EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019vol21i3p96-118

O estudo de sequências na Educação Algébrica nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental

The study of sequences in Algebraic Education in the Early Years of Elementary School

---

ADRIANA JUNGBLUTH [1]

EVERALDO SILVEIRA [2]

REGINA CÉLIA GRANDO[3]

Resumo

Este artigo se propõe a descrever e compreender o uso de padrões em sequências repetitivas e recursivas, que podem contribuir para desenvolver a ideia de generalização, promovendo o pensamento algébrico de alunos dos Anos Iniciais. A pesquisa faz parte das discussões de um grupo de estudos da UFSC, que vem se debruçando sobre o pensamento algébrico na infância, dada a importância do tema, afinal, a Álgebra é uma das cinco unidades temáticas da Matemática na BNCC 2017. O artigo apresenta definições de autores que explicam as características das sequências repetitivas e recursivas, traz exemplos encontrados em livros didáticos e disponíveis na literatura sobre o assunto, apontando como os padrões oportunizam ensinar e aprender Matemática com significado, além de desenvolver o pensamento algébrico dos alunos.

Palavras-chave: *Generalização de padrões, Pensamento algébrico, Educação Algébrica, Anos Iniciais do Ensino Fundamental.*

Abstract

This article seeks to describe and make sense of the use of patterns in repetitive and recursive sequences, which can contribute to the development of the idea of generalization, promoting the algebraic thinking of students in the early years of elementary school. This research is derived from the discussions of a study group of UFSC, which has been investigating algebraic thinking in childhood, due to its importance as one of the five mathematical units of the National Common Core Curriculum (BNCC) 2017. This article presents definitions of authors, which explain the characteristics of repetitive and recursive sequences, bring examples found in textbooks and available in the literature on the subject, showing how patterns enable the teaching and learning of meaningful mathematics, and the development students' algebraic thinking.

Keywords: *Generalization of patterns, Algebraic thinking, Algebraic Education, Early Years of Elementary School.*

[1] Universidade Federal de Santa Catarina; Prefeitura Municipal de Florianópolis; adriadrij@gmail.com
[2] Universidade Federal de Santa Catarina; derelst@hotmail.com
[3] Universidade Federal de Santa Catarina; regrando@yahoo.com.br

Introdução

Este artigo surgiu da necessidade de aprofundar questões relacionadas ao pensamento algébrico, e de forma específica a generalização de padrões, em decorrência de um estudo realizado em um grupo de pesquisa, que se reúne semanalmente na Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). O grupo é composto principalmente por professores dos Anos Iniciais atuantes nas escolas de Ensino Fundamental, mas participam dele também professores de Matemática da Educação Básica, estudantes de licenciatura em Matemática e Pedagogia e estudantes de mestrado e doutorado do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT). O grupo é coordenado pelos professores formadores da UFSC. O foco das discussões e dos estudos são conceitos de Matemática ligados aos Anos Iniciais, e o grupo tem o objetivo formativo de aprimorar suas práticas pedagógicas e compartilhar experiências realizadas com os alunos sobre o tema que está sendo estudado.

O tema pensamento algébrico tem despertado, ultimamente, grande interesse e visibilidade, pelo fato de a Álgebra ser uma das cinco unidades temáticas da Matemática para ser trabalhada com os alunos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, apresentadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), aprovada no Conselho Nacional de Educação (CNE) e homologada pelo Ministério da Educação e Cultura (MEC), em dezembro de 2017. A unidade temática Álgebra tem como finalidade desenvolver o pensamento algébrico das crianças, e essa novidade cria novas demandas para os professores que atuam nesse nível de ensino.

Nas discussões do grupo de pesquisa sobre pensamento algébrico que ainda não se esgotaram, apareceu como foco de estudos e investigação a generalização de padrões em sequências repetitivas e recursivas, presentes na BNCC (BRASIL, 2017) para os Anos Iniciais. Segundo Vale et al. (2011), a descoberta de padrões contribui para o desenvolvimento da abstração e de outras capacidades matemáticas, particularmente para o pensamento algébrico. Nesse sentido, o artigo destaca a presença dos padrões na natureza e no cotidiano das pessoas, enfatizando sua importância para uma aprendizagem de Matemática com significado; e aprofunda o que é a generalização de padrões, como esta ocorre e sua relação com o pensamento algébrico.

Na sequência, o artigo aborda os padrões presentes em sequências repetitivas e em sequências recursivas, descrevendo como os autores definem essas sequências e esclarecendo sobre o motivo presente em sequências repetitivas ou a relação recursiva presente em sequências recursivas. Abrange ainda exemplos de sequências descritas por pesquisadores como Vale et al. (2011), Vale e Pimentel (2013), Van de Walle (2009) e também as sequências encontradas em livros didáticos, aprovados pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) 2019 a 2022 para os Anos Iniciais, apontando como essas sequências podem ser trabalhadas em processos de ensino e de aprendizagem, de modo que os alunos consigam desenvolver a generalização e, por consequência, o pensamento algébrico.

Os padrões e sua importância para a aprendizagem Matemática

Padrões e regularidades estão presentes na natureza e no cotidiano das pessoas, como por exemplo, nos ladrilhos, nas estampas de tecidos, nas pinturas de parede, nos números, nas estrelas-do-mar, na órbita dos planetas, nas notas musicais, nos artesanatos, nos acessórios e nos itens de decoração. Regularidades na mudança de clima fizeram com que os seres humanos instituíssem as quatro estações do ano, assim como as regularidades nos movimentos de translação e rotação que a Terra produz em seu eixo foram usadas para determinar a duração de um dia e de um ano. Segundo Vale et al. (2011, p. 9), "padrão é usado quando nos referimos a uma disposição ou arranjo de números, formas, cores ou sons onde se detectam regularidades". Com base nessa definição, podemos concluir que o padrão é composto por regularidades, ou seja, regularidades em uma sequência, estabelecem um padrão.

Hanke (2008) salienta que o homem procura regularidades desde os tempos remotos e que isso é percebido na história da Matemática, da Física, da Geografia etc. e cita como exemplo Pitágoras, que partiu de observações e identificação de regularidades para a construção do teorema: em todo triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos catetos, sendo que mais tarde sistematizou a demonstração. Cita o exemplo de Galileu que chegou à ideia da gravidade, observando regularidades na queda de objetos. E ainda dá exemplos de padrões em alvéolos pulmonares, em passos de dança, em nado sincronizado, em períodos de gestação, em genética, em componentes do DNA, em marés, em disposição de pétalas de flores como o lírio ou o girassol, em asas de borboletas ou em plumas de um pavão.

Padrões matemáticos são encontrados na natureza em uma diversidade de exemplos, conforme Vale et al. (2007, p. 4):

> Vários fenómenos ou ocorrências naturais ou não, explicam-se, através de padrões matemáticos. É o caso do padrão da pelagem dos animais. Também a

> disposição das folhas no caule de algumas plantas, como o aipo ou a tabaqueira segue os números de Fibonacci. O mesmo se passa com as espirais do ananás ou da pinha, que se relacionam com a série de Fibonacci. Também num girassol se podem encontrar relações com a série de Fibonacci. Nas asas das borboletas podem-se identificar padrões geométricos, o mesmo acontecendo nas plumas do pavão e nas células de uma colmeia. A couve-flor é um exemplo real de um fractal – padrão decrescente. Uma estrela, ao sucumbir, produz dois clarões que são simétricos. Assim como é possível identificar rotações e simetrias numa maçã.

O estudo com padrões tem por finalidade envolver o aluno com a disciplina de Matemática, tornando a aprendizagem mais significativa porque está associada a experiências e realidades vivenciadas pelos estudantes. Vale et al. (2011, p. 14) destacam que: "Uma aula de Matemática bem sucedida baseia-se em tarefas ricas e significativas, em que o professor consegue construir um ambiente de aprendizagem estimulante e capaz de criar múltiplas oportunidades de discussão e de reflexão entre os alunos". Segundo eles,

> os padrões permitem que os estudantes construam uma imagem mais positiva da Matemática porque apelam fortemente a que desenvolvam o seu sentido estético e a criatividade, estabeleçam várias conexões entre os diferentes temas, promovam uma melhor compreensão das suas capacidades matemáticas, desenvolvam a capacidade de classificar e ordenar informações e compreendam a ligação entre a Matemática e o mundo em que vivem. (VALE et al. 2011, p. 10)

Vale et al. (2011, p. 9) ressaltam que o uso de padrões é um importante componente da atividade Matemática, porque eles permitem conjecturar e generalizar. O estudo de padrões contribui, "apoiando a aprendizagem dos estudantes para descobrirem relações, encontrarem conexões, fazerem conjecturas, previsões e também generalizações". As autoras Vale e Pimentel (2011, p. 1) apostam no trabalho com padrões, sugerindo que ele deveria ser central em todos os temas, uma vez que

> muito do insucesso em Matemática deve-se ao fato de os alunos recorrerem apenas à memorização e não à compreensão. O primeiro passo para aprender a pensar matematicamente é aprender a descobrir padrões e estabelecer conexões. A procura de padrões deve constituir o núcleo das aulas em todos os temas, já que eles surgem nas fórmulas que descobrimos, nas formas que investigamos e nas experiências que fazemos.

Uma das dificuldades frequentemente apresentadas, no estudo da Matemática, é a aprendizagem da Álgebra. Muitas pessoas, lembrando de seus estudos da época da escola, associam Álgebra a um conjunto de letras, à resolução de equações de primeiro e segundo grau, a sistemas de equação etc., porém uma Álgebra com pouco sentido. Para ajudar a dar mais significado para a Álgebra, Vale et al. (2007, p. 5) sugerem: "Os alunos devem começar a aprendizagem da Álgebra de modo intuitivo e motivador com o estudo dos padrões no mundo que nos rodeia e o esforço de analisar e descrever esses padrões".

Generalização de padrões e pensamento algébrico

As atividades que envolvem a observação e a generalização de padrões em sequências, geralmente, solicitam ao aluno que descubra o padrão da sequência para continuá-la; que indique um termo faltante da sequência, que pode começar pela posição mais próxima da última figura da sequência e ir se distanciando; ou que procure um termo numa posição qualquer, distante dentro da sequência.

A ideia subjacente a esse tipo de atividade é que o estudante comece fazendo uma generalização próxima e, na continuação dos itens, chegue à generalização distante, que permite calcular o número de elementos de qualquer termo da sequência. Segundo Stacey (1989), a "generalização próxima" acontece, quando o aluno, diante da questão envolvendo padrões, a resolve, passo a passo, desenhando, contando ou usando o apoio de uma tabela, o que normalmente envolve relações recursivas. Já a "generalização distante" ocorre, quando o aluno consegue construir uma lei de formação, ou seja, uma regra que permita calcular qualquer termo da sequência.

Radford (2006, 2010a, 2010b) afirma que as generalizações podem ser entendidas como aritméticas e algébricas. Para ele, quando os alunos descobrem uma regularidade nos termos dados de uma sequência e a continuam ou identificam se um termo pertence ou não à sequência, mas não elaboram uma regra que lhes possibilite encontrar qualquer termo dessa sequência, eles trabalham no campo aritmético e, portanto, uma generalização desse tipo é considerada como uma generalização aritmética.

Radford (2006, p. 5) define o processo da generalização algébrica como sendo aquela que

> [...] é baseada na capacidade de perceber uma regularidade em alguns elementos de um conjunto S e ser capaz de usá-la para construir uma expressão direta de qualquer termo de S. Em outras palavras, a generalização algébrica de um padrão se baseia na identificação de uma regularidade local que é depois generalizada a todos os termos da sequência e que serve de garantia para a construção da expressão dos elementos da sequência que permanecem para além do campo perceptivo.

De acordo com Vale e Pimentel (2013, p. 108), o "pensamento algébrico centra-se em processos de descoberta de invariantes e na oportunidade de, sobre eles, fazer conjeturas e generalizações". As autoras reiteram que tarefas envolvendo padrões são extremamente ricas, porque desafiam os alunos, mobilizam processos matemáticos fundamentais e possibilitam diversas representações.

Dada a importância do desenvolvimento da generalização de padrões em sequências para o ensino e a aprendizagem da Matemática e, conhecendo os diferentes tipos de generalizações, surgem os seguintes questionamentos: há relação entre generalização e pensamento algébrico? O que caracteriza tal pensamento? Os alunos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental podem desenvolver o pensamento algébrico? De que forma?

Blanton e Kaput (2005, p. 413) pontuam que o pensamento algébrico é um

> processo no qual os alunos generalizam ideias matemáticas de um conjunto particular de exemplos, estabelecem generalizações por meio do discurso de argumentação e expressam-nas, cada vez mais, em caminhos formais e apropriados a sua idade.

Relativamente ao trabalho com Álgebra nos Anos Iniciais, Kieran (2004, p. 149) defende que, para promover o pensamento algébrico, podem ser realizadas atividades sem usar qualquer símbolo-letra da Álgebra, tais como, "analisar relações entre quantidades, perceber estruturas, estudar a mudança, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar e prever". Blanton e Kaput (2011, p. 21) também apontam a mesma perspectiva: "é, assim, essencial conjecturar, generalizar e justificar".

O ensino de Álgebra tem sido tradicionalmente adiado até os Anos Finais do Ensino Fundamental. Carraher et al. (2006) justificam, indicando que as razões estariam ligadas a suposições sobre o desenvolvimento psicológico (os alunos não estariam prontos para aprender Álgebra), a dados que revelam as dificuldades que os adolescentes têm com a Álgebra e a razões históricas, pelo fato de a Álgebra ter surgido relativamente há pouco tempo. Mason (2018, p. 329) enfatiza que nunca é cedo demais para direcionar com sensibilidade a generalização e a abstração, embora "sempre seja cedo demais para uma instrução insensível".

Carraher et al. (2006) salientam que, pelo fato de a Álgebra ter emergido historicamente como uma generalização da Aritmética, isso não significa que ela deve ser estudada depois. Acreditam eles que as dificuldades em compreender a Álgebra podem estar enraizadas em oportunidades perdidas de desenvolver o pensamento algébrico nos Anos Iniciais, junto com a Aritmética.

De acordo com Kieran, Pang e Schifter (2016), o pensamento algébrico não é naturalmente desenvolvido com uma instrução baseada em Aritmética. Para desenvolver o pensamento algébrico, formas essenciais de pensar algebricamente precisam ser promovidas, de modo intencional, desde os Anos Iniciais e continuadas ao longo de toda a escolaridade, permitindo integrar aspectos mais formais. Kaput (1999) assegura que, quando explorados de forma conveniente, os diferentes aspectos da Álgebra tornam-se "hábitos da mente".

Assim sendo, para trabalhar a Álgebra nos Anos Iniciais, os professores precisam ter conhecimento sobre o pensamento algébrico e reconhecer os momentos em que este é manifestado e assim construir práticas que busquem a generalização de ideias matemáticas. Para isso é necessário que os professores "desenvolvam olhos e ouvidos algébricos como uma nova forma de olhar para a Matemática que ensinam e de ouvir o que os alunos pensam sobre isso" (BLANTON; KAPUT, 2005, p. 440). Segundo Branco (2008, p.1), "é fundamental que o professor conheça as perspectivas atuais que informam o ensino deste tema, para que as possa integrar na sua prática letiva com vista ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos." Em 1999, Kaput já defendia a importância da qualificação do professor para a promoção da generalização e, por consequência, do pensamento algébrico:

> Expressar a generalização significa acomodá-la numa linguagem, seja uma linguagem formal, ou, para crianças mais jovens, em entoações e gestos. No caso de alunos jovens, identificar a expressão da generalidade ou a tentativa de que uma declaração acerca de um caso particular seja tomada como geral pode requerer o ouvido atento e qualificado do professor que sabe como ouvir cuidadosamente as crianças. (KAPUT, 1999, p. 6)

Os alunos dos Anos Iniciais podem desenvolver a generalização e o pensamento algébrico, como foi exposto por diversos autores. Para isso, se torna relevante que os professores conheçam o tema e se utilizem de estratégias para tornar essa aprendizagem significativa.

Padrões matemáticos em sequências repetitivas e recursivas

De acordo com a BNCC (2017), algumas dimensões do trabalho com a Álgebra devem estar presentes nos processos de ensino e de aprendizagem desde os Anos Iniciais, como as ideias de regularidade e generalização de padrões, que podem ser trabalhados em sequências repetitivas e recursivas. A BNCC não propõe o uso de letras para expressar regularidades nessa fase escolar (BRASIL, 2017). O desenvolvimento da generalização é um dos objetivos da Álgebra, e o trabalho com padrões contribui com esse processo, conforme Vale et al. (2011, p. 19): "em particular, o trabalho com padrões permite o desenvolvimento da capacidade de generalização".

Os objetos de conhecimento e habilidades de Matemática do 1.º ao 4.º ano, que se relacionam com padrões em sequências recursivas ou repetitivas, dentro da unidade temática Álgebra, estão listados no Quadro 1. No quinto ano, as sequências não fazem parte do currículo, na BNCC.

Quadro 1: Objetos de conhecimento e habilidades sobre sequências na BNCC

Ano	Objetos de conhecimento	Habilidades
1.º ano	Padrões figurais e numéricos: investigação de regularidades ou padrões em sequências.	Habilidade EF01MA09[4]: Organizar e ordenar objetos familiares ou representações por figuras, por meio de atributos, tais como cor, forma e medida.
	Sequências recursivas: observação de regras utilizadas em seriações numéricas (mais 1, mais 2, menos 1, menos 2, por exemplo).	Habilidade EF01MA10: Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.
2.º ano	Construção de sequências repetitivas e de sequências recursivas.	Habilidade EF02MA09: Construir sequências de números naturais em ordem crescente ou decrescente a partir de um número qualquer, utilizando uma regularidade estabelecida.
	Identificação de regularidade de sequências e determinação de elementos ausentes na sequência.	Habilidade EF02MA10: Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos. Habilidade EF02MA11: Descrever os elementos ausentes em sequências repetitivas e em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.
3.º ano	Identificação e descrição de regularidades em sequências numéricas recursivas.	Habilidade EF03MA10: Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes.
4.º ano	Sequência numérica recursiva formada por múltiplos de um número natural.	Habilidade EF04MA11: Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural.
	Sequência numérica recursiva formada por números que deixam o mesmo resto ao ser divididos por um mesmo número natural diferente de zero.	Habilidade EF04MA12: Reconhecer, por meio de investigações, que há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades.

Fonte: BNCC, 2017, p. 278 - 290

Diversas atividades podem ser feitas para explorar as sequências, em busca de padrões ou regularidades. Vale et al. (2011, p. 10) sugerem tarefas que o professor pode selecionar e implementar, proporcionando oportunidade de:

> - Usar múltiplas representações de um padrão – concreta, pictórica e simbólica de uma representação para outra;
> - Averiguar se uma lista de números mostra alguma regularidade;
> - Descobrir o padrão numa sequência;
> - Descrever o padrão oralmente e por escrito;
> - Continuar uma sequência;
> - Prever termos numa sequência;

[4] EF corresponde a Ensino Fundamental. Na sequência, 01 significa que é uma habilidade do primeiro ano, MA se refere a uma habilidade de Matemática e 09 quer dizer que é a nona habilidade do primeiro ano.

- Generalizar;
- Construir uma sequência.

O reconhecimento de padrões de repetição ou de crescimento em sequências, e a generalização desses padrões, por meio de regras que os alunos podem formular, contribuem para que "a aprendizagem da Álgebra se processe de um modo gradual e ajudam a desenvolver a capacidade de abstração, essencial no desenvolvimento de capacidades matemáticas" (VALE et al. 2011, p. 39).

Sequências repetitivas/sequências com padrões repetitivos

Vale et al. (2011, p. 20) definem padrão de repetição como: "um padrão no qual há um motivo identificável que se repete de forma cíclica indefinidamente". Eles usam ainda o termo "grupo de repetição" (VALE et al., p. 148), se referindo ao motivo. Para Van de Walle (2009, p. 296), o conceito de padrão repetitivo parte da identificação de um núcleo que "é a menor cadeia de elementos que se repete".

Os autores citados fazem referência a padrões de vários tipos. Alguns exemplos são mostrados nas Figuras 1, 2 e 3:

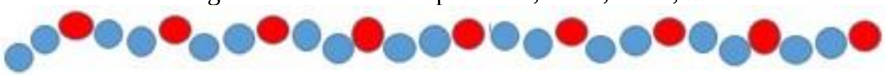
Figura 1- Padrões do tipo: AB, AB, AB, ...

Fonte: Construção dos autores

Figura 2 - Padrões do tipo: ABC, ABC, ABC, ...

Fonte: Construção dos autores

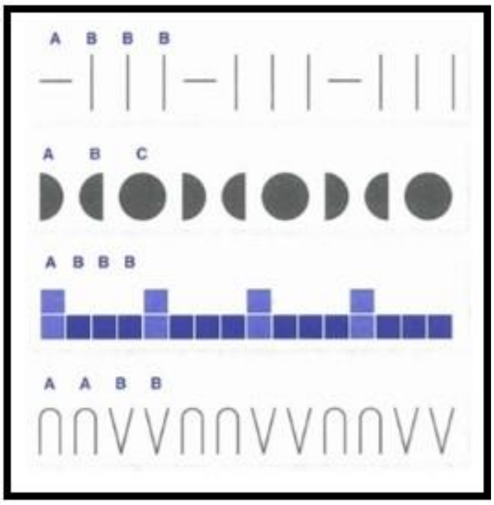
Figura 3 - Padrões do tipo: AAB, AAB, AAB, ...



Fonte: Construção dos autores

Van de Walle (2009) dá sugestões de trabalho inicial com esses padrões, tais como: desenhar padrões no quadro e ampliá-los com sugestões da turma; explorar padrões musicais simples como "dó, mi, mi, dó, mi, mi, ...", posições de braço "para cima, para baixo, para o lado, para cima, para baixo, para o lado, ..." e padrões de "levantar-sentar", dentre outros. Em seu livro, o autor traz vários exemplos de padrões repetitivos, como os padrões dos tipos ABBB, ABC, ABBB e AABB, que podem ser visualizados na Figura 4.

Figura 4 – Padrões repetitivos

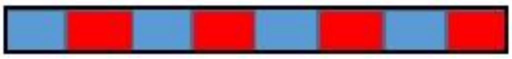


Fonte: Van de Walle, 2009, p. 297

De acordo com Vale et al. (2011), as crianças podem trabalhar desde muito cedo com os padrões de repetição e é desejável uma exploração aprofundada que inclua processos de generalização. Sugere iniciar com materiais manipuláveis e, mais tarde, usar representações pictóricas (desenhos, gráficos, tabelas e outras formas de representação visual).

Um padrão muito simples adaptado de Vale *et al*. (2011) envolve um raciocínio de pensar figuras que se alternam: ABABABAB... (Figura 5).

Figura 5- Padrão repetitivo do tipo AB, AB, AB, ...



Fonte: Adaptado de Vale *et al*.,2011

Esse padrão pode ser visto como a junção de duas figuras: AB, AB, AB ..., que é o motivo da repetição. O motivo da repetição nessa sequência é “azul e vermelho”. Além de fazer a continuação da sequência, de identificar o “motivo” que se repete, podem ser explorados aspectos ligados à ordem na sequência (Figura 6), o que contribui com processos de generalização (VALE et al., 2011).

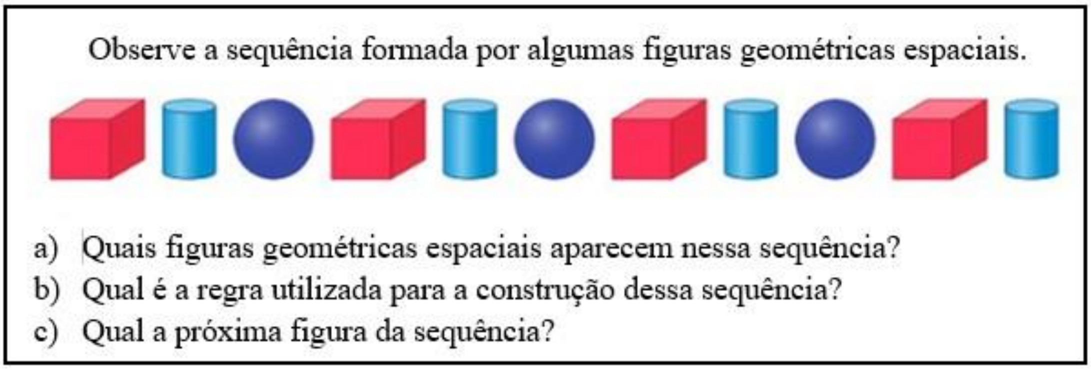
Figura 6- Padrão repetitivo com ordem na sequência

Fonte: Adaptado de Vale et al., 2011

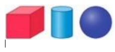
Podem ser feitos aos alunos questionamentos como: que cor tem o terceiro elemento? Qual a cor do oitavo elemento? E do décimo segundo elemento? Qual a cor do vigésimo quinto elemento? Nesse processo é importante que os alunos discutam estratégias para descobrir a cor de um elemento como o vigésimo quinto ou o centésimo, por exemplo, sem ter que desenhar ou contar de um em um. Se os alunos não fizerem a relação de que os ímpares são azuis e os vermelhos são pares, questionar: quais são vermelhos? Quais são azuis? A generalização para descobrir um termo qualquer nessa sequência é um dos objetivos dessa atividade, logo, o 25.º termo é azul, porque o número 25 é ímpar, e o 100.º termo é vermelho, porque 100 é um número par. Vale ressaltar que os alunos poderão encontrar estratégias diversificadas para responder aos questionamentos propostos e que todas elas devem ser levadas em consideração e discutidas.

Numa sequência repetitiva do tipo ABCABC... encontrada no livro didático do PNLD 2019 a 2022 (Figura 7), percebemos que os objetivos são a identificação das figuras geométricas espaciais, a descoberta da regularidade ou do padrão da sequência e a determinação do próximo elemento para continuação da sequência.

Figura 7 – Sequência repetitiva em livro didático



Fonte: Coleção Novo Pitanguá, 2.º ano, p. 77 (RIBEIRO, 2017)

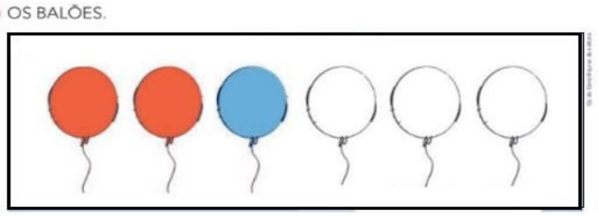
A identificação do "motivo" ou "grupo de repetição", que, nesse caso é  "cubo vermelho, cilindro azul claro e esfera azul escuro", contribui para responder às perguntas dessa questão, e é de extrema importância para identificar um termo distante nessa sequência, como por exemplo o 47.º. Para facilitar essa generalização, que poderia ser proposta em anos subsequentes, é preciso que os alunos já possuam algum domínio da divisão e que tenham se apropriado da regularidade de que numa divisão por 3, os restos possíveis são 0, 1 e 2. Nesse caso, ainda no contexto dos Anos Iniciais, é cabível usar a relação do resto da divisão para descobrir termos mais distantes numa sequência como essa.

Para descobrir o 47.º termo, podemos usar a divisão por 3, porque o "motivo" dessa sequência é composto por 3 figuras. A cada 3 figuras, temos um grupo de repetição. A divisão é 47 ÷ 3 = 15, com resto 2. Relacionando o algoritmo da divisão com o problema proposto, temos 15 “motivos” de repetição, e o termo procurado é o segundo do próximo grupo de repetição (pelo fato do resto ser 2), logo será o cilindro azul.

Se o objetivo fosse descobrir o 45.º termo da sequência, faríamos 45 ÷ 3=15, com resto zero, então teríamos 15 “motivos” completos, logo o termo procurado seria a esfera azul, que é a última figura do 15.º grupo de repetição. E se o termo procurado fosse o 46.º, faríamos 46 ÷ 3 = 15 com resto 1, o que significa 15 grupos completos de repetição e o termo procurado seria o 1.º do próximo “motivo”, logo, o cubo vermelho.

Um padrão pode ser continuado de diversas formas, como no exemplo encontrado no livro didático do PNLD 2019 a 2022 (Figura 8), em que a questão pede para observar como começou a sequência, descobrir um padrão (ou regularidade) e continuar pintando usando esse padrão e depois explicar para um colega o padrão (ou regularidade) descoberto.

Figura 8 – Sequência repetitiva para continuar



Fonte: Coleção Ápis Matemática, 1.º ano, p. 23 (DANTE, 2017a)

Nesse caso, os alunos poderiam fazer a sequência vermelho, vermelho, azul, vermelho, vermelho, azul. Mas também é possível fazer a sequência vermelho, vermelho, azul, azul, vermelho, vermelho, dentre outras. Se a quantidade de balões fosse maior, poderiam ser criados vários outros padrões para continuar a sequência.

Com base em Vale et al. (2011), descrevemos a seguir alguns cuidados que precisam ser tomados, ao propor a continuação de uma sequência. Em relação à sequência (Figura 9):

Figura 9 – Sequência para continuar

Fonte: Adaptado de VALE et al., 2011

O esperado é que os alunos a continuem desta forma (Figura 10):

Figura 10 – Continuação esperada da sequência

Fonte: Adaptado de VALE et al., 2011

Mas a sequência também pode ser continuada, conforme a Figura 11, como se a parte dada fosse o motivo a ser repetido. O importante é que os alunos sejam estimulados a comunicar de que forma pensaram para continuar a sequência. Essa troca é enriquecedora no processo de aprendizagem.

Figura 11- Continuação alternativa da sequência

Fonte: Adaptado de VALE et al., 2011

Os conceitos iniciais de razão e proporção também podem ser explorados em uma sequência repetitiva (VALE et al., 2011). Considerando a Figura 12, que apresenta uma sequência com grupos de 5, ou seja, o motivo com 5 figuras, o conceito de razão aparece, pois temos 2 círculos para 3 estrelas (2/3) em cada grupo. É possível trabalhar outras razões, como 3 estrelas para 5 figuras (3/5) ou 2 círculos para 5 figuras (2/5). Se explorarmos que há 3 estrelas em cada grupo ou motivo, em 4 repetições teremos 12 estrelas (4x3=12). Da mesma forma, por termos 2 círculos em cada grupo, nas 4 repetições, teremos 8 círculos (4x2=8). Na última situação se faz presente o raciocínio proporcional.

Figura 12 – Sequência repetitiva na qual o motivo possui 5 figuras

Fonte: Adaptado de VALE et al., 2011

Os padrões de repetição podem ser trabalhados nos Anos Iniciais com níveis diversificados de exploração e fazendo relação com outros conteúdos da Matemática que são objeto de conhecimento em cada ano. Vale et al. (2011, p. 23) argumentam que é aconselhável “proporcionar aos estudantes tarefas que lhes permitam reconhecer o motivo da repetição, descrever, completar, continuar e criar padrões, recorrendo a contextos diversificados e em que sejam incentivados e verbalizar os seus pensamentos e a justificá-los”.

Sequências recursivas/sequências com padrões de crescimento

As sequências recursivas aparecem como objetos de conhecimento na BNCC 2017 no primeiro, segundo, terceiro e quarto anos do Ensino Fundamental. As habilidades consistem em reconhecer e descrever um padrão, completar elementos ausentes em sequências, determinar elementos seguintes em sequências, construir sequências de números naturais em ordem crescente ou decrescente, utilizando uma regularidade estabelecida ou a ser descoberta (ver Quadro 1). Nos exemplos das Figuras 13 e 14, encontrados em livros didáticos do PNLD 2019 a 2022, há sequências recursivas numéricas, uma crescente e duas decrescentes e uma sequência recursiva pictórica com padrões de crescimento. As questões solicitam descobrir a regularidade ou padrão e completar as sequências com termos faltantes ou próximos.

Figura 13 - Sequências recursivas numéricas

Fonte: Coleção Buriti Mais Matemática, 2.º ano, p. 65 (TOLEDO, 2017)

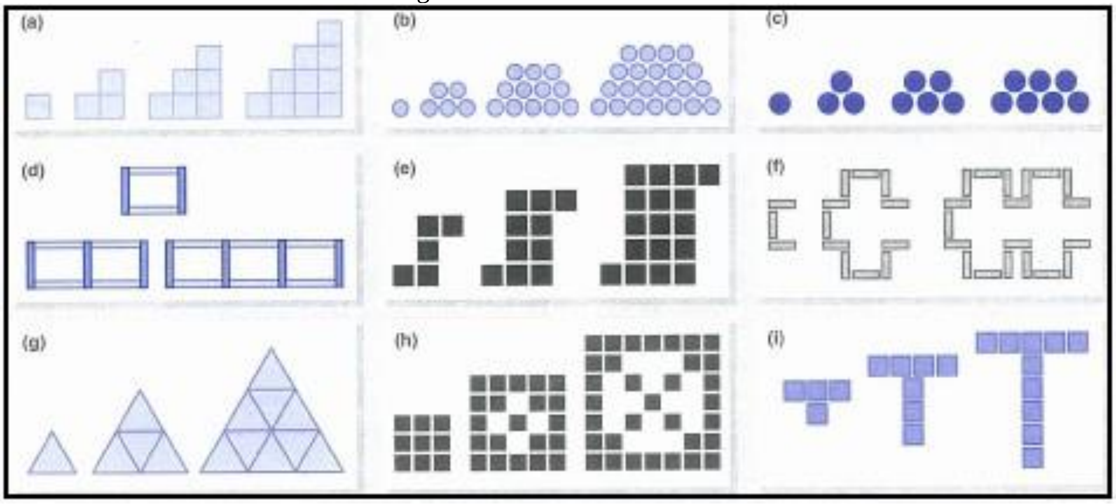
Figura 14 – Sequência recursiva pictórica com padrões de crescimento

Fonte: Coleção Ápis Matemática, 2.º ano, p. 44 (DANTE, 2017b)

As sequências recursivas possuem uma relação recursiva, que permite estabelecer as mudanças de um termo para o outro e, portanto, calcular termos próximos dentro de uma sequência. “A descrição que diz como um padrão é modificado de um passo ao passo seguinte é conhecida como relação recursiva” (VAN DE WALLE, 2009, p. 300).

Para iniciar o trabalho com padrões e facilitar que os alunos percebam as mudanças de um termo da sequência para o próximo, podem ser construídos padrões com materiais concretos como palitos de dente, blocos lógicos, ladrilhos, bolinhas de massinha de modelar etc. A atividade com o material concreto se torna mais divertida e visualmente adequada, sendo, portanto, uma ótima estratégia para descobrir regularidades em padrões. Na Figura 15, há exemplos de padrões crescentes em sequências recursivas:

Figura 15 – Padrões crescentes



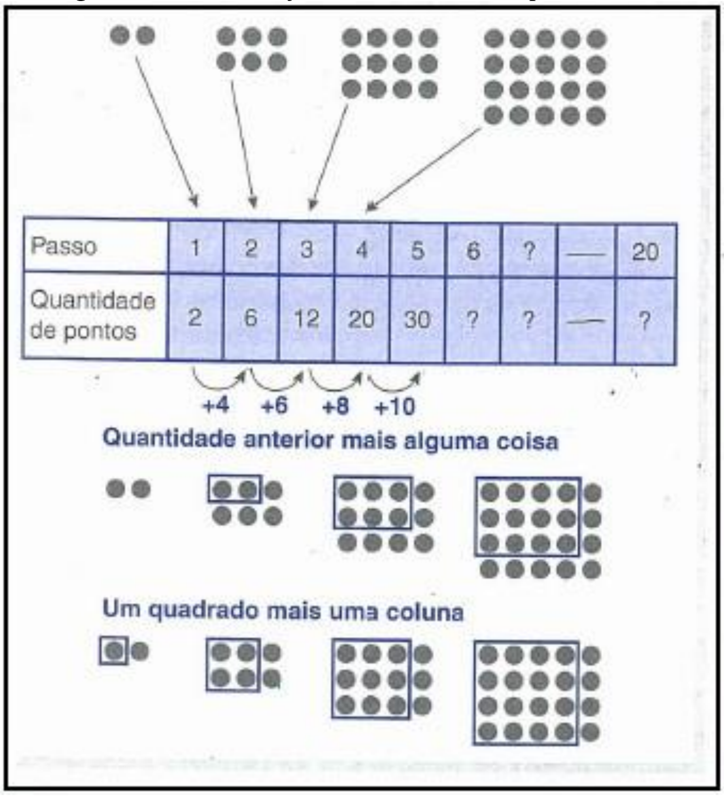
Fonte: Van de Walle, 2009, p. 299

As sequências recursivas com padrões crescentes, em contextos figurativos, contribuem significativamente para os processos de ensino e aprendizagem. “Este tipo de padrões, em particular, fornece uma grande diversidade de situações que proporcionam explorações muito ricas e variadas” (VALE et al., 2011, p. 24). Para aprofundar como esses padrões podem ser explorados em contextos escolares, vamos discutir três sequências desse tipo, sendo que a primeira está descrita no livro de Van de Walle (2009) que traz explicações sobre os processos recursivos para encontrar termos próximos numa sequência e os processos envolvidos para encontrar uma regra que permita calcular um termo qualquer da sequência. A segunda é uma atividade de um livro didático do PNLD 2019 a 2022 em que procuramos apontar como a sequência pode ser aplicada com os alunos e, por fim, vamos descrever o relato das pesquisadoras Vale e Pimentel (2013) sobre a experiência de uma professora do terceiro ano na aplicação de uma sequência desse tipo.

Van de Walle (2009) apresenta um padrão visual (Figura 16) e mostra na tabela a relação recursiva que é (+4, +6, +8, +10, +12, ...), ou seja, são adicionados sucessivos números pares para obter o próximo termo da sequência. Abaixo da tabela, na regra “quantidade anterior mais alguma coisa” é possível ver o uso da relação recursiva, que permite encontrar a quantidade de bolinhas de termos próximos na sequência, em que sempre se recorre ao termo anterior para encontrar o termo seguinte. O autor (2009, p. 300) ressalta:

“O padrão recursivo passo a passo é quase certamente o primeiro que seus alunos observarão”.

Figura 16 – Duas relações diferentes em um padrão visual



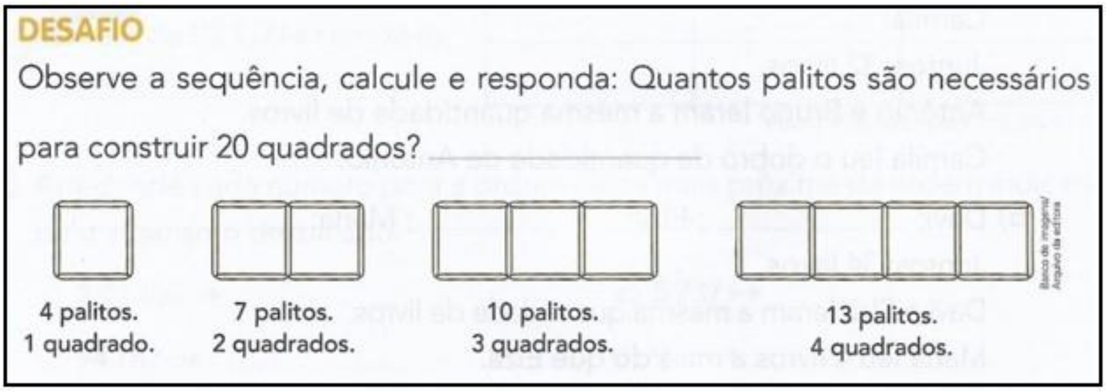
Fonte: Van de Walle, 2009, p. 301

Para encontrar uma regra que possibilite calcular a quantidade de bolinhas numa posição qualquer, é interessante contar com a ajuda do padrão concreto ou pictórico e com uma tabela, que devem estar conectados. Considerando a segunda regra da figura, “um quadrado mais uma coluna”, o aluno pode facilmente calcular quantas bolinhas possui qualquer elemento da sequência, desde que já tenha conhecimento sobre a área de um quadrado. Os 4 primeiros elementos na figura são: 1 x 1 +1= 2 ou $1^2 + 1 = 2$; 2 x 2 +2 =6 ou $2^2 + 2 = 6$; 3 x 3 + 3 =12 ou $3^2 + 3 = 12$; 4 x 4 + 4 = 20 ou $4^2 + 4 = 20$ (VAN DE WALLE, 2009).

Em relação a esse exemplo, com a regra generalizada “um quadrado mais uma coluna”, é possível calcular, por exemplo, o número de pontos do 27.º elemento, para isso basta fazer $27^2 + 27 = 756$. Para Van de Walle (2009), o estudo de padrões de crescimento ajuda os alunos a fazer generalizações, por meio de relações algébricas que favoreçam dizer a quantidade de elementos em uma posição qualquer.

Em uma sequência recursiva pictórica, encontrada no livro didático do PNLD 2019 a 2022, proposta como um desafio, os alunos estão sendo estimulados a observar a sequência e calcular o número de palitos para construir 20 quadrados e, dessa forma, generalizar uma regra que permita calcular o número de palitos para qualquer número de quadrados (Figura 17).

Figura 17- Sequência recursiva com palitos



Fonte: Coleção Ápis Matemática, 5.º ano, p. 95 (DANTE, 2017c)

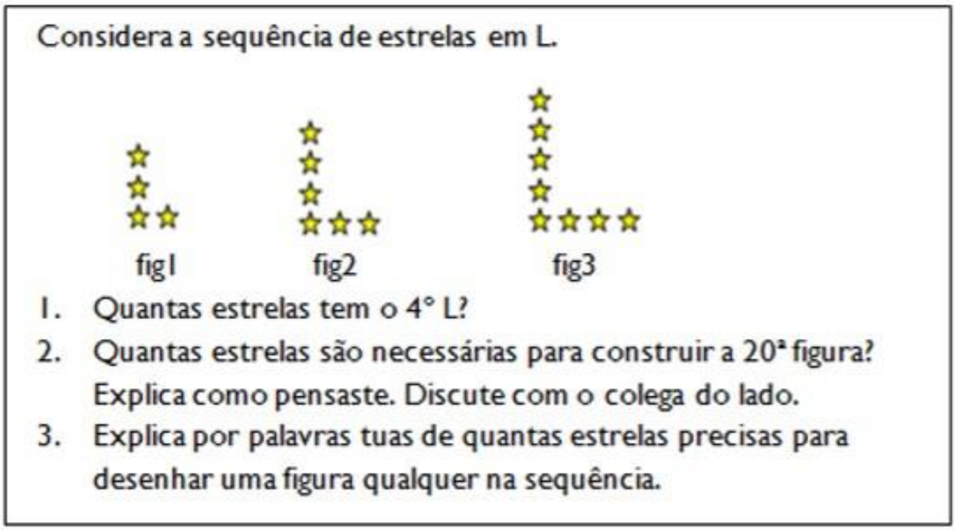
Os alunos, preferencialmente em duplas ou grupos, podem construir essa sequência com palitos, continuar a sequência com mais alguns termos próximos e tentar descobrir uma lei de formação, que permita calcular o número de palitos para qualquer número de quadrados. Geralmente, os alunos encontram regras diferentes, porque é possível formular várias leis de formação para uma mesma sequência. Uma delas poderia ser: "três vezes o número de quadrados mais 1". Logo, para calcular o número de palitos em 20 quadrados, basta fazer 3 x 20 + 1 = 61. É bem provável que uma parte dos alunos use uma relação recursiva, por meio de desenho ou sequência numérica, considerando o primeiro quadrado com 4 palitos e acrescentando mais 3 palitos para cada quadrado até chegar no vigésimo quadrado. Nesse caso, para desafiá-los, o professor pode propor que encontrem um termo ainda mais distante na sequência, de modo a instigá-los a encontrar uma lei de formação, sem usar a relação recursiva.

Vale et al. (2011), em seu livro, também apresentam essa questão envolvendo palitos e ressaltam que a sequência de figuras com padrões de crescimento, que, para ser construída, depende da figura anterior, auxilia o desenvolvimento do raciocínio recursivo, o que leva à generalização próxima. Citam que, nesse caso, os alunos poderiam usar uma relação recursiva adicionando três unidades ao termo anterior. Para os autores, quando é construída uma lei de formação, que possibilita calcular o valor de qualquer termo da sequência, dá-se um passo para a generalização distante.

Em relação à generalização distante, Vale et al. (2011, p. 28) destacam: "Há muitos modos diferentes que conduzem facilmente à descoberta da lei de formação para termos distantes”, e ressaltam: “É importante que os alunos consigam perceber que diferentes modos de ver a figura conduzirão, eventualmente, a expressões diferentes (pois traduzem modos diferentes de ver) mas que são equivalentes” (VALE et al., p. 29).

Vale e Pimentel (2013) relatam a experiência de uma professora do 3.º ano na aplicação de uma sequência didática que possuía três fases. As autoras enfatizam que essa proposta pode ser aplicada para qualquer nível de escolaridade, mas é mais recomendada para os Anos Iniciais. Vamos aqui nos ater à segunda fase da proposta que trata do reconhecimento de padrões em sequências, de modo a permitir a generalização dos alunos e calcular qualquer termo da sequência. As autoras chamam atenção sobre a importância da apropriação visual da regularidade para ocorrer a generalização, que não se daria pela simples observação da sequência numérica (Figura 18).

Figura 18 – Atividade sobre sequência de estrelas em L



Fonte: Vale e Pimentel, 2013, p 111

Na sequência sempre aumentam 2 estrelas, então a sequência numérica equivalente é 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ... Vale e Pimentel (2013) chamam isso de generalização aritmética, pois, iniciando em 4 e depois contando de 2 em 2 (relação recursiva), é possível descobrir termos próximos na sequência.

Para calcular quantas estrelas possui a vigésima, a milésima ou uma figura qualquer da sequência, Vale e Pimentel (2013, p. 112) afirmam que alunos muito novos conseguem fazer essa descoberta, para isso é necessário observar cada uma das figuras e, assim, chega-se à conclusão de que há uma “coluna de estrelas e uma linha sobrante”. Então na primeira figura temos 3 + 1 = 4, na segunda figura 4 + 2 = 6, na terceira 5 + 3 = 8, o que permite concluir que, na vigésima figura, teremos 22 + 20 = 42 estrelas; na milésima figura, teremos 1002 + 1000 = 2002 estrelas, já que a coluna de estrelas sempre tem 2 estrelas a mais do que as estrelas da linha que sobra. As autoras reiteram que a procura da consistência entre a representação figurativa e uma representação numérica organizada, como uma tabela, é muito importante nesse processo (Quadro 2).

Quadro 2: Tabela de registros de um modo de ver

Número da figura	Número de estrelas
1	3 + 1
2	4 + 2
3	5 + 3
4	6 + 4
...	...
20	22 + 20
n	(n + 2) + n

Fonte: Vale e Pimentel, 2013, p. 112

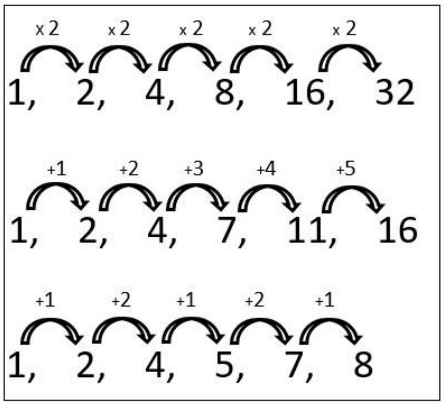
Na aplicação da sequência didática, a descoberta da regra “uma coluna de estrelas e uma linha sobrante” favoreceu calcular o número de estrelas em qualquer posição da sequência, ou seja, os alunos chegaram a uma generalização algébrica (VALE; PIMENTEL, 2013).

Sobre o trabalho com padrões em sequências numéricas, Vale et al. (2011, p. 38) enfatizam: “A procura de padrões em sequências numéricas pode ser uma boa oportunidade para introduzir ou relembrar números e relações numéricas, números pares ou ímpares; múltiplos; potências”. Os autores ressaltam que, para descobrir termos próximos em uma sequência, os alunos podem trabalhar recursivamente, ou seja, podem relacionar cada termo com o termo anterior. Van de Walle (2009) propõe exemplos de padrões numéricos, formulando hipóteses das regras observadas nas sequências numéricas.

> 2, 4, 6, 8, 10, ... (números pares: adicione 2 a cada vez)
> 1, 4, 7, 10, 13, ... (comece com 1; adicione 3 a cada vez)
> 1, 4, 9, 16, ... (números quadrados perfeitos)
> 0, 1, 5, 14, 30, ... (adicione o próximo número quadrado)
> 2, 5, 11, 23, ... (dobre o número e adicione 1)
> 2, 6, 12, 20, 30, ... (multiplique pares de números naturais consecutivos)
> 3, 3, 6, 9, 15, 24, ... (adicione os dois números anteriores, exemplo de uma sequência de Fibonacci). (VAN de WALLE, 2009, p. 298)

Em relação à continuação de uma sequência numérica recursiva, Vale et al. (2011, p. 25) sugerem uma que solicita: "Escreva os três termos seguintes da sequência numérica 1, 2, 4, ..." Algumas das opções de resposta apresentadas pelos autores estão na Figura 19:

Figura 19: Continuações diferentes para a sequência 1, 2, 4,...



Fonte: Vale et al., 2011, p.26

É possível ver, na Figura, que as três sequências que iniciavam com 1, 2, 4, ... foram continuadas com relações recursivas diferentes. A continuação das três sequências está correta. Entretanto o professor deve estar atento na hora de propor uma tarefa como essa, de modo a considerar a resposta do aluno, uma vez que ela pode ser bem diferente da que ele havia imaginado inicialmente. A socialização dos diferentes modos de perceber e continuar uma sequência é importante nesse processo (VALE et al., 2011).

Considerações finais

As várias orientações para o processo de ensino e aprendizagem da Álgebra apontam para a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico. É função do professor utilizar metodologias de ensino que contribuam nesse processo, propor questões e tarefas desafiadoras, com espaço para construir padrões, generalizar e justificar relações matemáticas.

As generalizações contribuem para o desenvolvimento do pensamento algébrico, e o trabalho com padrões deve ser adaptado de acordo com o ano escolar e com o grau de dificuldade de generalização que cada sequência exige. Isso posto, cumpre ao professor analisar se é possível propor uma generalização próxima e/ou aritmética ou se é possível avançar para uma generalização distante e/ou algébrica, diante da sequência que está trabalhando com os alunos. Sobre isso Vale et al., (2011, p. 29) propõem: "Caberá ao professor utilizar a linguagem e os conceitos mais adequados aos fins em vista e ao nível de escolaridade".

Conduzir o ensino da Matemática a partir de experiências com padrões em sequências repetitivas e recursivas é uma tentativa de torná-lo mais significativo, de fazer o aluno vivenciar o processo de construção dessa disciplina, privilegiando o desenvolvimento do pensamento algébrico. Atividades que envolvam padrões em sequências podem resultar em um trabalho valoroso e expressivo, de modo que os alunos consigam realizar as suas próprias generalizações.

Nesse sentido, o artigo trouxe como propósito descrever e compreender a exploração de padrões em sequências nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, para esclarecer, por meio da literatura, questões como a generalização, o pensamento algébrico e os aspectos práticos para compreender de que forma é possível introduzir, no processo de ensino e aprendizagem, os padrões presentes em sequências repetitivas ou recursivas.

Referências

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education,** Reston, v. 36, n. 5, p. 412-443, nov. 2005.

BLANTON, M.; KAPUT, J. Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. *In*: CAI, J.; KNUTH, E. (eds.). **Early algebraization.** A global dialogue from multiple perspectives. Berlin: Springer, p. 5-23, 2011.

BRANCO, N. C. V. **O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico**. 2008. 241f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade de Lisboa, Lisboa, 2008.

BRASIL. Ministério da Educação. Governo Federal. **Base Nacional Curricular Comum:** BNCC**.** Versão para impressão. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf Acesso em: 16 mar. 2018.

CARRAHER, D.; SCHLIEMANN, A.; BRIZUELA, B. M.; EARNEST, D. Arithmetic and algebra in early mathematics education. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 37, n. 2, p. 87 - 115, mar. 2006.

DANTE, L. R. **Ápis Matemática 1.º ano:** ensino fundamental, anos iniciais**.** 3. ed. São Paulo: Ática, 2017a.

DANTE, L. R. **Ápis Matemática 2.º ano:** ensino fundamental, anos iniciais**.** 3. ed. São Paulo: Ática, 2017b.

DANTE, L. R. **Ápis Matemática 5.º ano:** ensino fundamental, anos iniciais**.** 3. ed. São Paulo: Ática, 2017c.

HANKE, T. A. F. **Padrões de regularidades:** uma abordagem no desenvolvimento do pensamento algébrico. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Minas Gerais, 2008.

KAPUT, J. J. **Teaching and learning a new algebra,** 1999. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA-TEXTOS/Kaput_99AlgUnd.pdf Acesso em: 22 jun.2018.

KIERAN, C. Algebraic thinking in the early grades: What is it? **The Mathematics Educator**, Canadá v. 8, n..1, p. 139-151, 2004.

KIERAN, C.; PANG J. S.; SCHIFTER, D.; Ng, S. F**. Early Algebra.** Research into its nature, its learning, its teaching. Hamburg: Springer Open, 2016.

MASON, J. How early is too early for thinking algebraically? *In*: KIERAN, C. (ed.), **Teaching and Learning Algebraic Thinking**. Hamburg: Springer International Publishing AG, p. 329-350, 2018.

RADFORD, L. Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. *In*: ALATORRE, S.; CORTINA, J.L.; SÁIZ, M.; MÉNDEZ, A. (eds.). ***Proceedings...*** Vol. 1. Mérida: Universidad Pedagógica Nacional, p. 2-21, 2006.

RADFORD, L. Layers of generality and types of generalization in pattern activities. **PNA**, v.4, n. 2, p. 37 - 62, 2010a.

RADFORD, L. The eye as a theoretician: Seeing structures in generalizing activities. **For the Learning of Mathematics,** Canadá, v.30, n.2, p.2-7, 2010b.

RIBEIRO, J. **Novo pitanguá:** Matemática 2.º ano**.** 1 ed. São Paulo: Moderna, 2017.

STACEY, K. Finding and using patterns in linear generalizing problems. **Educational Studies in Mathematics,** n. 20, p. 47-164, 1989.

TOLEDO, C. M. **Buriti Mais Matemática 2º ano:** ensino fundamental, anos iniciais. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2017.

VALE, I.; BARBOSA, A.; FONSECA, L.; PIMENTEL, T., BORRALHO, A.; CABRITA, I.; BARBOSA, E. **Padrões em Matemática: uma proposta didática no âmbito do novo programa para o ensino básico.** Lisboa: Texto, 2011.

VALE, I.; PALHARES, P.; CABRITA, I.; BORRALHO, A. **Os padrões no ensino e aprendizagem de Álgebra.** Lisboa SEM-SPCE, 2007. Disponível em http://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/1416/1/Padr%C3%B5es%20Caminha.pdf. Acesso em: 05 mar.2019.

VALE, I.; PIMENTEL, T. Padrões e Conexões Matemáticas no Ensino Básico. **Educação e Matemática**, Lisboa, 2011. Disponível em: https://www.academia.edu/1425432/Padrões_um_tema_transversal_do_currículo Acesso em: 09 mar. 2019.

VALE, I.; PIMENTEL, T. O pensamento algébrico e a descoberta de padrões na formação de professores. **Da Investigação às Práticas**, v. 3, n. 2, p. 98-124, 2013.

VAN DE WALLE, J. A. V. de. **Matemática no Ensino Fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Tradução: Paulo Henrique Colonese. Porto Alegre: Artmed, 2009.

Texto recebido: 29/07/2019
Texto aprovado: 02/12/2019