações em sala de aula. Os instrumentos de produção de dados consistiram de: videogravação de aula, registros dos alunos e diário de campo do pesquisador. O processo analítico, centrado em um episódio com sequência recursiva, pautou-se na abordagem histórico-cultural e nos estudos relativos ao pensamento algébrico. Como resultados, destacam-se o quanto a mediação é central na produção das significações e o quanto os alunos recorrem a tarefas desenvolvidas anteriormente para produzir novas generalizações.

Palavras-chave: *Perspectiva histórico-cultural, pensamento algébrico, pesquisa da própria prática.*

Abstract

This article is a clipping from a research developed on a State public elementary school classroom by students from the 7th grade in which the teacher acted as a researcher. This clipping has as a goal to point clues from the iconicity process for the development of the algebraic thinking starting from the interactions and mediations in the classroom. The production data tools consisted in: classroom video recording, students records and researcher field journal. The analytical process, focused on an episode with recursive sequence, ruled on the cultural historical approach and the relating studies on the algebraic thinking. As a result, it stands out how central mediation is on the production of meanings and how much the students use the developed tasks previously to produce new generalizations.

Keywords: *Historical-cultural perspective, algebraic thinking, practice research.*

[1] Universidade São Francisco; jefferson.tadeu1@gmail.com
[2] Universidade São Francisco; adamn@terra.com.br

Introdução

Este artigo analisa um episódio interativo[3], recorte de uma pesquisa de mestrado que teve como foco as produções de significações por alunos do 7. ° ano do ensino fundamental de uma escola pública do interior do estado de São Paulo. A investigação foi desenvolvida na sala de aula do próprio pesquisador – primeiro autor deste texto – e se caracteriza como uma pesquisa da própria prática.

Considerando o contexto o estudo, em que os papéis de pesquisador e professor coexistiram, optamos por utilizar o material didático da rede estadual paulista, cujas atividades – aqui denominadas tarefas – foram adaptadas com vistas ao alcance dos objetivos traçados para a investigação. Dentre as principais adaptações, destacamos a organização da sala de aula, com a dinâmica proposta por Smith e Stein (2012), e a metodologia de resolução de problemas sugerida por Van de Walle (2009).

As discussões teóricas tomam como referência a teoria histórico-cultural, com alguns de seus conceitos-chave, como o papel das interações e das mediações, a produção de significações e o papel da palavra e do outro para o processo de elaboração conceitual. Coerentemente com essa perspectiva teórica, tomamos os estudos de Luis Radford como base para as discussões sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Selecionamos uma das tarefas propostas no material para o recorte aqui apresentado; e, dela, elegemos um episódio que foi analisado na perspectiva da análise microgenética (GÓES, 2000), que parte da necessidade de observar minúcias presentes nos discursos produzidos, em suas formas oral e escrita. Visando atingir esta condição, utilizou-se videogravação das aulas, com posterior transcrição para a produção de dados, complementados pelos registros dos alunos e pelo diário de campo do pesquisador.

O objetivo do recorte aqui apresentado é apontar indícios do processo de iconicidade (RADFORD, 2006, 2008) para o desenvolvimento do pensamento algébrico a partir das interações e das mediações em sala de aula, que culminaram na produção de significações e generalizações algébricas em sequência recursiva. Justificamos a escolha de apenas um episódio como fonte de dados, pois a análise microgenética apoia-se em indícios de minúcias presentes no processo em observação; portanto, seu foco está no processo, e não no resultado final.

[3] Denomina-se episódio interativo um recorte de momento que retrata uma interação entre alunos ou entre alunos e professor, na qual emergem os conceitos necessários ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Tais episódios referem-se a diálogos ocorridos em sala de aula.

O artigo está organizado em quatro seções. Inicialmente apresentaremos as reflexões teóricas que subsidiaram o processo analítico; em seguida, descreveremos os procedimentos metodológicos e a dinâmica adotada em sala de aula; na sequência, reportaremos a análise do episódio selecionado; finalizaremos com algumas reflexões.

O desenvolvimento do pensamento algébrico na perspectiva histórico-cultural

Este artigo parte de pressupostos da teoria histórico-cultural, por considerar que a todo momento estamos imersos em construções históricas, as quais são apropriadas por nós e (re)construídas; consequentemente, produzimos significações conceituais. Para compreendermos esta situação, faremos uso do conceito de signo, fundamental nessa teoria. Fontana e Cruz (1997, p. 67, grifos do original) afirmam:

> O signo é comparado por Vigotski ao instrumento[4] e denominado por ele "instrumento psicológico". Tudo o que é utilizado pelo homem para representar, evocar ou tornar presente o que está ausente constitui um signo: a palavra, o desenho, os símbolos (como a bandeira ou o emblema de um time de futebol), etc.

Durante os processos envolvidos na produção do conhecimento, é fundamental a utilização consciente dos signos, especialmente durante as práticas de mediação desenvolvidas pelo docente. É por meio da mobilização desses signos que podemos construir relações entre os objetos que estão sendo estudados, dinamizando assim as conexões que se estabelecem entre os sujeitos imersos na produção observada.

Segundo Fontana e Cruz (1997, p. 73), tomando por base a teoria vigotskiana,

> para consolidar e dominar autonomamente as atividades e operações culturais, a criança [adolescente] necessita da mediação do outro. O mero contato da criança com os objetos do conhecimento ou mesmo a imersão em ambientes informadores e estimuladores não garante a aprendizagem nem promove necessariamente o desenvolvimento, uma vez que ela não tem, como indivíduo, instrumental para reorganizar ou recriar sozinha o processo cultural.

A mediação caracteriza-se como fundamental para o processo de elaboração conceitual, uma vez que, em meio às relações de comunicação que se estabelecem entre os sujeitos, ocorrem processos de produção de significados, ou mesmo um novo significado é construído para um signo já conhecido.

Por meio dessa dinâmica não linear de (re)construção de signos, cria-se um ambiente favorável à produção de significações, situação na qual o signo – por exemplo, a palavra

[4] Fontana e Cruz (1997, p. 66) definem instrumento como tudo aquilo que se interpõe entre o homem e o ambiente, ampliando e modificando suas formas de ação.

– , que é uma produção humana, age como elemento de mediação, que remete a algo, e é um operador, que faz com que se crie; ou, mesmo, um transformador, que modifica uma significação já existente. Smolka (2004, p. 56) aponta que,

> desse modo, a significação implica, mas não se restringe à representação. A representação, enquanto possibilidade de formação de imagens, ideias, pensamentos, tem um caráter, ou funciona, em um nível individual. Só que essas imagens, ideias, pensamento não se formam, não se compõem independentemente das relações entre pessoas, fora da trama de significações, isto é, sem a mediação, a operação com signos. O signo, como aquilo que se produziu e estabilizou nas relações interpessoais, age, repercute, reverbera nos sujeitos. Tem como característica a impregnação e a reversibilidade, isto é, afeta os sujeitos nas (e na história das) relações.

Tendo produzido significação, o sujeito tende a internalizar tais construções. A internalização, para Vigotski (1991), consiste em uma série de transformações que ocorrem tanto no âmbito social quanto no interior do indivíduo. Segundo o autor, o primeiro aspecto delas é o início da representação de uma atividade externa que começa a ser reconstruída internamente. É nesse momento que o indivíduo utilizará os signos, cuja ocorrência está impregnada de história. Já em um segundo momento, o autor indica que ocorrerá a mudança de um processo interpessoal, que se desenvolve no meio social, para um intrapessoal, no indivíduo.

Dentre os conceitos aqui apresentados, definidos pela teoria histórico-cultural, discutimos o que assumimos, neste estudo, como pensamento algébrico. Radford (2006), ao adotar a teoria histórico-cultural como referência em seus estudos, afirma que o pensamento algébrico é uma forma particular de refletir matematicamente e deixa clara a importância de defini-lo. Considera-o caracterizado por três elementos, sendo o primeiro o

> senso de *indeterminação* que é próprio de objetos algébricos básicos, como desconhecidos, variáveis e parâmetros. É a indeterminação (em oposição à determinação numérica) que torna possível, por exemplo, a substituição de uma variável ou de um objeto desconhecido por outro; não faz sentido substituir “3” por “3”, mas pode fazer sentido substituir um desconhecido por outro sob certas condições. (RADFORD, 2006, p. 2, grifo do autor, tradução livre)

Isso determina que, para a construção de uma situação algébrica, sejam empregados conceitos fundamentais, como incógnitas, variáveis e parâmetros. Conforme afirma Radford (2008), a não utilização de notação alfanumérica para a representação desses conceitos não descaracteriza a situação algébrica que se está a construir, pois o pensamento algébrico pode surgir por diferentes formas de representação semiótica.

Em continuidade, Radford (2006) define o segundo elemento fundamental para a construção do pensamento algébrico: o tratamento analítico dos objetos tidos como indeterminados.

Por fim, apresenta como terceiro elemento a representação dos objetos algébricos (incógnitas, variáveis e parâmetros) por meio de signos. Diferentemente das formas geométricas, por exemplo, esses objetos não possuem materialidade e necessitam de sua representação de forma indireta – por meio de letras, por exemplo.

Ao voltarmo-nos para as possibilidades de elaboração de generalizações, aplicadas às sequências numéricas e/ou simbólicas, no pensamento algébrico, especificamente no pensamento algébrico funcional, precisamos definir o objetivo a ser alcançado por meio da investigação do problema aqui proposto. Nesse sentido, Blanton e Kaput (2011, p. 7-8, grifo no original. tradução livre) auxiliam-nos:

> Focamo-nos aqui no *pensamento funcional* como uma corrente pela qual os professores podem construir uma generalidade em seu currículo e em sua instrução [ensino]. Conceituamos amplamente o pensamento funcional para incorporar a construção e a generalização de padrões e relações usando diversas ferramentas linguísticas e representacionais e tratando de relações generalizadas, ou funções, que resultam em objetos matemáticos úteis por si mesmos.

Aqui nos deparamos com duas possíveis eventualidades: generalização aritmética e generalização algébrica. Radford (2008) ressalta ser necessário o fenômeno de indeterminação para a ocorrência do pensamento algébrico e, para diferenciar a generalização aritmética da generalização algébrica, aponta:

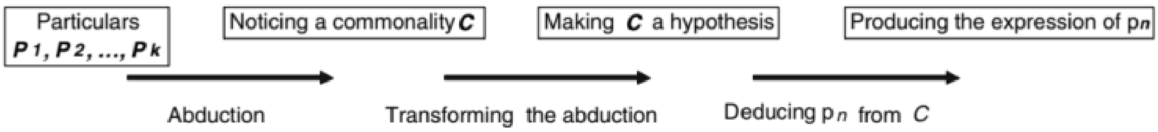
> A linha divisória entre a generalização aritmética e a algébrica de padrões deve, portanto, estar localizada em diferenças no que é calculável dentro de um domínio em oposição ao outro. Embora em ambos os domínios [no aritmético e no algébrico] algumas generalizações certamente ocorram, na álgebra, uma generalização levará a resultados que não podem ser alcançados dentro do domínio aritmético. (RADFORD, 2008, p. 2, tradução livre)

Assim, a generalização aritmética depende de encontrarmos um termo indeterminado da sequência de forma recursiva, ou seja, a partir de um termo antecessor, por meio de um pensamento aritmético. Diferentemente, a generalização algébrica decorre da obtenção de um termo indeterminado, com base na construção de um pensamento funcional, isto é, provém da observação de relações que se estabelecem entre as variáveis envolvidas na sequência.

Para definir de forma mais clara o que se compreende por generalização algébrica, apresentamos o modelo definido por Radford (2006): esse processo baseia-se na capacidade de apreender uma comunalidade percebida em alguns casos particulares (chamados de p_1, p_2, p_3, ..., p_k) e de estendê-la para todos os termos subsequentes (p_{k+1}, p_{k+2}, p_{k+3}, …), ou seja, envolve a habilidade de generalizar a regularidade observada e encontrar, de forma direta, qualquer termo da sequência observada.

Com o objetivo de ilustrar esse processo, o autor apresenta o seguinte esquema:

Figura 1 - A arquitetura da generalização algébrica de padrões



Fonte: Radford, 2008, p. 3

Na Figura 1, é possível notar que a generalização algébrica se inicia com a observação de casos particulares, a partir dos quais, com o auxílio do raciocínio abdutivo, são notadas comunalidades. Com base nessas observações, criam-se hipóteses, do que resultará uma expressão que deve representar a generalização elaborada, como exemplifica o esquema, com a dedução da expressão p_n a partir da comunalidade C.

Para a formação do pensamento algébrico, é essencial o tratamento de forma analítica, na situação observada, das variáveis envolvidas em procedimentos de cálculo, quer elas representem quantidades indeterminadas, quer definidas.

À medida que vai construindo um repertório de estratégias para a elaboração de generalizações, o sujeito se torna capaz de expandir a aplicação do caminho traçado para outras situações, como fenômeno de abstração, conforme afirmam Mason e Drury (2007, p. 7, grifos dos autores, tradução livre):

> Uma distinção é frequentemente desenhada, embora haja uma implícita e considerável variação por diferentes autores, entre *generalização* e *abstração*. Isso está relacionado a uma diferenciação entre generalizar o resultado de uma ação sobre objetos como propriedades dos objetos e generalizar (abstrair) essa ação para além dos próprios objetos. A ação abstraída é então disponibilizada a se realizar em outros objetos (presumivelmente similares) em outros contextos.

Desse processo de reconstrução das estratégias, por meio da abstração e da consequente aplicação a situações diferentes, resulta o conceito de iconicidade[5], apresentado por Radford (2008, p. 12, grifos do autor, tradução livre):

[5] Termo traduzido do inglês: *iconicity* (RADFORD, 2008)

> *Iconicidade* não é apenas o contraste entre duas formas conceituais dadas. É o processo pelo qual os alunos recorrem a experiências anteriores para orientar suas ações em uma nova situação. Em outras palavras, a *iconicidade* é baseada na projeção de uma experiência anterior para uma nova — uma projeção que trabalha na identificação progressiva do semelhante com o diferente e que possibilita, mediante um movimento de ida e volta, o surgimento de uma segunda forma conceitual (aqui um procedimento generalizante).

Essa discussão sobre iconicidade é que subsidiará a análise do excerto selecionado para este texto, buscando indícios sobre a recorrência dos alunos a tarefas já realizadas anteriormente.

Apresentadas as reflexões teóricas que sustentam este estudo, exporemos na sequência os procedimentos metodológicos da pesquisa.

Metodologia

Esta pesquisa caracteriza-se como uma investigação de abordagem qualitativa, partindo dos pressupostos da teoria histórico-cultural, construída por Lev S. Vigotski e seus seguidores. Tal abordagem justifica-se por compreendermos que nosso objetivo é analisar o processo: no cenário de pesquisa, os sujeitos participantes – alunos e professor-pesquisador – estão em constante transformação e desenvolvimento.

O estudo foi desenvolvido na sala de aula do professor-pesquisador, caracterizando-se como uma investigação da própria prática, como nos apresenta Ponte (2002).

Os questionamentos e as conclusões apresentados neste trabalho também se constituem como um exercício de reflexão sobre a prática desenvolvida em sala de aula, a fim de propiciar a (re)formulação e a tomada de consciência de processos pertinentes à atividade pedagógica.

A escola na qual foram produzidos os dados desta pesquisa integra a rede estadual de educação em uma região periférica de uma cidade de pequeno porte no interior do estado de São Paulo. Atende cerca de 260 alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, distribuídos nos períodos matutino e vespertino, e 250 do Ensino Médio, matriculados no período matutino ou no noturno.

Para o desenvolvimento desta pesquisa, foi escolhida a turma do 7.° ano A, composta por 32 alunos, com idades entre 12 e 13 anos. A maioria reside no mesmo bairro de localização da escola. A sequência de tarefas selecionadas foi trabalhada de setembro a novembro de 2017.

Como partimos dos pressupostos da teoria histórico-cultural, os procedimentos metodológicos – a organização da sala de aula e a análise microgenética dos dados produzidos – caracterizaram-se pela coerência com ela. Para o registro dos dados, utilizamos a videogravação de aulas, descrita por Góes (2000) como procedimento fundamental ao desenvolvimento de pesquisa embasada em uma metodologia microgenética. Somente com esse recurso é possível captar as demandas implicadas na construção de dados que realmente representem as produções realizadas, por conta dos diversos meios semióticos em que essas se apresentam. Dessa forma, são capturadas as múltiplas linguagens empregadas.

As videogravações foram transcritas para a realização das análises. De forma complementar, foi produzido pelo professor-pesquisador um diário de campo que o auxiliou no processo de compreensão das situações registradas pela videogravação.

Na transcrição, os episódios foram organizados em turnos sequenciais, denominados pela inicial *T*, seguida de uma numeração (por exemplo: T01, T02, T03...). A apresentação na íntegra do episódio selecionado justifica-se pelas características definidas pelos aportes teórico-metodológicos da teoria histórico-cultural e pela análise microgenética, que atentam para o movimento que ocorre durante as falas registradas em turnos. Para identificar os sujeitos, usamos nomes fictícios[6], e as falas do professor-pesquisador são precedidas pela letra *P*. Todas as falas diretas estão transcritas em itálico. Os dados entre colchetes referem-se a expressões gestuais, complementos de fala ou mesmo a aspectos importantes para a análise, os quais não são visíveis na linguagem oral transcrita.

Para promover um ambiente potencializador de interações entre os alunos, a sala de aula foi organizada em grupos de 4 a 5 alunos.

Pautados em práticas de ensino que visem à produção de significações e, consequentemente à construção do conhecimento, privilegiamos uma organização de aula baseada na resolução de problemas. Como Van de Walle (2009, p. 57, grifo do autor) afirma:

> quando os alunos se ocupam de tarefas [problemas] bem escolhidas baseadas na resolução de problemas e se concentram nos métodos de resolução, o que resulta são novas compreensões da matemática embutida na tarefa. Enquanto os estudantes estão ativamente procurando relações, analisando padrões, descobrindo que métodos funcionam e quais não funcionam e justificando resultados ou avaliando e desafiando os raciocínios dos outros, eles estão necessária e favoravelmente se engajando em um pensamento reflexivo sobre as ideias envolvidas.

Para o desenvolvimento da aula aqui apresentada, escolhemos um problema proposto pelo material curricular da rede pública do estado de São Paulo (Programa São Paulo Faz

[6] A presente pesquisa foi aprovada pelo Comitê de Ética e Pesquisa (CEP), por meio do processo CAAE 69062517.0.0000.5514.

Escola)[7], pois a escola em que se desenvolveu a pesquisa pertence à rede estadual de ensino, sob a orientação oficial da Secretaria de Educação. Ademais, identificamos este material como potencialmente favorável ao desenvolvimento do pensamento algébrico, em consonância com os referencias teóricos adotados na pesquisa. No entanto, fizemos ajustes nessas tarefas e adequamos a dinâmica de aula de matemática, de modo a manter coerência com as perspectivas teóricas adotadas, com vistas às interações, às mediações e à produção de significações.

Assim, para organizar os momentos a serem desenvolvidos durante a aula, partimos do modelo trazido por Smith e Stein (2012), que propõem modos de se trabalhar nessa perspectiva, e com a resolução de problemas, a partir dos seguintes pressupostos:

> Criar oportunidades baseadas em discussões para o aprendizado dos alunos exigirá aprendizado por parte de muitos professores. Primeiro, os professores precisarão aprender como selecionar e configurar tarefas [problemas] de instrução cognitivamente desafiadoras em suas salas de aula, uma vez que tais tarefas de alto nível fornecem a base para debates valiosos. [...] Em segundo lugar, os professores devem aprender a apoiar seus alunos à medida que estes se envolvem e discutem suas soluções para tarefas cognitivamente desafiadoras. (SMITH; STEIN, 2012, p. 01, tradução livre)

Para que o docente possa orquestrar uma aula que utiliza a resolução de problemas, objetivando a construção de significações, tanto os alunos como o professor devem se colocar em constante dinâmica de aprendizado, buscando construir um cenário potencializador dos processos de (re)construção do conhecimento. Para auxiliar a organização dessa dinâmica, Smith e Stein (2012) sugerem que uma aula que tome por base a resolução de problemas seja desenvolvida em três fases: o lançamento, a exploração e a discussão.

Na fase do *lançamento* o professor apresenta o problema a ser resolvido, além das ferramentas disponíveis para essa tarefa. Nesta pesquisa, o professor-pesquisador apresentou a tarefa aos alunos, orientando-os como trabalhar.

Logo após, procede-se à *exploração*, em que se discute o problema a ser solucionado. Como apontam Smith e Stein (2012), as discussões devem ser realizadas em pares ou grupos, priorizando a interação. Nessa fase, o professor-pesquisador percorreu os grupos, realizando mediações, com o objetivo de auxiliar os alunos na elaboração das estratégias de resolução, e iniciou o processo de seleção e sequenciação de estratégias vistas como potenciais para a próxima fase de desenvolvimento da aula, a qual visa socializar as estratégias desenvolvidas e promover conexões entre elas.

[7] Programa criado pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (2008), o qual é constituído por currículo oficial e por materiais didáticos padronizados em todas as escolas pertencentes a esta esfera.

Por fim, há a fase do *discutir e resumir*. É quando os alunos apresentam as soluções elaboradas e suas explicações e justificativas. O que se busca não é uma homogeneidade de respostas (corretas e incorretas), mas a ocorrência de contrastes entre as diferentes soluções, com o escopo da formação de significações em cada caminho descrito pelos alunos. Em meio a essa dinâmica, é preciso criar um ambiente propício para discussões, a fim de chegar ao conceito de que a tarefa em questão objetiva tratar. Nesta fase, após o desenvolvimento das estratégias de resolução pelos grupos de alunos, foram socializadas as produções, com a mediação do professor-pesquisador, para promover o debate em torno das situações apresentadas.

O problema aqui utilizado para a análise microgenética fez parte de uma sequência composta por nove propostas, retiradas do material didático da rede pública do estado de São Paulo, cada uma objetivando uma situação de generalização algébrica por meio da observação de sequências. O Quadro 1 descreve cada uma destas propostas e indica as datas de cada uma das aplicações:

Quadro 1 - Cronograma de tarefas propostas: investigando sequências por meio da aritmética

Data	Problema proposto	Descrição da realizada	Potencialidades
27/09/2017	P1	Identificar a ocorrência de uma sequência infinita não numérica (símbolos).	Levantar hipóteses sobre diferentes formas de compreender uma sequência infinita não numérica. Criar caminhos para prever a ocorrência de símbolos em posições da sequência inacessíveis.
04/10/2017	P2	Elaborar regras para a previsão de termos inacessíveis de sequências não numéricas.	Possibilitar o desenvolvimento de discussões sobre formas de elaborar regras de generalização.
19/10/2017	P3	Utilizar regras elaboradas para prever termos inacessíveis.	Possibilitar o desenvolvimento de argumentos favoráveis ou contrários às regras de generalização criadas anteriormente, podendo chegar a uma reelaboração delas.
25/10/2017	P4	Criar generalizações por intermédio da observação do padrão de ocorrência de um símbolo específico.	Permitir a expansão do conceito de generalização por meio da observação de determinado símbolo na sequência.
26/10/2017	P5	Compreender um problema de situação concreta, com aplicação de sequência, buscando a generalização para casos específicos.	Elaborar regras de formação para sequências, baseadas na observação de termos específicos.
01/11/2017	P6	Utilizando uma sequência infinita, obtida por meio do cálculo de potências de uma	Criar relação entre o campo aritmético e o algébrico por meio de cálculo e elaboração de

		base definida, observar a regularidade em uma das casas decimais.	generalizações, analisando uma sequência.
08/11/2017	P7	Por meio de um padrão visual (geométrico), compreender uma sequência infinita e elaborar uma regra de generalização para os termos.	Expandir as possibilidades de generalização utilizando um padrão visual.
16/11/2017 21/11/2017 22/11/2017	P8	Por meio de um padrão visual, compor uma regra de generalização para a previsão de termos, traduzindo da língua materna para a linguagem algébrica.	Oportunizar o contato com a linguagem algébrica mediante a elaboração de regra de generalização.
23/11/2017 24/11/2017 28/11/2017 29/11/2017 30/11/2017	P9	Investigar sequências infinitas, objetivando a criação de uma regra de generalização, utilizando para expressão a linguagem algébrica.	Expandir a possibilidade de expressão das regularidades verificadas por meio da linguagem algébrica.

Fonte: Elaboração do autor

Em especial, para o nosso recorte, destacamos o problema 9, escolhido para compor as investigações trazidas neste artigo, em razão de nosso interesse em identificar se os alunos haviam se apropriado de ferramentas matemáticas utilizadas anteriormente para resolver outras tarefas e se haviam elaborado algumas generalizações. Por ferramentas matemáticas compreendemos todos os possíveis suportes de aprendizagem, não apenas físicos ou manipulativos. Eles envolvem desde ferramentas constituídas a partir da linguagem oral, da notação escrita ou de qualquer outro instrumento por meio do qual o aluno possa pensar matematicamente. Portanto, segundo Hiebert *et al.* (1997), consideramos três tipos de ferramenta: linguagem, material e símbolos.

Tendo já descrito a metodologia adotada nas aulas para a produção de dados, apresentaremos, na sequência, a análise do episódio selecionado para este texto, centrada no processo de produção de significações. Explicitaremos aqui apenas uma das possíveis dimensões que emergem de investigações relativas ao pensamento algébrico.

A "iconicidade" – relações que vão se construindo no desenvolvimento do pensamento algébrico

Este episódio foi retirado das investigações realizadas no dia 29 de novembro de 2017 como parte integrante da resolução da nona tarefa. É importante destacar que tal problema já estava sendo executado há três dias, e o evento aqui descrito ocorreu no último dia de seu desenvolvimento. Os alunos analisavam a quarta sequência e estavam na fase de *exploração* do trabalho; e o professor-pesquisador, na fase do monitoramento (Figuras 2 e 3).

Figura 2 – Enunciado problema proposto

13. Em cada uma das sequências a seguir, faça o que se pede.

I. Desenhe a próxima figura da sequência.

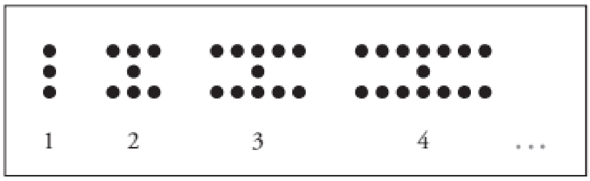
II. Calcule o número de bolinhas das figuras que ocupam a 5ª e a 20ª posição.

III. Escreva uma fórmula que relacione o número **N** de bolinhas com a posição **P** que ocupa a figura na sequência.

Fonte: São Paulo, 2014a, p. 58)

Figura 3 - Sequência 4, contida na nona tarefa proposta

Sequência 4



II. 5ª: ______ / 20ª: ______

III. N = ____________________

Fonte: São Paulo, 2014a, p. 58

Na sequência trazemos os diálogos ocorridos.

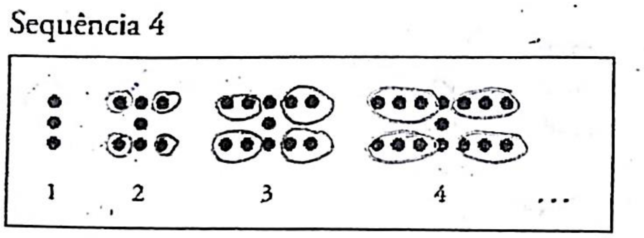
T 01 P: *Contem para mim o que vocês estão fazendo.*

T 02 Eliana: *Estamos resolvendo a sequência 4.*

T 03 Mateus: *Como a Eliana disse, se tirar esse do meio, fica número par* [faz referência às bolinhas situadas no centro de cada figura].

T 04 Eliana: *É, se somarmos as partes* [menciona as bolinhas contidas na linha superior e na linha inferior de cada figura e circula-as, sendo que elas se dividem em quatro grupos, conforme ilustra a Figura 4]

Figura 4 – Registro realizado pelos alunos



Fonte: Acervo do pesquisador

T 05 P: *Então vocês estão me falando que, em cada lado da figura, ficariam* [aponta para linha superior] *1 e 1* [linha inferior, referência à Figura 2 da sequência], *2 e 2* [indica a Figura 3 da sequência], *3 e 3* [trata da Figura 4 da sequência]*?*

T 06 Mateus: *E o meio sempre é igual.*

T 07 P: *Legal, mas aí como podemos fazer para encontrar a figura 20?*

T 08 Eliana: *Nós fizemos 20 vezes 4.*

T 09 P: *Então vocês fizeram a posição vezes 4?*

T 10 Eliana: *Sim, aí daria 80.*

T 11 P: *Antes de utilizarmos o pensamento que vocês elaboraram, como podemos verificar se ele está correto?*

T 12 Gabriele: *Podemos realizar um teste.*

T 13 P: *E como seria este teste?*

T 14 Gabriele: *Hum, poderíamos pegar uma figura que já sabemos quantas* [bolinhas] *tem.*

T 15 Eliana: *Vamos pegar a Figura 3, então.*

T 16 P: *Pode ser. Como foi o pensamento de vocês, mesmo?*

T 17 Mateus: *Vezes 4* [a posição].

T 18 Eliana: *Aí ficaria 3 vezes 4, que dá 12.*

T 19 Mateus: *Ih, na terceira não tem 12, tem 11.*

T 20 P: *E se tentarmos criar uma relação entre a quantidade de bolinhas em cada ponta da figura* [referindo-se à separação em grupos de bolinhas realizadas na figura] *com a posição da figura?*

T 21 Gabriele: *Oh, professor, vê se tá certo: na primeira figura, não tinha nenhuma bolinha; na segunda, tinha 1; na terceira, tinha 2; na quarta, tinha 3.*

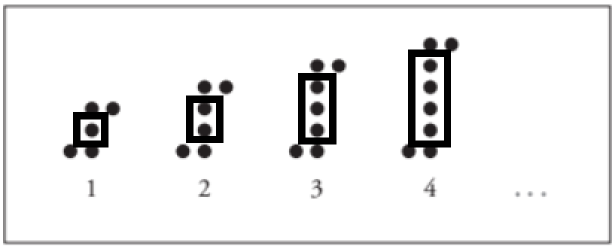
T 22 P: *Pode ser interessante isso.*

T 23 Mateus: *No anterior* [fala da sequência 1 do mesmo problema – Figura 5 abaixo] *estava imitando a posição da figura* [relaciona a variável *posição da figura* com a quantidade de bolinhas]*, mas aqui não é isso. É uma a menos.*

Figura 5 - Sequência 1 do problema proposto[8]

[8] Apresentamos a sequência 1, à qual o aluno se refere, para que o leitor possa acompanhar o movimento de pensamento dos alunos neste diálogo.

Sequência 1



Fonte: São Paulo, 2014a, p. 58

T 24 Eliana: *É, então na 20 tem que ser uma a menos, 19.*

T 25 Mateus: *Aí fica 19 aqui, 19 aqui, 19 aqui, 19 aqui* [fala de cada uma das pontas destacadas na sequência].

T 26 Gabriele: *Aí fica 4 vezes 19.*

T 27 Eliana: *Vai ficar faltando as 3 do meio* [discorre sobre a parte constante observada].

T 28 Mateus: *Então fica 79.*

T 29 P: *Acho que temos uma boa resposta.*

No início do episódio, no T01, o professor-pesquisador questiona o grupo de alunos sobre o que estavam resolvendo no momento. De prontidão, um dos estudantes informa que o grupo está resolvendo a sequência 4 do problema proposto.

No T03, Mateus começa sua explicação sobre os pensamentos e as observações que estão sendo desenvolvidos pelo grupo em torno da sequência observada. Percebemos, durante sua fala, que ele parte de estratégias já utilizadas em outras atividades, como a observação de características da disposição espacial das bolinhas que formam as figuras das sequências. Podemos afirmar que há indícios do início de um processo de abstração (MASON; DRURY, 2007). Tal constatação pode ser reafirmada com base na fala de Eliana (T04), quando ela apresenta sua posição, fundamentando-a na divisão das bolinhas da figura em grupos iguais. Também é relevante destacar que a aluna usa a representação figural da sequência, agrupando bolinhas, conforme indica a Figura 4. Esta ocorrência se vincula ao processo de formação de imagens como uma representação da operação que se está a desenvolver, utilizando os signos ali envolvidos, em meio a uma trama de significações construídas, não individualmente, mas pelas relações interpessoais que se estabelecem durante o processo de investigação (SMOLKA, 2004). No caso, Eliana busca por uma representação figural para explicar seu raciocínio aos colegas; recorre, portanto, a uma ferramenta representacional associada a uma linguística – a palavra.

Em continuidade ao diálogo, o professor-pesquisador busca consolidar a estratégia dos alunos para a divisão das figuras em partes. Chama a atenção para a simetria entre os grupos circulados pelos alunos, conforme a Figura 4.

Já no T06, Mateus observa a ocorrência de uma parte constante em todas as figuras apresentadas na sequência. Assim, deixa pistas de que nesse momento usa um repertório de soluções aplicadas em situações anteriores, ocorrendo, destarte, mais indícios do processo de abstração.

Quando o professor-pesquisador pergunta (T07) aos alunos como poderiam encontrar a quantidade de bolinhas da 20.ª figura da sequência, quase instantaneamente Eliana aponta como solução a multiplicação *20 vezes 4*. Todavia, não atenta para a questão levantada por *Mateus* sobre a parte constante de todas as figuras.

Respondendo a tal produção, após os estudantes confirmarem a intenção de multiplicar a posição da figura buscada pelo número 4, o professor-pesquisador sugere a eles que busquem uma forma de corroborar o pensamento desenvolvido, de modo a comprovar a validade da sentença elaborada. Tal solicitação é inerente ao pensamento algébrico, exige que se busquem ferramentas matemáticas para ratificar uma hipótese – no caso, eles recorrem ao desenho, para visualizar a comunalidade. Esse é suporte para o processo de generalização, pois a hipótese precisa ser validada para um caso qualquer. Para isso, no T12 e no T14, Gabriele propõe que eles desenvolvam um teste baseado em uma figura acessível da sequência para calcular sua quantidade de bolinhas e confrontar esse resultado com a quantidade real observada. Dessa forma, ela incorpora à estratégia de resolução procedimentos já usados em tarefas anteriores. Podemos também identificar indícios da ocorrência do processo de iconicidade definido por Radford (2008), pois, para solucionar o problema, os alunos fazem uso de experiências previamente aplicadas em situações anteriores, projetando-as nas novas situações. O movimento que aqui ocorre se substancia na identificação das semelhanças entre as situações já resolvidas e a que está sendo investigada no momento, o que também integra o conceito de iconicidade.

Utilizando os resultados desse teste (T19), Mateus conclui que a hipótese de generalização elaborada pelo grupo não é válida, pois, conforme Eliana sugere (T15), se aplicássemos essa fórmula à 3ª figura da sequência, teríamos a quantidade $4.3 = 12$, porém, na imagem em questão, há apenas 11 bolinhas. Isso leva o grupo à rejeição da conjectura levantada. Conforme o quadro teórico apresentado por Radford (2006, 2008), embora a estratégia traçada esteja embasada nas semelhanças entre as várias situações de generalização investigadas até o momento, chegamos à conclusão de que a hipótese deve ser rejeitada. Ou seja, na arquitetura da generalização algébrica de padrões proposta pelo autor (Figura 1), há um retorno à procura de comunalidades entre os casos particulares da sequência analisada. Neste momento, podemos apontar indícios da utilização de estratégias traçadas anteriormente, sem conexões entre as comunalidades observadas em situação anterior e as observadas na situação atual, descaracterizando o processo de abstração mencionado, pois o procedimento de abdução (RADFORD, 2008) dessas comunalidades não fora concretizado de forma a identificar todos os aspectos necessários para compor a generalização algébrica objetivada.

Continuando as mediações, o professor-pesquisador propõe (T20) uma tentativa de relacionar a posição da figura com a quantidade de bolinhas que a compõem. Tal proposta vincula-se ao papel do professor na construção do pensamento matemático dos alunos: ele é aquele que fornece pistas para os alunos solucionarem a situação proposta. Logo em seguida, Gabriele observa e destaca uma possível relação entre a quantidade de bolinhas de cada conjunto circulado, conforme indica a Figura 4, e a posição da figura na sequência. Em T23, Mateus faz referência à sequência anterior (sequência 1 dessa mesma tarefa), apontando que nela havia uma "imitação" da posição da figura, pela quantidade de bolinhas observada em certa parte de cada figura. Comparando a situação anterior e a presente sequência, ele afirma que "*é menos uma*" e menciona a conexão entre a quantidade de bolinhas em cada grupo circulado e a posição de cada figura. Ou seja, nesse momento, ele traz as experiências anteriores para resolver a situação proposta.

Do T24 ao T26, Eliana, Mateus e Gabriele concluem que a 20.ª figura terá 19 bolinhas em cada um dos quatro grupos, totalizando $4.19 = 76$. Tal relato explicita que os alunos apresentam indícios do desenvolvimento de um pensamento funcional, pois estabelecem uma relação de dependência entre a posição da figura e o total de bolinhas.

Já no fim do episódio, Eliana (T27) chama a atenção para a necessidade de acrescentarmos a quantidade constante observada em todas as figuras. Ou seja, ao cálculo realizado anteriormente, deveríamos adicionar 3, chegando ao resultado final: 79 bolinhas para a 20.ª figura.

Destacamos, nas interpretações aqui apresentadas, a importância do trabalho colaborativo desenvolvido pelos alunos e os vários momentos em que a produção de um indivíduo colabora com a de outro. Segundo argumentos de Vigotski (1991), as atividades em grupo são grandes potencializadoras do ensino e da aprendizagem, pois todo o processo de pensamento (intrapessoal) é mediado pelas relações estabelecidas com outros sujeitos (fator interpessoal). O autor enfatiza a importância da atividade de imitação[9], imprescindível à aprendizagem, pois promove a internalização do conceito investigado.

Durante o percurso descrito anteriormente, vários foram os momentos em que os alunos usaram recursos trabalhados em situações anteriores para desenhar sua estratégia de resolução para a tarefa em estudo. Tais referências formam-se pela experimentação individual dos grupos, por sugestões do pesquisador e pela socialização, entre os grupos, de estratégias realizadas.

O presente episódio deixa ver que o conhecimento objetificado nesta pesquisa – a elaboração de generalizações algébricas – apresenta-se em níveis diferentes. As inter-relações são importantes e necessárias para construir generalizações e, em consequência, consolidar o pensamento funcional. Diante de tal necessidade, criar referências para as situações experienciadas faz-se uma importante estratégia na busca pelo objeto do saber, situação em que ocorre o fenômeno da iconicidade (RADFORD, 2008).

Quando os alunos comparam situações já trabalhadas em outros momentos, buscam possíveis relações de comunalidade ou não entre o objeto que está sendo investigado e esse repertório de experiências. Nessa procura pelo que é semelhante ou diferente, os estudantes podem construir suas hipóteses, utilizando, para isso, a abdução, em que características comuns são apresentadas por meio de hipóteses.

Como também pode ser observado no episódio, um processo pautado no conceito de *iconicidade* muito provavelmente não se dá de forma linear, pois ocorrem idas e vindas – hipóteses são levantadas e, em seguida, refutadas, com base em outras percepções e relações estabelecidas. Nesse movimento, o diálogo é fundamental para uma cultura social de aula de matemática. A análise e a refutação das hipóteses possibilitam reflexões de todo o grupo. Podemos relacionar essas afirmações com o modelo proposto por Radford (2008) apresentado na Figura 1 deste artigo. Na arquitetura sugerida, é descrito o processo de construção da generalização algébrica a partir de padrões. Embora sejam apresentadas etapas para esse processo, há possibilidade de retorno às etapas anteriores, sempre que for identificada alguma falha no caminho que está sendo traçado: verificar alguma comunalidade inválida deve gerar a refutação da hipótese construída. E esse foi o processo dos estudantes desse grupo.

[9] Segundo Vigotski (1991), compreende-se como imitação o processo de reconstrução interna das operações externas, na qual o sujeito desempenha um papel ativo, tendo a possibilidade de desenvolver um novo conceito.

Por fim, destacamos que, mais do que a simples utilização de estratégias de raciocínio já aplicadas, tal movimento permite, por meio das novas inter-relações construídas entre os níveis do objeto do conhecimento, o surgimento de uma nova forma conceitual, isto é, a elaboração de um novo conceito. Essa circunstância manifesta-se neste episódio quando os alunos se referem a estratégias já utilizadas em outros momentos e, a partir delas, constroem uma nova. Elaboram, assim, uma generalização.

Para finalizar

A análise realizada permite-nos destacar a importância das relações sociais e das interações em sala de aula para a produção de significações. O papel do outro é de fundamental importância para a construção de um ambiente de aprendizagem voltado à produção de conhecimento e sua apropriação. Portanto, referendamos o aporte teórico deste trabalho, que destaca a relevância da teoria histórico-cultural para a análise de episódios interativos em sala de aula.

Não são raros os momentos em que identificamos indícios da contribuição do processo de mediação, principalmente por meio da palavra e dos gestos, para a produção das significações.

Nesta dinâmica, apresenta-se como fundamental a condição do docente como sujeito consciente dessas ocorrências, em especial da importância dos signos, construídos por meio da palavra, que vão sendo apropriados pelos sujeitos participantes desta investigação, cujo objetivo é possibilitar processos de generalização. Assim, tanto as suas perguntas quanto as pistas que oferece aos alunos possibilitam avanços nesse processo.

Nessa proposta de construção do conhecimento e sua apropriação pelos alunos encontramos indícios de processos que primeiramente se dão em um campo interpessoal e, posteriormente, no campo intrapessoal, quando realmente o conceito que está sendo elaborado é apropriado pelo sujeito. No caso, a fala de um aluno mobilizava os demais para pensarem na estratégia proposta.

Quanto ao processo de elaboração do pensamento algébrico, pode-se interpretar, com base no episódio aqui analisado, que o modelo proposto por Radford (2008) pôde se consolidar. Identificamos a busca dos alunos pelas chamadas comunalidades presentes nas sequências numérico-simbólicas analisadas durante o problema proposto, o que chamamos de processo de abdução. Isso porque elegemos a possibilidade da construção de relações entre estratégias construídas anteriormente, buscando, desse modo, resolver uma nova situação com conceitos apropriados anteriormente. Tal fenômeno pode ser observado durante as situações aqui apresentadas, trazendo o que definimos como processo de abstração (MASON; DRURY, 2007).

Ressaltamos também que, em um primeiro momento, embora se encontrem características deste processo, ele não se apresenta de forma consistente, pois, durante a adução das comunalidades necessárias para a elaboração da generalização algébrica, não foram observados aspectos suficientes para o levantamento de uma hipótese de generalização válida. Apesar do estabelecimento de uma relação entre a posição que determinada figura ocupa na sequência e a quantidade de bolinhas observada em parte específica da figura, foi desconsiderada a ocorrência de parte constante na composição destas, situação que acabou por invalidar a hipótese levantada.

Pelo processo de mediação, utilizando-se da palavra, os alunos acabaram por notar as comunalidades faltantes e conseguiram deduzir a generalização buscada. Embora essa generalização tenha sido em linguagem materna, pode-se dizer que eles estavam próximos de uma generalização simbólica, notacional. Isso ocorreu na síntese final da tarefa, quando todos os grupos socializaram suas estratégias e, coletivamente, chegaram à fórmula: $T = 4. (n - 1) + 3$, onde n representa a posição da figura.

A sequência proposta no material curricular da rede estadual paulista tem potencial para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, no que se refere ao processo de iconicidade, pois, da forma como as atividades foram elaboradas, os alunos, em cada tarefa proposta, conseguiam utilizar as apropriações das tarefas anteriores para produzir generalizações. No entanto, o papel do professor-pesquisador foi determinante, visto que, por suas apropriações teóricas, tanto da teoria histórico-cultural quanto da proposta de Smith e Stein (2012), pôde organizar uma dinâmica de sala de aula que possibilitasse as interações, as mediações entre os atores na sala de aula, negociando e produzindo significações. Isso sinaliza que o material, por si só, não é suficiente, pois o olhar teórico do professor faz a diferença nos modos de orquestrar a sala de aula.

Finalmente, reiteramos o nosso objetivo para este texto: analisar apenas um episódio de sala de aula, de modo a apontar para possibilidade de uma dinâmica interativa entre alunos e entre eles e o professor, para promover processos de generalização. Foi possível constatar o quanto os alunos se envolveram nas discussões e buscaram pela validação de uma fórmula que, embora em linguagem materna, indicasse a dependência entre a posição da figura e o total de elementos de uma figura qualquer.

Referências

BLANTON, Maria L.; KAPUT, James J. Functional Thinking as a route into algebra in the elementary grades. *In*: CAI, Jinfa; KNUTH, Eric. **Early algebraization**: a global dialogue from multiple perspectives. 1. ed. Berlin: Springer, 2011. p. 5-23.

FONTANA, Roseli; CRUZ, Nazaré. **Psicologia e trabalho pedagógico**. São Paulo: Atual, 1997.

GOÉS, Maria Cecília Rafael de. A abordagem microgenética na matriz histórico-cultural: uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade. **Caderno Cedes**, Campinas, ano XX, n. 50, p. 9-25, abr. 2000.

HIEBERT, James; CARPENTER, Thomas P.; FENNEMA, Elizabeth; FUSON, Karen; WEARNE, Diane; MURRAY, Hanlie. **Making sense**: teaching and learning mathematics with understanding. 1. ed. Portsmouth: Heinemann, 1997.

MASON, Jason; DRURY, Helen Studies in the zone proximal awareness. *In*: ANNUAL CONFERENCE OF THE MATHEMATICS EDUCATION RESEARCH GROUP OF AUSTRALASIA, 30., 2007, Hobart. **Proceedings** […]. Adelaide: Merga, 2007. v. 1, p. 42-58.

PONTE, João Pedro da. Investigar a nossa própria prática. *In*: GRUPO DE TRABALHO SOBRE INVESTIGAÇÃO (ed.). **Reflectir e investigar sobre a prática profissional**. 1. ed. Lisboa: APM, 2002. p. 5-28.

RADFORD, Luis. Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. *In*: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 28., 2006, Bergen. **Proceedings** […]. Mérida: Universidad Pedagógica Nacional, 2006. v. 1, p. 2-21,

_____. Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. **ZDM**, Dordrecht, v. 40, n. 1, p. 83-96, 2008.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Caderno do aluno**: 6ª série/7° ano - Matemática. São Paulo, 2014a.

_____. Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo**: Matemática. São Paulo, 2014b.

SMITH, Margaret S.; STEIN, Mary Kay. **5 practices for orchestrating productive mathematics discussions**. 1. ed. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, 2012.

SMOLKA, Ana Luiza Bustamante. Sobre significação e sentido: uma contribuição à proposta de rede de significações. In: ROSSETI-FERREIRA, Maria Clotilde; et. Al. (Orgs). **A rede de significações e o estudo do desenvolvimento humano.** São Paulo: Editora Penso, 2004, p. 42-59

VAN DE WALLE, J. **Matemática do ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Tradução de Paulo Henrique Colonese. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VIGOTSKI, Lev Semenovitch. **A formação social da mente**. 4. ed. Tradução de José Cipolla Neto, Luis Silveira Menna Barreto, Solange Castro Afeche. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

Texto recebido: 28/07/2019

Texto aprovado: 02/12/2019