ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i1p*253-275*

Mobilização de crivos de curvas e de superfícies na resolução de problemas matemáticos: uma aplicação no ensino superior

Mobilization of sieves from curves and surfaces in mathematical problems: an application in higher education

AFONSO HENRIQUES[1]
ANDRÉ NAGAMINE[2]
ROGÉRIO SERÔDIO[3]

Resumo

Neste artigo refletimos sobre os registros de representação que intervêm no estudo de curvas e de superfícies, como objetos matemáticos de referência, explorando a técnica Crivo-Geométrico. Para isso, analisamos o software GeoGebra e as práticas de estudantes de um curso de Mestrado em Educação Matemática na resolução de um problema utilizando o ambiente papel/lápis. Os resultados obtidos mostram que os estudantes têm domínio dos seus pensamentos geométricos no tratamento de objetos no plano bidimensional, mas apresentam dificuldades na representação de objetos geométricos no espaço tridimensional, que se manifestam na mobilização inadequada de pensamentos geométricos sobre os crivos de curvas e de superfícies que delimitam o objeto geométrico envolvido no problema, tanto em Geometria Espacial quanto em Geometria Analítica.

Palavras-Chave: *Representação semiótica, Pensamento Geométrico, Equações, Parametrização.*

Abstract

In this article we reflect on the representation records that intervene in the study of curves and surfaces, as reference mathematical objects, exploring the Sieve-Geometric technique. For this, we analyse the GeoGebra software and the practices of the students of a Master course in Mathematics Education to solve a problem using the paper/pencil environment. The results show that students have mastery of their geometric thoughts in the treatment of objects in the two-dimensional plane, but present difficulties in the representation of geometric objects in three dimensions, which are manifested in the

[1] Doutor em Matemática e Informática pela Universidade Joseph Fourier (UJF) de Grenoble, França. Professor Pleno da Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), Líder do Grupo de pesquisas em ensino e aprendizagem da matemática em ambiente computacional (GPEMAC)/DCET/UESC), Ilhéus-BA-Brasil. Endereço para correspondências: Rua Rosenaide Guimarães, 248, Apto. 301, Zildolândia, CEP: 45600-702, Itabuna, BA, Brasil. *E-mail*: henry@uesc.br.

[2] Doutor em Ciências da Computação e Matemática Computacional pela Universidade de São Paulo (USP-ICMC). Professor Adjunto da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB), Vitória da Conquista, BA, Brasil. Endereço para correspondência: Rua E, 09. Cond. Green Ville. CEP: 45027-324, Vitória da Conquista, BA, Brasil. *E-mail*: andnaga@uesb.edu.br

[3] Doutor em Matemática pela Universidade da Beira Interior (UBI). Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade da Beira Inteiror, Covilhã, Portugal. Endereço para correspondência: Av. Marquês D'Ávila e Bolama, Departamento de Matemática, Universidade da Beira Interior, 6200-001, Covilhã, Portugal. E-mail: rserodio@ubi.pt

inadequate mobilization of geometric thoughts on the curved and surface sieve, delimiting the geometric object involved in the problem, both in Spatial and Analytical Geometry.

Keywords: *Semiotic representation, Geometric thoughts, Equations, Parametrization.*

Introdução

As curvas e as superfícies são objetos matemáticos de referência neste artigo, estudados no ensino superior em cursos como de Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Diferencial, Geometria Analítica, entre outros, e são geralmente fornecidos no registro algébrico, com interpretação ou pensamentos geométricos no registro gráfico. A passagem, dita conversão, de uma representação de um objeto, de um primeiro registro para um segundo, permite o desenvolvimento de conhecimentos que discutimos neste artigo no âmbito da análise e utilização de *softwares* educativos, em especial o *GeoGebra*, explorando as técnicas instrumentais como o Crivo-Geométrico Henriques (2006 e 2015) e na análise de práticas de estudantes. Para isso, carece-nos, de antemão, apresentar algumas definições e uma conjectura sobre os conceitos considerados neste estudo, a saber: registro de representação, representação semiótica, gênese instrumental, curva, superfície, Crivo-Geométrico e ambientes de aprendizagem, para responder os seguintes questionamentos: *Por que e como realizar a análise de um software educativo tal como o GeoGebra? Quais são os conhecimentos que os estudantes de uma instituição do Ensino Superior mobilizam, no ambiente papel/lápis, diante de uma tarefa não familiar de suas práticas usuais?* Para isso, analisamos e resolvemos um problema, apresentado naturalmente na língua materna, que envolve crivos de curvas e de superfícies nos registros gráfico e algébrico. O problema foi utilizado para conduzir a análise do ambiente computacional *GeoGebra* visando os objetos de estudo em causa neste artigo. Posteriormente foi reorganizado com seis subtarefas, fazendo parte de uma avaliação proposta aos estudantes em uma disciplina de um curso de Pós-Graduação em Educação Matemática, utilizando o ambiente papel/lápis. Mas, antes da análise e aplicação do problema, apresentamos a seguir as definições que nos referimos acima.

Definições e conjecturas que precedem a análise e aplicação desse estudo

Encontramos em Henriques (2014) as definições que apresentamos nos Quadros 1 e 2, referentes a dois ambientes de aprendizagem denominados papel/lápis e computacional.

Quadro 1 – Definição de ambiente papel/lápis

Um ambiente *PAPEL/LÁPIS* é um espaço usual de estudo constituído por ferramentas como: papel, lápis, caneta, borracha, etc. O quadro, o piloto ou giz também se enquadram nesse ambiente.

Fonte: Henriques (2014)

Quadro 2 – Definição de ambiente computacional

Um ambiente *COMPUTACIONAL* é um espaço virtual de estudo constituído de ferramentas como: o computador, o *software*, a *internet*, a calculadora, e de um modo geral as tecnologias digitais.

Fonte: Henriques (2014)

As atividades matemáticas apresentadas em ambos os ambientes e que têm as mesmas finalidades, se distinguem, não pelos conceitos envolvidos, mas principalmente pelas ferramentas/artefatos utilizadas nas suas realizações, conservando-se, por conseguintes, os registros de representação inerentes. Sobre estes últimos, Henriques & Almouloud (2016), baseados na teoria de registros de representação semiótica proposta por Duval (1993), apresentam a definição que reproduzimos no Quadro 3.

Quadro 3 – Definição de Registro de representação

Um registro de representação é um sistema semiótico dotado de signos que permitem identificar uma representação de um objeto do saber.

Fonte: Henriques & Almouloud (2016)

Os autores sublinham ainda que "dentre os registros de representação que podemos pensar na Educação Matemática, desde a Educação Básica ao Ensino Superior, quatro são predominantes": Língua Materna e os Registros Algébrico, Gráfico e Numérico.

Entendemos, portanto, que o tratamento dos objetos matemáticos depende das possibilidades de suas representações nos diferentes registros. Conforme mostrado no Quadro 4, amparados nos estudos de Duval, os mesmos autores apresentam a definição.

Quadro 4 - Definição de Representação semiótica

A *representação semiótica* é uma representação de uma ideia ou de um objeto do saber, construída a partir da mobilização de um sistema de sinais. A sua significação é determinada, de um lado, pela sua *forma* no sistema *semiótico* e de outro lado, pela *referência* do objeto representado. (Ibidem, p. 467, 2016).

Fonte: Henriques & Almouloud (2016)

Por exemplo, um enunciado em língua materna, uma equação algébrica, uma superfície ou uma curva de equação conhecida, uma tabela numérica, são representações semióticas que revelam sistemas semióticos diferentes, com signos diferentes. Estes tipos de representações são frequentes no desenvolvimento de uma gênese instrumental nos trabalhos matemáticos, definida por Rabardel (1995), conforme se lê no Quadro 5.

Quadro 5 - Definição da Gênese instrumental

A *Gênese Instrumental* é o processo de aprendizagem no qual um *artefato* torna-se progressivamente um *instrumento*.

Fonte: Rabardel (1995)

Uma ferramenta (ou artefato) é toda entidade material ou simbólica (objeto) à disposição do sujeito, produzida pelo seu promotor com certas finalidades. O *GeoGebra*, por exemplo, é inicialmente encarado como uma ferramenta para um sujeito que vai utilizá-lo pela primeira vez, ou mesmo que já o utiliza, mas que não mobiliza ainda as suas potencialidades relativamente a um objeto matemático de referência, como por exemplo as curvas ou as superfícies. No Quadro 6 apresenta-se a definição deste último objeto segundo Henriques & Almouloud (2016, p. 471).

Quadro 6 - Definição de Superfícies

Uma *Superfície S* no registro gráfico, é o conjunto de todos os pontos (u,v,w) do espaço tridimensional que satisfazem a equação $F(u,v,w)=0$ no registro algébrico.

Fonte: Henriques & Almouloud (2016)

Com base na Definição de superfícies (Quadro 6), podemos ainda determinar uma curva C conforme a definição que apresentamos no Quadro 7:

Quadro 7 - Definição de Curvas

Uma *Curva C* no registro gráfico, é o conjunto de todos os pontos (u,v) do espaço bidimensional ou (u,v,w) do espaço tridimensional que satisfazem a equação $G(u,v)=0$ ou as equações $(u=x(t), v=y(t), w=z(t))$, respectivamente, sendo $t \in I \subseteq R$ no registro algébrico.

Fonte: Autores deste artigo

Tanto uma superfície quanto uma curva podem, portanto, ser representadas de forma paramétrica, visando solucionar tarefas correspondentes, como veremos mais adiante, onde o *software GeoGebra* é um aliado nessa parametrização e visualização nos registros algébrico e gráfico. Com base nestas definições, apresentamos a conjectura que se lê nos Quadros 8 que também será utilizada posteriormente na realização de tarefas.

Quadro 8 - Conjectura – Interseção de duas Superfícies

Sejam S1 e S2 duas superfícies distintas definidas por $F1(u,v,w)=0$ e $F2(u,v,w)=0$, respectivamente. Se a interseção de S1 com S2, isto é $S1 \cap S2$, não é vazia, então ocorre pelo menos um dos seguintes resultados ou combinação deles: • $S1 \cap S2$ é um ponto, ou conjunto finito de pontos; • $S1 \cap S2$ é uma curva C ou conjunto finito de curvas C; • $S1 \cap S2$ é uma superfície ou crivos de superfícies.

Fonte: Autores deste artigo

A representação semiótica de cada um destes objetos no registro gráfico não exige mais do que a mobilização de suas partes na gênese instrumental, seja no ambiente papel/lápis, seja no ambiente computacional. Neste sentido, Henriques (2006, p. 205) propôs a técnica denominada Crivo-Geométrico, “Conservação de partes de superfícies que delimitam um sólido enquanto objeto geométrico fechado”, que posteriormente, com avanço dos estudos com o seu grupo (GPEMAC[4]), aparece em Henriques (2015, p. 24) como segue no Quadro 9:

Quadro 9 - Definição de Crivo-Geométrico

Crivo-Geométrico é uma conservação ou escolha de parte(s) de uma curva ou de uma superfície, necessária(s) na representação do objeto matemático correspondente no registro gráfico.

Fonte: Henriques (2015)

Um segmento, por exemplo, é um crivo de uma curva de curvatura nula (a reta), um arco é um crivo de uma curva de curvatura não nula, um disco é um crivo de um plano, etc. A reunião conveniente de crivos de curvas pode delimitar uma região plana, ao passo que a reunião conveniente de crivos de superfícies pode delimitar um sólido enquanto objeto geométrico fechado, no sentido de que existe um limite superior para as distâncias entre os pontos do sólido.

Podemos, portanto, afirmar que o conceito de planificação de sólidos difundido na literatura é equivocado, pois um sólido é um objeto denso. Logo, não se pode planificar um sólido, mas sim os crivos de superfícies que o delimitam.

O conceito de crivo e as diferentes definições apresentadas acima intervem também no desenvolvimento do pensamento geométrico na perspectiva de Pierre van Hiele (1957) que consiste de cinco níveis de compreensão, denominadas visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor. Esses níveis exprimem as características do processo de pensamento de um modo geral, e em particular geométrico. Neste artigo não descrevemos os referidos níveis. Tais descrições podem ser encontradas em diversos trabalhos, a citar Kaleff at all (1994), Ferreira (2018), Silva e Cândido (disponível pelo link, acessado em 23/09/2019)[5] entre outros.

Com base nos conceitos discutidos aqui, apresentamos a seguir a análise do *software GeoGebra*. Sustentamos que o objetivo de realizar e apresentar a análise de um *software* em um trabalho acadêmico consiste em identificar e descrever as potencialidades e os eventuais entraves de suas ferramentas utilizadas no tratamento dos objetos do saber visados na pesquisa, em particular, objetos matemáticos de referência como as curvas e as superfícies.

[4] Grupo de Pesquisa em Ensino e Aprendizagem da Matemática em Ambiente Computacional, na UESC.

[5] https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/2404060/mod_resource/content/1/Silva%20%20Candido%20-%20Modelo%20de%20Aprendizagem%20da%20Geometria%20do%20Casal%20Van%20Hiele.pdf

Análise do software GeoGebra visando o estudo de curvas e superfícies

Para realizar essa análise, consideramos o problema que enunciamos, totalmente na língua materna, conforme mostrado no Quadro 10.

Quadro 10 - O problema “três portas” distintas e o objeto “mágico”

Considerar uma parede contendo três portas, sendo a primeira, de forma circular de raio $\boldsymbol{a}$, a segunda triangular isósceles de altura e a base (relativo ao vértice do ângulo interno diferente) medindo 2$\boldsymbol{a}$ e a terceira quadrada de lado também medindo 2$\boldsymbol{a}$. Construir no *GeoGebra* por Crivo-Geométrico um objeto tridimensional que pode passar nas três portas tendo as dimensões das portas como vínculos.

Fonte: Autores deste artigo

O *GeoGebra* é um ambiente computacional que permite o estudo de objetos matemáticos de forma dinâmica, principalmente, nos referidos quatro registros de representação semióticas, durante a gênese instrumental. Ele disponibiliza diversas ferramentas com potencialidades notáveis. Para a sua análise em torno do problema dito “três portas”, destacamos as ferramentas do *GeoGebra* apresentadas no Quadro 11.

Quadro 11 - Ferramentas do *GeoGebra* que colaboram no tratamento do problema “três portas”

Curva. *Ponto* sobre objetos. *Ponto* de interseção de duas curvas. *Segmento*. *Reta perpendicular*. *Habilitar rasto*. *Animar* e evidentemente o campo de *Entrada*.

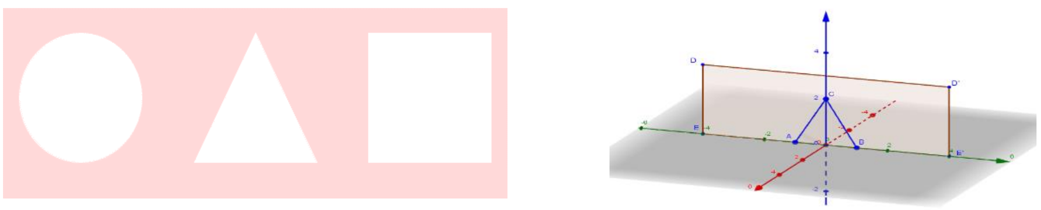
Fonte: Autores deste artigo

Dentre estas ferramentas apenas a primeira necessita do campo de *Entrada* segundo a sintaxe (1), representante da sua potencialidade sobre o estudo de curvas parametrizadas.

Curva[<Expressão>, <Expressão>, <Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>] (1)

Assim, para analisar o problema das “três portas” utilizando estas ferramentas, simulamos inicialmente a construção de uma parede com as três portas (cf. Figura 1 (a)).

Figura 1: Representação da parede com três portas distintas no ambiente computacional



(a): a parede com três portas distintas (b): modelagem do objeto “mágico”

Fonte: Autores deste artigo

Encarando o crivo de uma superfície plana ortogonal ao plano-*xy* como um representante dessa parede, introduzimos o sistema de coordenadas do espaço tridimensional, considerando o plano-*yz* como o plano que contém esse crivo, de modo que cada projeção conveniente do referido objeto “mágico”, corresponda a uma das três portas. Consideramos ainda o ponto médio da base da segunda porta coincidente com a origem desse sistema de coordenadas (cf. Figura 1(b)), e que a medida da base seja igual a $2a$, onde a é a medida do raio da primeira porta. Assim, podem-se obter as seguintes equações: $z = 2a - 2y$ e $z = 2a + 2y$, representantes de duas superfícies planas **S1** e **S2** dadas por $\mathbf{S1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \ z = 2a - 2y \}$ e $\mathbf{S2} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \ z = 2a + 2y \}$, secantes entre si em $z = 2a$, com o plano-xy em $y = a$ e $y = -a$, respectivamente, assim como ambos com o plano de equação $y = 0$. Sendo a primeira porta de forma circular de raio a, podemos considerar a equação $x^2 + y^2 = a^2$ representante da circunferência (fronteira dessa porta) de raio a no plano-xy e da superfície cilíndrica **S3** dada por $\mathbf{S3} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \ x^2 + y^2 = a^2, z \in \mathbb{R}\}$ de raio a ao longo do eixo-z. Pela Definição e pela Conjectura apresentadas nos Quadros 7 e 8, respectivamente, tem-se que a intersecção da superfície **S1** com a **S3** é uma curva C1 no espaço 3D, onde $z = 2a - 2\sqrt{a^2 - x^2}$, contida na superfície plana **S1**. Analogamente, de **S2** e **S3** obtém-se a curva C2 no espaço 3D contida na superfície **S2**, onde $z = 2a + 2\sqrt{a^2 - x^2}$. Essas duas curvas C1 e C2, podem ser parametrizadas como mostrado no Quadro 12:

Quadro 12 – Equações paramétricas das curvas C1 e C2 em 3D

Parametrização de C_1	Parametrização de C_2	Parametrização de **S3**
$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \qquad \text{para } 0 \le t \le \pi \\ z = 2\,a\,(1 - \sin t) \end{cases}$	$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \qquad \text{para } \pi \le t \le 2\pi \\ z = 2\,a\,(1 + \sin t) \end{cases}$	$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \qquad \text{para } 0 \le t \le 2\pi \\ z = 0 \end{cases}$

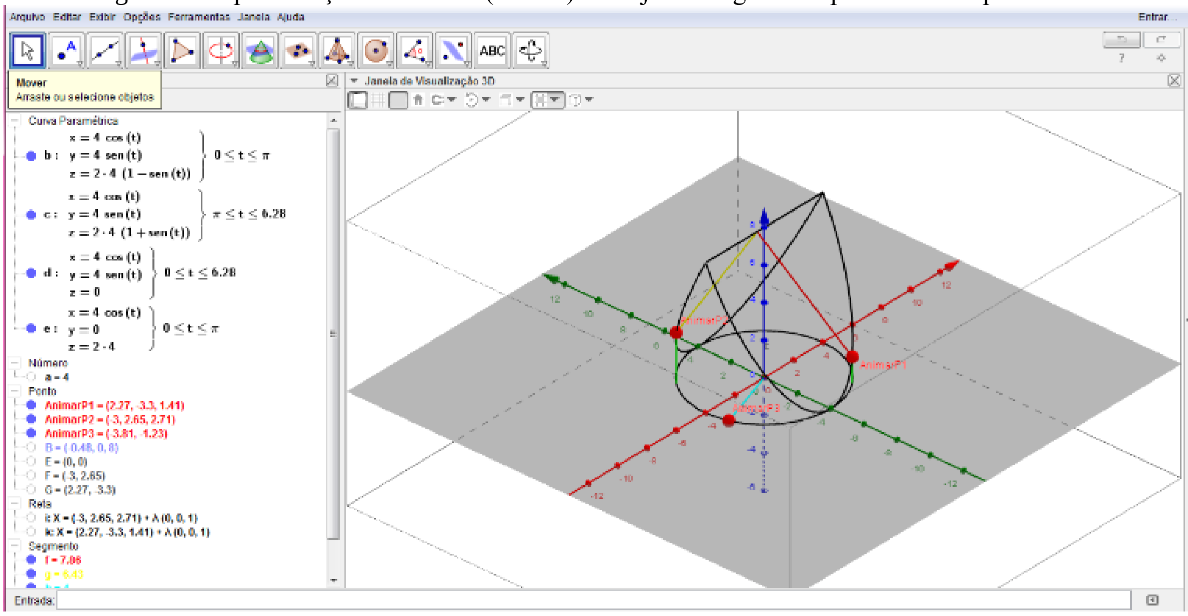
Fonte: Autores deste artigo

Além disso, tem-se que $\mathbf{S1} \cap \mathbf{S2}$ é uma curva (reta), contendo o crivo parametrizado pelas seguintes equações $x = a\cos(t)$, $y = 0$ e $z = 2a$, com $0 \le t \le \pi$. As curvas de equações assim obtidas podem ser implementadas no *GeoGebra* utilizando a potencialidade da ferramenta “Curva” (cf. sintaxe 01), como segue.

Implementação do problema “*três portas*” no *GeoGebra*

Utilizando convenientemente a sintaxe (1) da ferramenta “Curva” na linha de comando do *GeoGebra* 3D, obtemos o resultado apresentado na Figura 2.

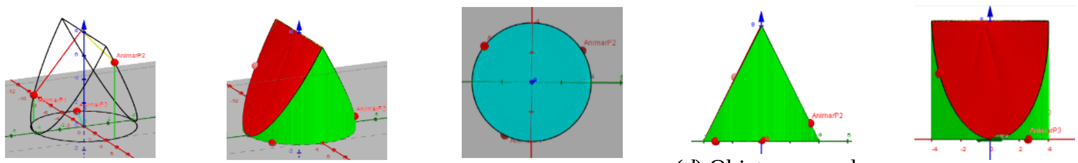
Figura 2 - Representação das curvas (arestas) do objeto "mágico" do problema três portas



Fonte: Autores deste artigo

É notável que a dinâmica possibilitada pelo ambiente computacional *GeoGebra*, nos faz inferir e validar o problema, como pode ser visto na Figura 3 de (a) a (e).

Figura 3 - Visualização do objeto "mágico" em diferentes posições por manipulação direta com mouse



(*a*) Visualização de Crivos das curvas	(*b*) Visualização de Crivos de superfícies	(*c*) Objeto passando na porta circular	(*d*) Objeto passando na porta triangular	(*e*) Objeto passando na porta quadrada

Fonte: Autores deste artigo

Portanto, consideramos o *GeoGebra* como um potencial instrumento, podendo contribuir de forma significativa no tratamento de crivos de curvas e de superfícies, favorecendo uma compreensão melhor na visualização de objetos tridimensionais.

Como veremos mais adiante, a maioria dos estudantes apresenta dificuldades na visualização de objetos matemáticos em 3D, que se manifestam, não apenas na representação desses objetos no registro gráfico ou algébrico, mas também na língua materna em função da ausência da mobilização do significado ou sentido que se deve atribuir às representações em jogo, em concordância com o pensamento geométrico correspondente no contexto da tarefa ou problema proposto. Para trazermos contribuições vivas acerca dessa problemática de visualização, interessa-nos apresentar, inicialmente, uma análise a priori do problema de três portas a partir da tarefa (T) correspondente (Quadro 13), identificada por T2, aplicada por um Professor de Cálculo Diferencial e

Integral a uma turma de um curso de Mestrado em Educação Matemática, utilizando o ambiente papel/lápis. A tarefa está subdividida em seis subtarefas (Sti), em que *i* indica o índice de cada subtarefa com $i = 1, ..., 6$.

Quadro 13: Reprodução do enunciado da segunda tarefa (T2) da avaliação de estudantes em CDI

T2	Considerar uma parede contendo três portas, sendo a primeira, de forma circular de raio *a*, a segunda triangular isósceles de altura e a base (relativa ao vértice do ângulo interno diferente) medindo, cada, duas vezes que a medida do raio da primeira e, a terceira porta quadrada de lado medindo também duas vezes a medida do raio da primeira, para realizar as seguintes subtarefas:	
	St1	Representar no registro gráfico a parede contendo as três portas consideradas em **T2**.
	Obs.	Existe um objeto "*mágico*" tridimensional que pode passar nas três portas construídas em St1 tendo as dimensões das portas como vínculos.
	St2	Representar cada superfície no registro algébrico (isto é, fornecer a equação $\boldsymbol{F(u,v,w)=0}$ de cada superfície), cuja reunião dos crivos correspondentes forma o contorno do objeto "*mágico*".
	St3	Descrever, na língua materna, cada superfície obtida em St2.
	St4	Representar, por Crivo-Geométrico, o objeto "*mágico*" destacado na Obs., no registro gráfico e, analiticamente no registro algébrico.
	St5	Descrever, na língua materna, como este objeto "*mágico*" passa nas referidas portas.
	St6	Calcular o volume do objeto "*mágico*".

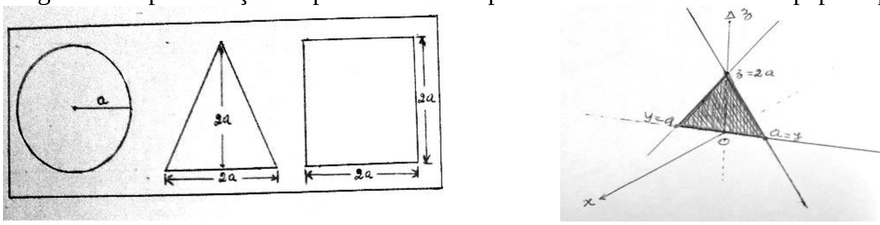
Fonte: Autores deste artigo

Análise a priori do problema de três portas no ambiente papel/lápis

O objetivo geral da T2 é permitir a análise da capacidade de abstração do estudante relativamente ao pensamento geométrico no plano e no espaço tridimensional, a partir de uma situação real fornecida totalmente na língua materna, cujos objetos geométricos correspondentes não são fornecidos explicitamente no registro gráfico. Isto é, os objetos geométricos em jogo não são fornecidos no registro gráfico e muito menos as equações correspondentes no registro algébrico.

O objetivo de St1 é simular uma parede representada por um plano contendo as três seguintes figuras geométricas: circunferência, triângulo isósceles e quadrado. Assim, para o estudante realizar essa subtarefa no ambiente papel/lápis, é suficiente representar o crivo de um plano, com ou sem perspectiva tridimensional, contendo as três figuras geométricas em questão, com qualquer escala, respeitando, porém, as medidas fornecidas no enunciado de T2, conforme mostrado na Figura 4(a).

Figura 4: Representação da parede com três portas distintas no ambiente papel/lápis



(a): a parede com três portas distintas (b): modelagem do objeto mágico

Fonte: Autores deste artigo

A segunda subtarefa (St2) é precedida de uma observação que traz uma informação adicional para provocar o pensamento geométrico do estudante no contexto da tarefa, quando lemos, “Existe um objeto “mágico” que pode passar nas três portas construídas em St1 [cf. Figura 4(a)] tendo as dimensões das portas como vínculos”. O termo vínculo sugere a ideia de que a projeção ortogonal do objeto “mágico” que coincide com uma das portas, nesse plano, deve ter a curva fronteira da porta como “limite” máximo.

O nome “mágico” é sugestivo no sentido em que o tipo do objeto que satisfaz a condição de passar nessas três portas é único em Geometria Espacial ou Analítica.

Para representar cada superfície cujos crivos delimitam o objeto “mágico”, no registro algébrico, é necessário desenvolver-se um pensamento geométrico com referência nos resultados da St1. Assim, conforme o tratamento anterior, é fundamental o estudante pensar na projeção ortogonal do objeto “mágico” e na sua passagem por cada uma das três portas. Com efeito, elegendo o plano-*yz* como o plano de projeção ortogonal do objeto “mágico”, isto é, o plano que contém o crivo representante da parede, espera-se do estudante considerar o sistema de coordenadas tridimensionais e utilizar o ponto médio da base da segunda porta como referencial coincidente com a origem desse sistema de coordenadas, conforme mostrado na Figura 4(b). Nessa figura, é possível notarmos que as arestas do triângulo isósceles, que têm extremidades sobre o eixo-*z*, são crivos das retas que passam nos pontos (0,0,2a); (0,a,0) e (0,-a,0); (0,0,2a) de equações dadas por (i) $z = -2y + 2a$ e (ii) $z = 2y + 2a$, respectivamente, no plano-*yz*, conforme mostrado na Figura 5.

Figura 5: Retas do plano-yz suportes de dois lados do triângulo isósceles e os planos correspondentes

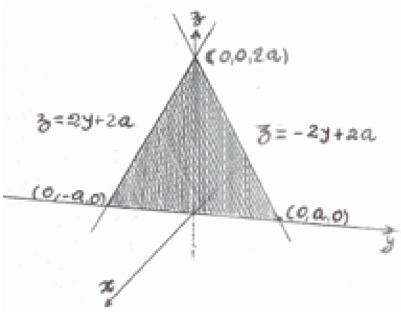


Figura 5(a)

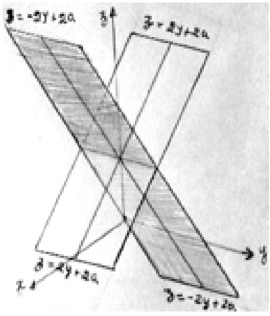


Figura 5(b)

Fonte: Autores deste artigo

Sem realizar novos cálculos, é possível para o estudante que tenha desenvolvido um pensamento geométrico sobre interseção de superfícies, perceber que as equações $z = -2y + 2a$ e $z = 2y + 2a$ das retas, cujos crivos são representados na Figura 5(a), correspondem às equações das superfícies planas cujas interseções com o plano-*yz* são essas retas, conforme mostrado na Figura 5(b). Além disso, a partir da geometria da primeira porta, espera-se dos estudantes a mobilização da dualidade própria dos conceitos de uma superfície cilíndrica circular reta e de uma circunferência (pois ambos os objetos têm uma equação em comum), e a representação de um cilindro de raio a ao longo do eixo-*z*, juntamente com as duas superfícies planas consideradas na Figura 5(b), conforme mostrado na Figura 6(a).

Figura 6: Visualização dos crivos das superfícies planas, cilíndrica e o objeto “mágico”

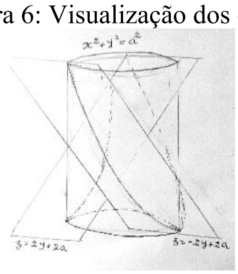


Figura 6(a)

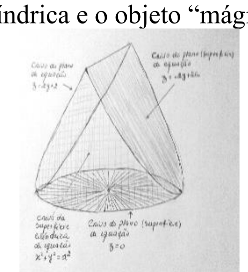


Figura 6(b)

Fonte: Autores deste artigo

Da St4, espera-se que o estudante represente, por Crivo-Geométrico, o objeto “mágico” em questão, o que não é uma tarefa fácil com as técnicas do ambiente papel/lápis. Todavia, mobilizando-se pensamentos geométricos convenientes, em concordância com as propriedades em jogo (crivos de curvas de interseção de superfícies, crivos de superfícies, projeção ortogonal, “ver” no espaço etc.), espera-se do estudante a representação desse objeto “mágico” (cf. Figura 6(b)). O objeto assim obtido pode ser representado analiticamente, no registro algébrico, o que significa constituir a estrutura algébrica do conjunto de pontos do espaço tridimensional que compõe esse objeto, ou seja, o sólido Q na forma do seguinte conjunto:

$$Q = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 |\, u_1 \leq u \leq u_2,\ v_1 \leq v \leq v_2,\ w_1 \leq w \leq w_2\}$$

em que $u_1, u_2,\ v_1, v_2,\ w_1$ e w_2, são expressões, devendo pelo menos duas delas, referentes à mesma variável, u, v ou w, serem constantes. Ora, das geometrias já mobilizadas é possível vermos que a projeção ortogonal do objeto "mágico" no plano-*xy* é um disco de raio a e correspondente à porta circular, cuja representação analítica (RA) em coordenadas cartesianas, que identificamos por "RA-da-base" do objeto "mágico" é dada por:

$$RA_{da-base} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, -a \leq x \leq a,\ -\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}\right\}$$

Além disso, da figura 6(b), podemos ver que o objeto "mágico" é limitado superiormente por crivos dos dois planos da Figura 5(b). Assim, o sólido Q correspondente ao objeto "mágico" é formado pela união de dois sólidos Q_1 e Q_2, isto é, $Q = Q_1 \cup Q_2$ onde,

$$Q_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | -a \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}, 0 \leq z \leq 2a - 2y\right\}$$

e

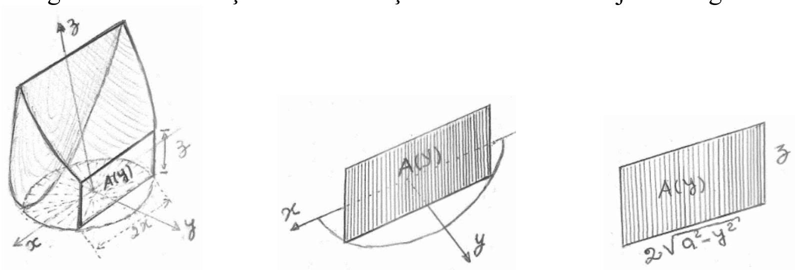
$$Q_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | -a \leq x \leq a,\ -\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq 0, 0 \leq z \leq 2y + 2a\right\}$$

Conforme defendido na análise do *software*, a passagem do objeto "mágico" nas referidas portas, segue o formato da projeção conveniente, segundo a figura plana correspondente à porta escolhida, seja triangular, circular ou quadrada, respondendo assim à St5 da T2. Na última subtarefa (St6), tem-se por objetivo calcular o volume (V) do objeto "mágico". Na avaliação do Professor de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), esperava-se a aplicação de uma integral, pelos estudantes, para fornecerem esse volume. Assim, para realizar essa tarefa espera-se dos estudantes a aplicação da técnica de cálculo do volume de sólidos por secções transversais, por integrais duplas ou mesmo por integrais triplas. Apresentamos uma possibilidade para a primeira técnica e uma para a terceira que cobre também a segunda.

Volume do objeto "*mágico*" por secções transversais

É possível notar que cada corte transversal do objeto "mágico" por um plano perpendicular ao eixo-*y*, para *y* variando no intervalo de -*a* a *a*, é uma secção retangular de área *A*(y), como mostrado na Figura 7 onde identificamos a altura por *z* e base por 2*x*.

Figura 7: Visualização de uma secção transversal do objeto “mágico”.



Fonte: Autores deste artigo

Sendo $z = -2y + 2a$ e $x = \sqrt{a^2 - y^2}$ então $A(y) = z.2x = (2a - 2y).2\sqrt{a^2 - y^2}$, ou equivalentemente, $A(y) = 4a\sqrt{a^2 - y^2} - 4y\sqrt{a^2 - y^2}$. Consequentemente, o volume (V) do objeto “mágico” por secções transversais é obtido pela soma dessas áreas para y no intervalo de -a a a. Ou seja:

$$V = \int_{-a}^{a} A(y)dy = 2\int_{0}^{a} \left(4a\sqrt{a^2 - y^2} - y\sqrt{a^2 - y^2}\right) dy = 2\pi a^3 - \frac{8}{3}a^3$$

Os cálculos necessários conduzem perfeitamente ao resultado indicado. Deixamos essa tarefa ao cargo do leitor, e apresentamos a seguir a análise do cálculo do volume do objeto “mágico” pela terceira estratégia (integrais triplas).

Volume do objeto “*mágico*” por integrais triplas

Deve-se aplicar a técnica do cálculo que consiste na representação do volume pela integral $\iiint_Q dV$, onde Q é o representante do sólido em questão, isto é, o objeto “mágico”, e dV a diferencial do volume. Pode-se esperar a utilização do Q_1 ou Q_2 obtidos anteriormente, em coordenadas cilíndricas. No caso de Q_1, temos:

$$Q_1 = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 |\ 0 \le r \le a,\ 0 \le \theta \le \pi, 0 \le z \le 2a - 2r\text{sen}\theta\}$$

A transposição dessa representação na aplicação de técnica de cálculo de volume por integrais triplas, requer a seguinte representação, onde se mobiliza o pensamento geométrico sobre a simetria do objeto “mágico” em relação ao plano-*xz* ou *y* = 0.

$$\begin{aligned} V_{OM} &= \iiint_Q dV \\ &= 2\int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2a-2r\text{sen}\theta} r dz d\theta dr = 2\pi a^3 - \frac{8}{3}a^3 \end{aligned}$$

De modo análogo ao tratamento do problema pela primeira técnica, deixamos ao leitor os cálculos necessários e passaremos à apresentação da análise das práticas efetivas dos estudantes envolvidos na pesquisa.

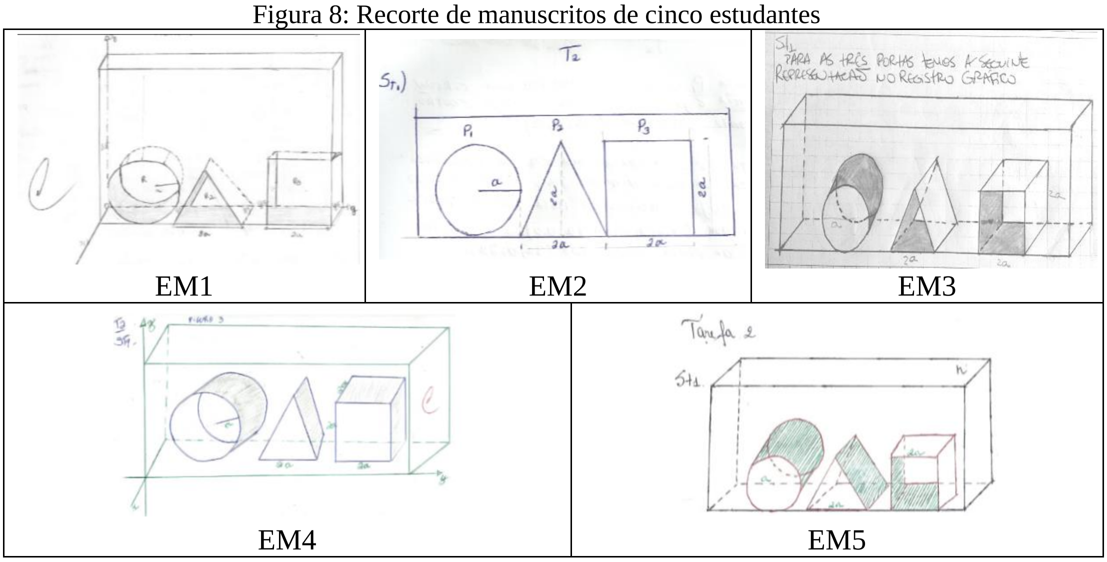
Aplicação e análise de práticas efetivas de estudantes

Conforme sublinhamos anteriormente, o problema que acabamos de analisar foi aplicado aos estudantes de um curso de Mestrado na Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), na Bahia-Brasil, por um Professor em uma das suas avaliações da disciplina denominada Cálculo Diferencial e Integral (CDI) na Perspectiva da Educação Matemática oferecida no primeiro semestre de 2016. Como vemos no Quadro 13, o problema ocupava a segunda posição identificada por T2, dentre as demais tarefas constantes na aplicação, e foi organizado com seis subtarefas (Sti), onde i indica o índice de cada subtarefa com $i = 1, 2, \dots, 6$, tendo cada uma um objetivo específico. Sublinhamos que na proposta dessa disciplina, os estudantes têm relação com os conceitos de funções, de Crivo-Geométrico, bem como de registros discutidos neste artigo. A turma era formada com 16 mestrandos. A título de ilustração, optamos por trazer neste artigo os recortes de manuscritos de cinco deles que identificamos por EM1, EM2, EM3, EM4 e EM5, para as análises seguintes.

As práticas efetivas dos estudantes

Sublinhamos que, de um modo geral, todos os estudantes da turma apresentavam um pensamento geométrico global pertinente ao problema, com base na leitura do enunciado, e restrito à mobilização das configurações geometrias das portas em questão, porém, em 3D, salvo o EM2. Esse pensamento pode ser notável nas construções que apresentavam nas suas práticas, conforme mostrado nos recortes de manuscritos dos cinco estudantes (EM1, EM2, EM3, EM4 e EM5), que apresentamos na Figura 8.

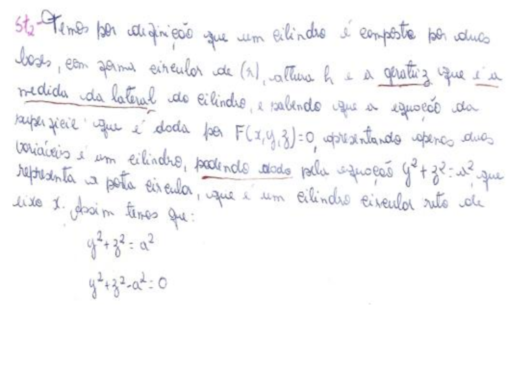
Figura 8: Recorte de manuscritos de cinco estudantes



Fonte: Dados da pesquisa

Podemos, portanto, notar que a primeira subtarefa (st1): representar no registro gráfico a parede contendo as três portas consideradas em T2, não se apresenta como um problema de difícil resolução para estes estudantes. Todavia, a existência de um objeto “mágico” tridimensional que pode passar nas três portas, tendo as dimensões das portas como vínculos, constitui um verdadeiro problema e desafiador para esses estudantes. As dificuldades são generalizadas, no sentido de que todos os estudantes buscavam solucionar o problema, mobilizando um pensamento geométrico centrado em uma figura geométrica específica, para cada porta, em vez de um único objeto, como se espera pela análise a priori. Ora, a st2 é clara: representar cada superfície no registro algébrico (isto é, fornecer, a equação F(u,v,w)=0 de cada superfície), cuja reunião dos crivos correspondentes delimita o objeto “mágico”. Assim, esperava-se dos estudantes a apresentação de um único sólido. Contudo, encontramos respostas diferentes como podemos ler, por exemplo, no recorte EM1 na Figura 9.

Figura 9: Recorte do manuscrito estudante EM1 referente a St2



Transcrição: St2 – Temos por definição que um cilindro é composto por duas bases, com forma circular de (r), altura h e a geratriz que é a medida da lateral de cilindro, e sabemos que a equação da superfície que é dada por F(x, y, z)=0, apresentando apenas duas variáveis é um cilindro, podendo dado pela equação $z^2 + y^2 = a^2$, que representa a porta circula, que é um cilindro circular reto de eixo x. Assim temos que:

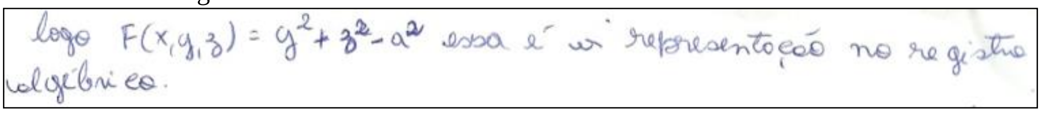
$$z^2 + y^2 = a^2$$
$$z^2 + y^2 - a^2 = 0$$

Produção efetiva do Estudante EM1 — Transcrição da Produção do Estudante EM1

Fonte: Dados da pesquisa

Como se pode notar, nesse manuscrito, o pensamento geométrico deste estudante não está associado ao objeto esperado que pudesse passar nas três portas, levando em consideração as condições fornecidas no enunciado, mas à geometria de uma delas, especialmente a entrada circular. Para concluir o seu pensamento, tendo referência a equação F(x, y, z)=0 de uma superfície e do seu resultado $z^2 + y^2 - a^2=0$ (cf. Figura 9), ele produz a escrita que apresentamos, a partir do recorte do seu manuscrito, na Figura 10:

Figura 10: Recorte do manuscrito estudante EM1 referente a St2



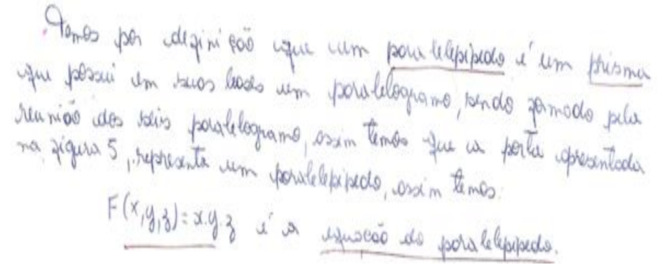
logo $F(x,y,z) = y^2 + z^2 - a^2$ essa é a representação no registro algébrico.

Fonte: Dados da pesquisa

na tentativa de fornecer a equação da sua superfície cilíndrica (cf. Figura 8, EM1). Ora, apesar dessa equação colaborar com o tratamento do problema, ela não se coordena com o referencial adotado pelo estudante. Além disso, o pensamento geométrico desse estudante associado a esta equação, é equivocado quando se restringe a um objeto que deve passar apenas em uma porta, desvinculando, dessa forma, o pensamento ao problema proposto. Segundo Vale (2015) "a visualização, ao serviço da resolução de problemas, poderá desempenhar um papel central para inspirar uma resolução completa, e não ter apenas um papel meramente processual". Vale (2015, p 11). Entende-se, assim que a visualização é um elemento importantíssimo na resolução de problemas, principalmente em Geometria, desde que o pensamento geométrico associado seja correspondente aos conceitos ou propriedades intrínsecas do objeto geométrico central do problema, como o objeto "mágico". Vale ainda sublinhar que a visualização colabora bem ao serviço ou práticas de resolução de problemas em Geometria plana, mas se torna complexa quando os estudantes são confrontados com os problemas que exigem a visualização e um pensamento geométrico em torno de objetos tridimensionais, seja no registro gráfico, seja no registro algébrico.

Na sequência, e com o mesmo pensamento isolado para cada porta, o estudante EM1 apresenta a definição para um paralelepípedo (que reproduzimos na Figura 11, EM1) com base na representação desse objeto que ele forneceu no registro gráfico.

Figura 11: Recorte do manuscrito do estudante EM1 referente a St2


Temos por definição que um paralelepípedo é um prisma que possui em seus lados um paralelogramo, sendo formado pela reunião dos seis paralelogramo, assim temos que a porta apresentada na figura 5, representa um paralelepípedo, assim temos F(x,y,z) = x.y.z é a equação do paralelepípedo.

Produção efetiva do Estudante EM1

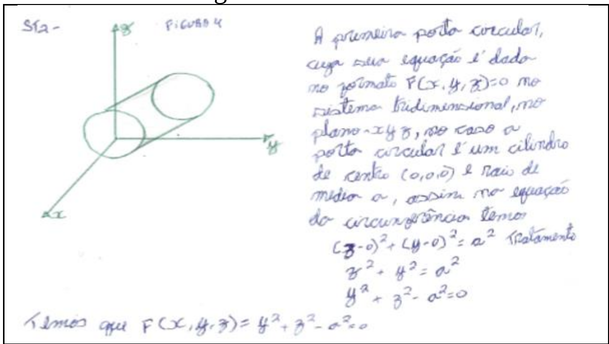
Temos por definição que um paralelepípedo é um prisma que possui em seus lados paralelogramo, sendo formado pela reunião dos seis paralelogramo, assim temos que a porta apresentada na Figura 5, representa um paralelepípedo, assim temos $F(x,y,z)=xyz$ é a equação do paralelepípedo.

Transcrição da Produção do Estudante EM1

Fonte: Dados da pesquisa

A Figura 5, referida pelo estudante, corresponde à Figura 8 (EM1) deste artigo. Além da apresentação de uma definição inconsistente para o referido objeto matemático (paralelepípedo), o estudante confunde a definição de um paralelepípedo, enquanto sólido geométrico, com a equação que permite o cálculo do volume deste sólido, quando conclui que "$F(x,y,z) = xyz$ é a equação do paralelepípedo". De fato, a função $F(x,y,z)$ assim definida, permite calcular o volume do paralelepípedo delimitado pelos crivos dos planos coordenados e dos três planos paralelos aos planos coordenados passando pelo ponto (*x*, *y*, *z*). Além da definição associada à porta de forma quadrada, o mesmo estudante forneceu a definição das portas (circular de raio a e triangular isósceles) também de forma errônea. Reforçamos como já sublinhado anteriormente, que o pensamento geométrico centrado em uma figura geométrica tridimensional específica, para cada porta, em vez de um único objeto "mágico" para as três portas, é geral para todos os estudantes, como se pode ainda ver na produção do estudante EM4 que trazemos na Figura 12, quando escreve:

Figura 12: Recorte do manuscrito do estudante EM4 referente a St2.



Transcrição: A primeira porta circular, cuja sua equação é dada no formato F(x,y,z)=0 no sistema tridimensional, no plano-xy, no caso a porta circular é um cilindro de centro (0,0,0) e raio de media a, assim na equação da circunferência temos

$(z\text{-}0)^2+(y\text{-}0)^2=\mathrm{a}^2$ tratamento

$z^2 + y^2=\mathrm{a}^2$

$y^2 + z^2\text{-}\mathrm{a}^2=0$

Temos que F(x,y,z)= $y^2 + z^2\text{-}\mathrm{a}^2=0$

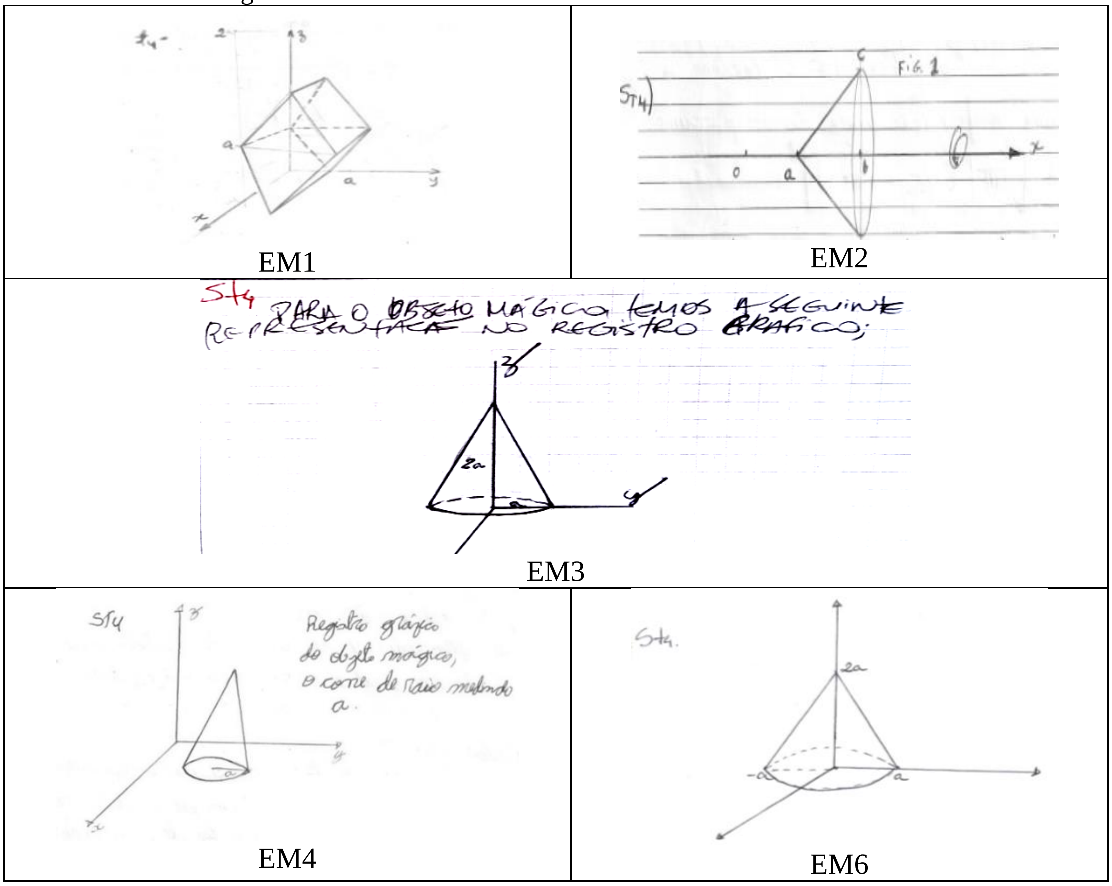
Produção efetiva do Estudante EM4 — Transcrição da Produção do Estudante EM4

Fonte: Dados da pesquisa

O crivo da superfície cilíndrica ao longo do eixo-*x* representado pelo estudante, no registro gráfico e algébrico, também favorece a modelagem do objeto "mágico" quando o pensamento geométrico esperado é mobilizado corretamente, o que não ocorre com esses estudantes. Todavia, podemos encontrar ao menos a descrição, na língua materna, de uma das superfícies esperadas na realização da St3, como é o caso da superfície cilíndrica. Os crivos das três superfícies planas secantes, duas a duas, destacadas na análise a priori, são ausentes nos pensamentos geométricos desses estudantes, o que os impede de alcançar o objeto "mágico".

Respondendo à St4: "Representar, por Crivo-Geométrico, o objeto "mágico" destacado na Obs., no registro gráfico e, analiticamente no registro algébrico", encontramos respostas em que o pensamento geométrico da maioria dos estudantes é restrito à porta circular e triangular, e um deles à porta quadrada, nomeadamente o estudante EM1, como podemos observar nos recortes dos seus manuscritos que trazemos na Figura 13.

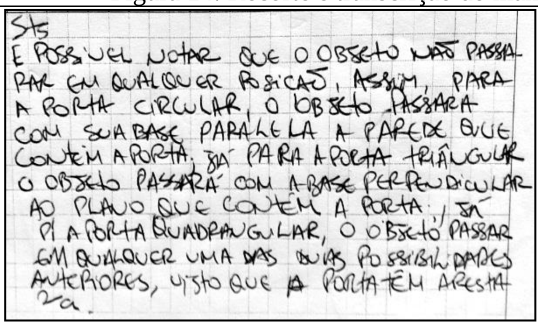
Figura 13: Recorte de manuscrito de estudantes referente a St4.



Fonte: Dados da pesquisa

Percebe-se, com esses resultados, a necessidade de um investimento na qualificação destes estudantes, relativamente aos pensamentos geométricos apropriados nos diferentes registros de representação, onde a mobilização de crivos de superfícies pode ser uma alternativa metodológica para esse pensamento geométrico. Baseados nos resultados apresentados na Figura 13, cada estudante apresenta então a resposta esperada para a subtarefa 5 (St5), isto é, todos forneceram uma descrição pertinente associada à geometria mobilizada na St4. A título de ilustração, trazemos na Figura 14 a descrição fornecida por um deles, onde escolhemos a do estudante EM3 por estar mais legível.

Figura 14: Recorte e transcrição do manuscrito do estudante EM3 referente a St5.


St5
É POSSÍVEL NOTAR QUE O OBJETO NÃO PASSA PAR EM QUALQUER POSIÇÃO, ASSIM, PARA A PORTA CIRCULAR, O OBJETO PASSARÁ COM SUA BASE PARALELA A PAREDE QUE CONTÉM A PORTA. JÁ PARA A PORTA TRIANGULAR O OBJETO PASSARÁ COM A BASE PERPENDICULAR AO PLANO QUE CONTÉM A PORTA. JÁ P/ A PORTA QUADRANGULAR, O OBJETO PASSAR EM QUALQUER UMA DAS DUAS POSSIBILIDADES ANTERIORES, VISTO QUE A PORTA TEM ARESTA 2a.

Transcrição: É possível notar que o objeto não passa par em qualquer posição, assim, para a porta circular, o objeto passará com sua base paralela a parede que contém a porta. Já a porta triangular o objeto passará com a base perpendicular ao plano que contém a porta. Já p/ a porta quadrangular, o objeto passar em qualquer uma das duas possibilidades anteriores, visto que a porta tem aresta 2*a*.

Fonte: Dados da pesquisa

Como é de se esperar, a última subtarefa da T2 da referida avaliação, que visava calcular o volume do objeto "mágico", também foi respondida pelos estudantes, com base nos resultados obtidos na St4 (cf. Figura 15).

Figura 15: Recorte e transcrição do manuscrito dos estudantes EM4 e EM5 referente a St6.

Estudante **EM1**	**Transcrição** (EM1)
St6-Temos que o objeto mágico é composto por dois prismas triangulares assim segue que: $V = \frac{x.y.z}{2} = \frac{a.a.2a}{2} = a^3$, multiplicando o volume por dois, por se tratar de dois prismas, assim o volume do objeto é 2. $V = 2a^3$ u.v.	St6-Temos que o objeto mágico é composto por dois prismas triangulares assim segue que $V = \frac{xyz}{2} = \frac{a.a.2a}{2} = a^3$ Multiplicando o volume por dois, por se tratar de dois prismas, assim o volume do objeto é 2. $V = 2a^3\ u.v$
Estudante **EM4**	**Transcrição** (**EM4**):
St6 Raio da base do objeto mágico é de medida a, a sua altura é de medida 2a. Como o objeto é o cone a fórmula do volume é dado por $V_c = \frac{1}{3}\pi.r^2h$, tendo como altura o número z. Portanto $V_c = \frac{1}{3}\pi.r^2h$ $V_c = \frac{1}{3}\pi a^2 z$	St6 Raio da base do objeto mágico é de medida *a*, a sua altura é de medida *2a*. Como o objeto é o cone a fórmula do volume é dado por $V_c = \pi r^2 h/3$, tendo como altura o número *z*. Portanto $V_c = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ $V_c = \frac{1}{3}\pi a^2 z$
Estudante **EM5**	**Transcrição** (**EM5**)
St. O volume do cone é determinado por: $V = \frac{\pi R^2 h}{3}$ Substituindo os valores nas expressões, temos: $V = \frac{\pi(a)^2 2a}{3}$ $V = \frac{2a^3\pi}{3}$ u.v.	St. O volume do cone é determinado por: $V = \frac{\pi R^2 h}{3}$ Substituindo os valores nas expressões, $V = \frac{\pi(a)^2.2a}{3}$ temos: $V = \frac{2a^3\pi}{3}\quad u.v$

Fonte: Dados da pesquisa

No geral, todos os estudantes conseguem encontrar o volume do objeto (sólido) que forneceram na St4 aplicando as fórmulas correspondentes. No entanto, não conseguem alcançar o objeto tridimensional esperado, o que mostra que o pensamento geométrico associado à visualização de um objeto geométrico do espaço tridimensional, que não é familiar da prática usual dos estudantes, não é uma tarefa simples para eles. É um verdadeiro problema que exige uma formação própria. Nessa formação, as definições e técnicas que apresentamos neste artigo, podem trazer uma ajuda significativa no desenvolvimento de pensamentos geométricos dos estudantes conforme preconizado na análise a priori.

Considerações finais

No princípio, nos propomos responder duas questões diretrizes deste artigo, a saber: Por que e como realizar a análise de um *software* educativo tal como o *GeoGebra*? Quais são os conhecimentos que os estudantes de uma instituição do Ensino Superior mobilizam, no ambiente papel/lápis, diante de uma tarefa não familiar de suas práticas usuais? Vale sublinharmos que o propósito deste artigo não incide na gênese instrumental do *GeoGebra* face às práticas efetivas dos estudantes na relação destes com o problema proposto. Deixamos esse propósito como princípio de investigações futuras. Contentamo-nos em responder à primeira questão e discutir os conhecimentos que os estudantes mobilizam na resolução do referido problema, utilizando o ambiente papel/lápis e futuramente utilizar o *software GeoGebra*.

Assim, como acompanhamos, a apresentação da seção deste artigo que se reporta à primeira questão permite ao leitor compreender que todo ambiente computacional, ou tecnologia digital como o *software GeoGebra* proposto para os estudos matemáticos, disponibiliza diversas ferramentas que têm potencialidades notáveis, sendo específicas ou genéricas na resolução de problemas. Essa diversidade requer então, no âmbito da Educação Matemática, o conhecimento e a compreensão das funcionalidades dessas potencialidades. Daí o porquê de análise de um *software* educativo em particular, ou de tecnologia digital em geral. Contudo, em uma pesquisa educacional, é praticamente impossível utilizar, em um trabalho, todas as ferramentas disponíveis em um *software*. Com efeito, a referida análise deve ser restrita ou direcionada ao mapeamento/censo das ferramentas específicas para o tratamento do problema ou tarefas envolvidas no trabalho. Assim, para a análise do *GeoGebra* em torno do problema dito “três portas”, destacamos as ferramentas apresentadas neste artigo (cf. Quadro 11).

A preocupação desse tipo de análise é resultado de pesquisas que vimos realizando no Laboratório de Visualização Matemática (L@VIM) da UESC, no âmbito do Grupo de Pesquisa em Ensino e Aprendizagem da Matemática em Ambiente Computacional (GPEMAC), em que, com base nas análises apresentadas, conclui-se que o *GeoGebra* é um *software* que permite potencializar, de forma dinâmica, o estudo de objetos matemáticos em diferentes registros de representação, em particular as curvas e as superfícies, propostos na formação de recursos humanos no Ensino Superior.

Para responder a segunda questão, nos interessamos em analisar a capacidade de abstração de estudantes em um curso de Mestrado em Educação Matemática, em relação aos pensamentos geométricos que desenvolvem sobre objetos matemáticos nos espaços bi e tridimensionais. Para isso, nos apropriamos do mesmo problema utilizado na análise do *software*, aplicado por um Professor na avaliação de estudantes na disciplina de CDI do referido curso, como instrumento de coleta dos dados. Os resultados obtidos mostram que os estudantes têm domínio na mobilização de pensamentos geométricos sobre crivos de curvas planas, mas apresentam dificuldades de visualização e representação de objetos geométricos em 3D, nos registros algébrico e gráfico. As dificuldades dos mesmos se manifestam na mobilização inadequada de pensamentos geométricos sobre superfícies cujos crivos delimitam os objetos tridimensionais visados, seja em Geometria Espacial ou Analítica. Consequentemente, eles fornecem resultados fora do contexto do problema proposto, necessitando, portanto, de uma formação aprofundada, onde os conceitos, definições e técnicas apresentadas neste artigo, podem trazer uma ajuda significativa no desenvolvimento de pensamentos geométricos desses estudantes.

Referências

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. In : *Annales de didactique et de sciences cognitives. IREM de Strasbourg*, v. 5, p. 37-65, 1993.

FERREIRA, K. A. F. R. *Pensamento geométrico dos alunos do ensino médio de uma escola pública de campo novo do Parecis – MT.* Cuiabá. 2018.

HENRIQUES, A. *L'enseignement et l'apprentissage des intégrales multiples*: analyse didactique intégrant l'usage du logiciel Maple.UJF-Grenoble, Lab. Leibniz, 2006.

HENRIQUES, A. *Contribuições dos Ambientes Computacionais Maple, Cubex e A Impressora 3D na Pesquisa e no Ensino-Aprendizagem da Matemática nas IES*. Progressão na Carreira do Magistério, UESC-Ilhéus, 2015.

HENRIQUES, A. & ALMOULOUD, S. A. *Teoria dos Registros de Representação Semiótica em Pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior*: Uma Análise de Superfícies e Funções de duas Variáveis com Intervenção do *Software* Maple, Revista Ciência & Educação, Bauru, v. 22, n. 2, p. 465-487, 2016.

KALEFF, A. M., HENRIQUES, A. S., REIS, D. M., FIGUEIREDO, L.G. *Desenvolvimento do Pensamento Geométrico – O Modelo de Van Hiele.* Bolema. V.9. n. 10. 1994.

RABARDEL P. *Les hommes et les technologies* - Approche cognitive des instruments contemporains, Editions Armand Colin. 1995.

VALE, I. *A criatividade nas (re)soluções visuais de problemas*. **Educação e Matemática**, nº 135, p. 9-15, 2015.

VAN-HIELE, Pierre Marie. *De Problematiek van het inzicht. Gedemonstreerd aan het inzicht van schoolkinderen in meetkunde-leerstof.* (Doctorate). University Utrecht, 1957.

APÊNDICE

A título de informações complementares, o leitor pode refletir sobre os seguintes objetos de estudo extraídos nas análises apresentadas neste artigo como componentes de conhecimentos importantes no tocante a resolução do problema proposto requerendo saberes sobre:

- Superfícies, em particular planas e cilíndricas;
- Curvas, em particular retas e circunferências;
- Crivo de curvas e de superfícies;
- Interseção de superfícies;
- Parametrização de curvas e de superfícies;
- Projeção ortogonal de objetos geométricos;
- Circunferência, triângulo, quadrado;
- Vínculo;
- Sistema de coordenadas cartesianas tridimensional;
- Representação de objetos no registro gráfico;
- Conjunto, representação analítica de um sólido ou espaço tridimensional finito ou infinito (conjunto de pontos no espaço 3D);
- Interpretação de gráficos ou de figuras geométricas em situações convenientes emergentes no problema, resultado de pensamentos geométricos convenientes;
- Ponto médio;
- Áreas de seções transversais;
- Integrais;
- Cálculo de volume de sólidos por integrais simples ou múltiplas.

Trata-se, portanto, de um problema riquíssimo em virtude da ecologia de saberes que lhe abrangem, importantes na formação de recursos humanos.

Recebido: 29/07/2019

Aprovado: 28/10/2019