EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019vol21i3p231-249

Processos de objetificação no desenvolvimento do pensamento algébrico: o caso de Evandro

Objectification processes in the development of algebraic thinking: Evandro's case

FLÁVIA CHRISTIANE DO NASCIMENTO REGIS[1]

TERESINHA FUMI KAWASAKI [2]

Resumo

Fazemos nesse artigo um recorte de uma pesquisa de mestrado profissional desenvolvida entre maio e setembro de 2016 com 17 estudantes na faixa etária de 13 a 15 anos, que cursavam o oitavo ano do Ensino Fundamental em uma escola pública da rede estadual de Minas Gerais, na cidade de Belo Horizonte. O foco da pesquisa foi a observação de seis intervenções didáticas realizadas com o objetivo de provocar o desenvolvimento do pensamento algébrico, caracterizado como um modo analítico de pensar em situações de indeterminação. Desenvolvemos seis tarefas que tiveram a generalização de padrões como fio condutor, com a finalidade de provocar os estudantes a pensarem algebricamente. As intervenções foram filmadas e notas de campo foram tomadas. Observamos que ações foram desencadeadas pela mediação de diferentes artefatos e interação social. As análises de tais ações tiveram como fundamentação teórica a Teoria da Objetificação do conhecimento, em que a aprendizagem é considerada um processo através do qual é possível, através do uso de artefatos, tomar consciência de modos culturais de pensar, os processos de objetificação. Nessa concepção, trazemos para este recorte, os processos objetificação vivenciados por Evandro, ao se envolver em tarefas de observar padrões e generalizar algebricamente. Os resultados mostram que, através da coordenação de diferentes recursos, Evandro transitou entre diferentes etapas da generalização (detectar um comunalidade, estendê-la e utilizá-la para deduzir uma regra) e atingiu, desse modo, as diferentes camadas de generalidade, utilizando, para expressar seu modo de pensar durante as tarefas, desde gestos e recursos materiais, até a elaboração de uma regra em linguagem oral.

Palavras-chave: *Processos de objetificação, Camadas de generalidade, Pensamento algébrico.*

Abstract

This article is a clipping of a professional master's research conducted between May and September 2016 with 17 students aged 13 to 15 years, who were in the eighth grade of elementary school in a public school in the state network of Minas Gerais, in the city.

[1] Mestre em Educação e Docência. Professora concursada da rede de Ensino do estado de Minas Gerais – flaviacnregis@gmail.com

[2] Doutora em Educação pelo Programa de Pós-Graduação em Educação: Conhecimento e Inclusão Social, da Faculdade de Educação da UFMG (PPGE/FaE/UFMG). Professora associada do Departamento de Métodos e Técnicas de Ensino da FaE/UFMG – kawasakit@gmail.com

from Belo Horizonte. The focus of the research was the observation of six didactic interventions made with the objective of provoking the development of algebraic thinking, characterized as an analytical way of thinking in situations of indetermination. We developed six tasks that had the generalization of patterns as a guiding thread, in order to provoke students to think algebraically. The interventions were filmed and field notes were taken. We observed that actions were triggered by the mediation of different artifacts and social interaction. The analysis of such actions had as theoretical foundation the Objectification Theory of knowledge, in which learning is considered a process through which it is possible, through the use of artifacts, to become aware of cultural ways of thinking, the processes of objectification. In this conception, we bring to this clipping, the objectification processes experienced by Evandro, when engaging in tasks of observing patterns and generalizing algebraically. The results show that, by coordinating different resources, Evandro moved between different stages of generalization (detecting a commonality, extending it and using it to derive a rule) and thereby reaching the different layers of generality, using, to express their thinking during tasks, from gestures and material resources, to the elaboration of a rule in oral language.

Keywords: *Processes of objectification, layers of generality, Algebraic Thinking.*

Introdução

No presente artigo apresentamos uma reflexão acerca do que seria *aprender álgebra*. Para tal, revisitamos os dados da pesquisa[3] de Mestrado Profissional da primeira autora deste artigo, que teve como objetivo provocar o desenvolvimento do pensamento algébrico em uma turma de estudantes, entre 13 e 15 anos, do 8º ano de Ensino Fundamental da Rede Estadual de Ensino do Estado de Minas Gerais. A pesquisa investigou que ações seriam desencadeadas pelos estudantes ao lidar com tarefas que envolveram a generalização de padrões e a utilização de diversos artefatos mediadores e situações que necessariamente provocavam interações sociais.

Interessa-nos nesse momento analisar as maneiras através das quais os estudantes foram, progressivamente, tomando consciência da prática (cultural) de generalizar um padrão algebricamente, o que Radford (2010) define como *Processos de Objetificação* Esta é uma ferramenta de análise, inserida numa concepção de aprendizagem como um processo incompleto, parcial e situado histórica e contextualmente. No recorte selecionado para este artigo, daremos visibilidade aos processos de objetificação vivenciados por Evandro, um estudante que, do ponto de vista da aprendizagem no

[3] A pesquisa teve a aprovação do Comitê de Ética e Pesquisa da Universidade Federal de Minas Gerais, CAAE: 51274315.2.0000.5149

modelo tradicional transmissivo, apresentava certa dificuldade em utilizar a linguagem matemática simbólica.

Iniciamos assim, apresentando as definições e características do pensamento algébrico. Logo após situaremos o processo de generalizar padrões na Teoria da Objetificação de Luis Radford. Nas seções seguintes apresentaremos Evandro e as experiências durante as quais manifestou-se de formas que dão suporte para afirmarmos que vivenciou uma tomada de consciência do processo de generalizar um padrão algebricamente. Finalizamos com uma breve reflexão acerca dos processos de objetificação vivenciados por Evandro.

O pensamento algébrico e a generalização de padrões

A definição do que seja pensar algebricamente não é consensual, dado ao próprio caráter multifacetado desse ramo da matemática que se caracteriza pela indeterminação (RADFORD, 2010; LINS; GIMENEZ, 1997). Investigações sobre o pensamento algébrico e suas características ganharam força na década de 90, por meio da problematização acerca das relações entre pensamento e linguagem algébrica e consequente introdução do pensamento algébrico na educação básica (BEDNARZ; KIERAN; LEE, 1996).

Outras pesquisas problematizaram o percurso histórico do ensino de álgebra, discutindo as relações entre as diferentes concepções que foram se formando sobre a álgebra e seu ensino (USISKIN, 1995), além da relação de subordinação entre pensamento e linguagem algébrica (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993) e também das relações entre álgebra e aritmética (LINS; GIMENEZ, 1997).

Alguns desses estudos salientaram a importância da relação entre pensamento e linguagem algébrica não ser de subordinação, mas de complementaridade, na qual o domínio da linguagem algébrica seria um elemento do pensamento algébrico, desde que faça sentido para quem o utiliza. Ponte (2006) argumenta que lidar com símbolos faz parte das características do pensamento algébrico, mas atribuir sentido ao símbolo, ou seja, usá-lo de forma criativa para resolver problemas de diversos domínios também faz parte dessas características. Para Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) pensar algebricamente é lidar de forma analítica com situações dentro e fora da matemática em que há indeterminação, o que não necessita, a priori, de uma linguagem já constituída para acontecer.

Nesse sentido, Radford (2010) destaca que o pensamento algébrico é uma forma sofisticada de reflexão – *sui generis* – por se constituir por três elementos que se inter-relacionam: indeterminação, analiticidade e o modo de representação de seus objetos, o que pode ser expresso por qualquer signo (linguagens, gestos e artefatos). Assumindo uma concepção material de pensamento, Radford (2009) afirma que no contexto da aprendizagem, estudantes articulam gestos, falas, linguagens e artefatos para dar significado à resolução de uma tarefa.

Nesse panorama, dentre as várias propostas para o trabalho com o pensamento algébrico na educação básica, destacamos o processo de generalizar padrões em sequências. Radford (2010) e Vale e Pimentel (2011) implementaram propostas em que o trabalho com generalização de padrões (padrões visuais, sequências repetitivas e de crescimento) perpassa por todo o ensino básico, desde os primeiros anos de escolaridade. Generalizar um padrão é perceber que algo se repete, de modo previsível, e elaborar uma regra para expressão da relação observada (VALE; PIMENTEL, 2011). Radford (2008) afirma que a essência da generalização de um padrão é perceber algo geral no particular, expressando essa percepção de maneira simbólica.

No entanto, a simples utilização de símbolos não garante que o estudante esteja em campo algébrico, cabendo ao professor observar o que Radford (2010) chama de *etapas da generalização e camadas de generalidade*. As etapas da generalização se referem: em primeiro lugar à identificação de uma *comunalidade***,** ou seja, detectar em uma sequência uma comunhão, algo que se seja comum a todos os termos; em segundo lugar, *estender essa comunhão* a todos os termos, ou seja, observar que mesmo os termos que não estão explicitados fazem parte dessa comunhão; em terceiro lugar, *elaborar uma regra* ou expressão direta, que permita encontrar qualquer termo de uma sequência. Assim, é possível observar as etapas da generalização vivenciadas por um estudante, tendo como referência o modo como percebe as regularidades e as utiliza para prosseguir no processo e elaborar regras para termos que não são dados ou difíceis de obter por processos de contagem.

Radford (2013) afirma que esse processo não é simples e é a intenção do professor, que tem papel fundamental no processo, ajudar o estudante a agir. Esse processo pode ser mediado por diversos recursos semióticos, que podem ajudar os estudantes a expressarem suas observações, de acordo com seu grau de consciência acerca da tarefa proposta, o que caracteriza o processo de generalização em camadas de generalidade, que se relacionam ao recurso semiótico utilizado:

Factual - A generalização é expressa através de exemplos concretos, sem atingir o nível do discurso, mas há a elaboração de uma regra. Nesse tipo de generalização o uso de diferentes recursos semióticos, como gestos mais vigorosos e utilização de materiais permite a expressão da generalização.

Contextual - Nesse nível de generalização uma regra é elaborada, com palavras e uso de conectivos como "sempre", "em toda figura" que indicam a percepção de regularidade, em linguagem oral ou escrita, sem a necessidade de um exemplo numérico.

Simbólico - A generalização é feita através de uma fórmula direta, que expressa a regularidade observada, envolvendo letras, números e operações.

Nessa perspectiva em que pensar algebricamente e expor seu raciocínio através de outros recursos, um sujeito que não domina a linguagem algébrica pode se sentir encorajado a fazer generalizações através do uso de outros recursos, como a fala, gestos, exploração de materiais concretos ou elaborando em linguagem corrente uma regra, sem, a priori, ser obrigado a elaborar uma fórmula, sendo possível um contato diferente com a álgebra, além do exercício da comunicação e postura investigativa (VALE; PIMENTEL, 2011).

A teoria da objetificação e processos de objetificação

A teoria da objetificação é uma teoria educativa, fundamentada na Teoria Histórico-Cultural de Vigotsky e no Materialismo Dialético de Hegel, que concebe o ensino e a aprendizagem como um processo sociocultural no qual a Atividade humana, definida por Leont´ev (1978) como ações intencionais direcionadas a objetos, é mediada por artefatos e práticas culturais. Nessa teoria há uma redefinição de saber e de aprendizagem. Na teoria da objetificação

> [...] o saber se define como um sistema histórico e culturalmente constituído de processos corpóreos, sensíveis e materiais de ação e reflexão. Definido assim, o saber muda de acordo com a cultura e com o passar do tempo. É produzido na Atividade humana e é mais que uma tecnologia para fazer algo. (RADFORD, 2018, p. 3, tradução nossa)[4]

Nesse sentido o saber não é apropriado nem possuído por um sujeito. Ele é construído e difundido na cultura, sendo situado e contextual, se apresentando como potencial em movimento nas práticas sociais das quais os sujeitos participam. Com isso, a

[4] [...] *o saber se, tal como se define aqui, cambia de cultura em cultura y com el passo del tempo. Se produce em la actividad humana y es más que uma tecnologia para hacer algo.* (RADFORD, 2018, p.3)

aprendizagem deixa de ser uma ação subjetiva do indivíduo para ser o encontro com formas de pensar que estão presentes nessa cultura. Esse encontro com o saber é chamado de *objetificação*.

Esse encontro não ocorre de repente, mas por meio de um processo mediado pelas interações sociais e artefatos presentes na cultura (RADFORD, 2018). Por exemplo, ao nascer, chegamos a um mundo simbólico, cercado de pessoas, objetos, modos de pensar e se comportar que fazem parte da cultura. Radford (2018) afirma que esse mundo nos objeta, ou seja, oferece resistência. A tomada de consciência acerca dos sistemas simbólicos por parte do sujeito não acontece de repente, mas progressivamente, o que Radford denominou como *processos de objetificação*.

> Mais precisamente, os processos de objetificação são aqueles processos sociais, coletivos de tomada de consciência progressiva, de um sistema de pensamento e ação cultural e historicamente constituído - um sistema que gradualmente notamos e ao mesmo tempo dotamos de significado (RADFORD, 2018, p. 8).[5]

Nessa teoria a aprendizagem se define como o resultado do processo de objetificação, ou seja, o momento em que o sujeito atribui significado a algo presente em sua cultura. Entendida assim, a aprendizagem faz parte de um processo que é interminável e se revela parcialmente nas ações dos sujeitos. (RADFORD, 2018).

Assumindo essa perspectiva de aprendizagem, pensar algebricamente não é uma habilidade e sim parte um processo através do qual um sistema de pensamento matemático – no caso, generalizar um padrão algebricamente – vai se revelando ao estudante por meio de um processo corpóreo, sensível, afetivo, artefatual e semiótico (RADFORD, 2018). Os artefatos atuam não apenas como mediadores, mas partes materiais do pensamento. Radford (2009) afirma que o pensamento matemático não ocorrerá só na mente, mas na coordenação sofisticada de gestos, linguagens e quaisquer outros recursos utilizados para produzir significado.

A generalização é um processo complexo, dado que a percepção do padrão não é simples e há várias formas de se perceber as regularidades (RADFORD, 2010), o que nem sempre poderá levar a uma generalização algébrica, cabendo ao professor, sujeito histórico e culturalmente mais experiente, apresentar ao estudante alguns modos de ver, organizar e expressar os padrões. Radford (2010) afirma que podemos distinguir as camadas de generalidade através dos recursos semióticos utilizados na objetificação, ou

---

[5] *Más precisamente, los processos de objetivación son aquellos processos sociales, coletivos de toma de conciencia progressiva, de un sistema de pensamento y acición cultural e historicamente constituído – um sitema que gradualmente notamos y al mismo tempo dotamos de significado.* (RADFORD, 2018, p. 8)

seja, ao generalizar é importante compreender como o aluno percebe as regularidades e que recursos semióticos ele utiliza.

Nas próximas seções, analisaremos os processos de objetificação vivenciados por Evandro, apresentando o modo como o estudante transitou nas camadas de generalidade e utilizou os artefatos que lhe foram oferecidos, dando indícios de pensar algebricamente.

O contexto da pesquisa

Os episódios que serão analisados integram o material empírico produzido durante a pesquisa de mestrado profissional da primeira autora do artigo (REGIS, 2017) que teve como objetivo elaborar e aplicar atividades matemáticas com a finalidade de introduzir o pensamento algébrico em uma turma de 8º ano de uma Escola Pública da Rede Estadual de Minas Gerais, situada na cidade de Belo Horizonte. De março a setembro de 2016, a pesquisadora realizou seis intervenções didáticas na turma com a colaboração/participação do professor regente da classe. A pesquisa foi de caráter qualitativo e os dados foram coletados por meio de registros em áudio, vídeo, diário de campo e produções dos alunos.

Inspiradas em Vale e Pimentel (2011) e Radford (2010), as intervenções foram pautadas em tarefas que envolviam generalização de padrões visuais (e.g.; observação de obras de arte e mosaicos) e de sequências repetitivas e de crescimento, especialmente elaboradas visando o desenvolvimento do pensamento algébrico. A realização dessas tarefas foi mediada por linguagens, gestos, objetos materiais e discussões coletivas. Portanto, a análise dos dados se deu em torno das ações desencadeadas pelo uso dos diferentes artefatos e a interação social gerada na realização das tarefas, com o olhar focado na observação de elementos caracterizadores do pensamento algébrico.

A seguir, faremos um recorte nos dados e relataremos a participação de Evandro nas intervenções. Na participação de Evandro, ao longo das intervenções, em interações com os colegas, a pesquisadora e o professor Marcelo[6], foi possível observar, ainda que de forma sutil, as diferentes camadas de generalidade (RADFORD, 2010) presentes e que permeiam as suas ações e falas.

[6] Para preservar a identidade dos participantes estamos utilizando nomes fictícios.

A trajetória de Evandro

Evandro chegou ao 8º ano após participar do projeto Acelerar para Vencer[7] da Rede Estadual de Ensino de Minas Gerais, que tinha dentre outros objetivos, corrigir distorções idade/série, por meio de uma organização na carga horária em que duas séries eram feitas em um ano letivo. Participante do projeto, Evandro era um estudante que havia sido promovido do 6º para o 8º ano, embora apresentasse dificuldades com habilidades de leitura, escrita e cálculos matemáticos. Evandro tinha tais dificuldades, mas era alegre, respeitoso com os professores e frequente, ainda que não conseguisse participar ativamente da aula de matemática, na qual passava o tempo brincando com colegas e parecia alheio ao conteúdo proposto pelo professor. Durante as intervenções da pesquisadora, principalmente as iniciais, em que foram apresentados padrões visuais e sequências repetitivas em forma de desafios, Evandro se mostrou bastante aberto e entusiasmado, surpreendendo até mesmo seu professor pela agilidade e interesse em responder as tarefas. No entanto, nas tarefas com sequências repetitivas apresentou certa dificuldade em reconhecer os padrões e descrevê-los, mas sem perder o interesse em participar das aulas.

Nesse sentido, diante desse processo de mostrar aos estudantes modos de pensar historicamente constituídos, que são regras em linguagem oral, escrita e matemática, destacamos os episódios dessas interações de Evandro com novos modos de pensar.

Os dois episódios apresentados a seguir referem-se às intervenções realizadas em duas sessões de 50 minutos, em maio de 2016. Nas intervenções foram desenvolvidas três tarefas, relativas a uma oficina intitulada “Oficina de Bijuterias”, para a qual a pesquisadora disponibilizou pedras em resina, fios de nylon, tesoura e folhas de trabalho com textos explicativos das tarefas. Durante essas intervenções, os estudantes montaram colares que obedeciam a sequências numéricas repetitivas dos múltiplos de 2, 3 e 5 (ver tarefa, figura 1). Sendo assim, era a generalização esperada ao ser solicitada uma pedra que não estava no campo de visão do estudante, ou seja, um termo distante da sequência, sendo necessário assim estabelecer a relação entre um grupo de pedras que se repetiam a um número natural da sequência dos múltiplos. Foram três tarefas e ao montar o colar com um número determinado de pedras, o estudante deveria responder por escrito às questões propostas.

[7] Projeto Acelerar para vencer conforme a Resolução SEE 1033 de 17/01/2018

Figura 1: imagem parcial da folha de trabalho com a Tarefa 1

Oficina de bijuterias

Aluno(a):

Tarefa 1

Forme um colar com a sequência de contas: azul, branca, azul, branca. Faça isso sucessivamente, e após colocar 13 contas, responda:

a) Como poderíamos continuar o padrão?

b) Qual será a cor da 20ª conta? Como você sabe disso?

c) Qual será a cor da 37ª conta? Como você sabe disso?

d) Existe alguma relação entre a cor da conta e sua posição do colar?

Fonte: Dados da autora, 2016

Montando um colar com 37 pedras

Neste episódio, apresentamos a interação de Evandro com a pesquisadora e com o professor Marcelo, regente da classe, durante a realização da Tarefa 1 (Figura 1); as ações estão representadas pela sequência de imagens I (Figura 2) A pesquisadora observa o colar de Evandro com muitas pedras, para além das 13 solicitadas e pergunta o motivo de ter tantas pedras. O estudante afirma que é para responder as questões "b" – "Qual será a cor da 20ª conta? Como você sabe disso?" – e "c" – a respeito da 37ª pedra. A pesquisadora então tenta provocar o estudante a perceber a sequência de números pares e ímpares ali representada. Ressaltamos que o processo de perceber o geral no particular não é simples e a atuação do professor em mostrar para os estudantes modos de organização visual que facilitem a elaboração de uma regra é fundamental (RADFORD, 2013). Nessa linha, a pesquisadora intervém e pede que Evandro conte em voz alta, associando a cada pedra um número. O aluno o faz e afirma ter percebido que há números pares e ímpares:

Pesquisadora: Você percebeu alguma coisa?
Evandro: Ímpar, par, ímpar, par....
Pesquisadora: As verdes[8] são...?

---

[8] No momento da tarefa a pesquisadora observou que faltavam pedras azuis para alguns grupos, alterando a sequência para (verde, branca, verde, branca,...).

Evandro: Ímpares.

Figura 2: sequência de imagens I

Fonte: Dados da pesquisa, 2016

No entanto, ao responder a questão “c”, professor Marcelo observa que Evandro completa o colar até a 37ª pedra.

Professor Marcelo: Evandro, o que você está fazendo?
Evandro: Eu? Tô pondo mais uma…
Professor Marcelo: Por que você colocou mais pedras lá no começo? Para encontrar a 37ª ?
Evandro: Eu contei até 37.
Professor Marcelo: Ah...por isso você fez esse colarzão grandão! Mas aqui...para achar a pedra 37 você precisa completar as 37 pedras aqui ou dá para fazer por raciocínio?
Evandro: Dá ‘pra’ fazer por raciocínio…

Professor Marcelo começa a enunciar números ímpares da sequência – 1, 3, 5,... – e pergunta a cor, desafiando Evandro. O estudante inicia apontando e contando para determinar a cor da pedra pedida. Após algumas respostas, professor Marcelo continua enunciando números ímpares, e Evandro justifica as cores afirmando que as posições pedidas eram verdes por serem ímpares. No entanto, ao perguntar a cor da 100ª pedra Evandro não se sente à vontade, demora a responder até que afirma ser verde.

Um processo de generalização se inicia pela detecção de uma comunalidade (RADFORD, 2013). Na sequência apresentada a detecção dessa comunalidade ou como Vale e Pimentel (2011) a identificação do “motivo de repetição” é que permite a observação desse grupo e suas características, para então estender essa regra que o constitui para termos próximos, como a 20ª pedra do colar ou para termos de difícil acesso via contagens, como o 100º termo. A partir daí já se caracteriza a segunda etapa da generalização que é a extensão dessa comunalidade, para então ocorrer a elaboração de uma regra. Evandro mostrou muita dificuldade em perceber esse motivo, recorrendo às pedras para determinar a cor das posições solicitadas. Evandro operou em campo aritmético, pois, ainda que tenha discutido com Marcelo e a pesquisadora, foi difícil para ele, nesse momento, utilizar a relação paridade cor para determinar a 37ª posição. Diante dessa observação que era comum a muitos alunos, a pesquisadora deu ênfase a percepção dos grupos de repetição por parte dos estudantes nas tarefas seguintes.

Repensando as sequências montadas em um colar

Dada a dificuldade dos estudantes em estabelecer a relação entre o grupo que se repetia e as sequências de múltiplos, a pesquisadora conduziu discussões coletivas em sala e, em uma delas, a pesquisadora apresentou a sequência de cores em um cartaz – azul, verde, marrom, marrom, verde - relativa à tarefa 3, e o afixou no quadro branco (Figura 4).

Figura 3: Tarefa 3[9]

Tarefa 3

Forme agora um colar com a sequência: 1 conta azul, 1 verde, 2 marrons, 1 verde, 1 azul, 1 verde, 2 marrons, 1 verde, 1 azul.

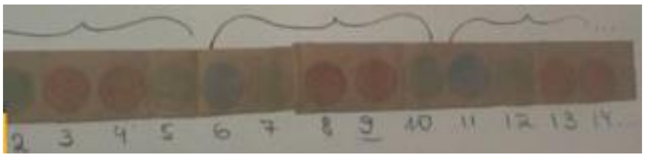
a) Explique como você continuaria esse padrão.
b) Qual a cor da 33ª pedra? Explique.
c) Que relações chamaram sua atenção nesse colar?

Fonte: Adaptado de GRUCOMAT, 2016.

Destacamos a interação entre alunos e pesquisadora, na qual Evandro, já familiarizado com a identificação de grupos de repetição, se engaja na produção de uma resposta para debater com os colegas acerca da cor da 33ª pedra do colar, que representava a sequência dos múltiplos de 5 – azul, verde, marrom, marrom, verde –.

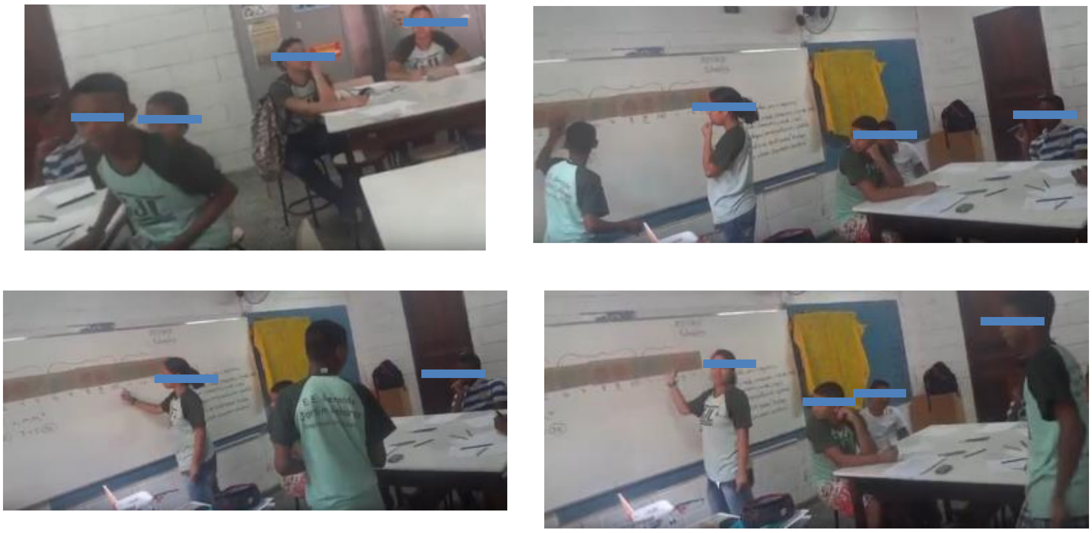
[9] GRUCOMAT – Grupo Colaborativo em Matemática

Figura 4: representação do colar de forma pictórica com contas na sequência proposta



Fonte: Dados da pesquisa, 2016

Figura 5: Sequência de imagens II



Fonte: Dados da pesquisa, 2016

Na Sequência de imagens II (Figura 5), observam-se cenas em que a pesquisadora conversa com Dayane, que acompanha atentamente o desenho no cartaz e a explicação da pesquisadora. Na mesa em frente, Karla e Welington acompanham a discussão e Evandro, sozinho, em outra mesa acompanhava atento.

> *Flávia: Eu quero saber qual a cor de posição 33 sem as pedras*
> *Dayane: Assim? Na mão?*
> *Flávia: Eu quero saber a cor sem contar!*
> *Dayane: Só no pensamento!*
> *Evandro: Conta de cinco em cinco!*
> *Dayane: Eu acho que vai dar verde!*
> *Flávia: Você acha que vai dar verde?*
> *Dayane: Eu acho!*
> *Flávia: Por quê?*
> *Dayane: Deixa eu pensar…*
> *Flávia: O Evandro disse que é marrom.*

A pesquisadora percebeu que os estudantes estavam em um processo recursivo, rumo a uma generalização aritmética. Havia 14 pedras desenhadas no cartaz e Karla, por exemplo, dobrava a sequência incompleta, somando 5 para chegar a 33. Nesse raciocínio, as cores não obedeceriam ao padrão. Flávia continuou a questionar os estudantes para que confrontassem suas opiniões. Evandro, percebendo o grupo de repetição, insistiu em se posicionar. Já Dayane justificava, mas sua estratégia até então era desconhecida. Até que, na discussão, Evandro mostra através de gestos e linguagem oral sua estratégia para os colegas.

Evandro: Eu contei de 5 em 5
Dayane: Eu contei até 30! Aí vai dar 30. Aí eu parei de 5 em 5 e contei até 33!
Karla: Vai dar verde! 14 mais 14 é 28, mais 5...33! É verde!
Evandro: Vai dar marrom!
Flávia: Mas quando vocês falam 14 mais 14 é 28, a 15ª vocês estão falando 'pra' mim que ela é azul!
Welington e Karla: Deu verde!

Evandro se levanta (imagem superior à direita), vai ao quadro e usa os cinco primeiros círculos desenhados para contar até 33.

Evandro: Olha, 1,2,3,4,5...31, 32, 33.

Dayane se levanta e vai ao encontro de Evandro. Aponta os dez primeiros círculos desenhados para contar e, em seguida, afirma que desprezou os quatro últimos para fazer suas contagens. (imagens inferiores da sequência II)

Dayane: Eu contei assim oh, professora...No pensamento mesmo!
Eu esqueci isso daqui, oh!

Após Evandro expor seu modo de pensar, Dayane também utiliza o cartaz para mostrar o modo como contou, diferente de Karla, pois em sua contagem o grupo de repetição se mantinha, sem alterar o padrão, mesmo contando de quatorze em quatorze. Após esse momento, a pesquisadora intervém e corrobora o pensamento de Evandro, mostrando aos estudantes o padrão que se repetia, uma sequência dos múltiplos de 5, bastando assim contar de 5 em 5 ou dividir 33 por 5, de modo que teriam 6 grupos de 5 pedras e um grupo incompleto com 3, com a cor da 3ª pedra sendo marrom.

De acordo com Mason (1996), ao montar um esquema aritmético já estamos em campo algébrico, por fazer a combinação de números conhecidos, desconhecidos e operações. Nesse episódio o esquema aritmético que explicaria, através das relações estabelecidas, a cor da pedra que ocupava a 33ª posição é um modo cultural e historicamente constituído de pensar, que os alunos deveriam notar e dotar de significado (RADFORD, 2018). Observamos assim um processo de objetificação – o momento de encontro dos estudantes com o objeto culturalmente relevante, o esquema aritmético (RADFORD, 2018). Nesse episódio, Evandro assume a posição de destaque, recorrendo aos gestos e fala ao se posicionar e, através dessa postura, mostrar sua desenvoltura na percepção da regularidade e elaboração de um esquema aritmético que relacionasse o grupo e a posição pedida, etapa fundamental da generalização, perceber o que se repete de forma previsível.

Elaborando uma fórmula

Esse episódio se refere à intervenção realizada no dia 2 de setembro de 2016, na qual a pesquisadora apresentou a tarefa "Comboio de polígonos" (ver Figura 6), que trouxe uma sequência de crescimento em que triângulos formados por palitos de fósforos eram encaixados em grupos, chamados no exercício de "comboios". O padrão, para a contagem do número de palitos de fósforos utilizados, a ser observado era que, a partir do comboio 2, com dois triângulos, era necessário inserir apenas dois palitos para formar o segundo triângulo. Ou seja, o comboio de 1 triângulo é formado por 3 palitos de fósforos, o comboio de 2 triângulos é formado por 5 palitos, o de 3 triângulos por 7 e, assim por diante, possibilitando a elaboração da fórmula $2n + 1$ para o cálculo do número de palitos de fósforo, em que n é o número de triângulos (de um mesmo comboio). Observe que o "1" é invariante e representa o palito que inicia cada comboio.

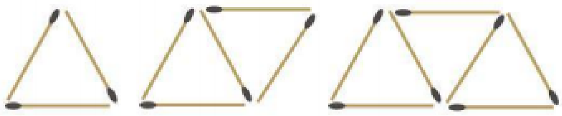
Para desenvolvimento da tarefa a pesquisadora disponibilizou palitos de fósforo e as folhas com a tarefa. Como os estudantes já haviam trabalhado com uma sequência de crescimento envolvendo quadrados, essa tarefa foi-lhes apresentada em forma de uma "história" em que era dada uma fórmula para o cálculo do número de palitos de fósforo utilizado e os estudantes foram convidados a observar e completar a sequência para em seguida avaliar a correção (ou não) da fórmula proposta.

Destacamos uma interação entre Evandro e a pesquisadora, na qual o estudante não só articula diferentes recursos para expressar seu pensamento, caminhando mais uma etapa no processo de generalização, sendo possível observar generalizações em campo algébrico.

Figura 6: Comboios de triângulos

Tarefa “Comboios de triângulos”

Veja como os comboios de triângulos eram formados:



Comboio 1 Comboio 2 Comboio 3

Ana perguntou a uma das duplas que montou esses comboios de triângulos se existia uma regra que permite descobrir a quantidade de palitos necessária para formar comboios com um número qualquer de triângulos e que expressassem essa regra em linguagem simbólica matemática.

A dupla apresentou a expressão $3n$, considerando **n** o número de triângulos que compõem o comboio. Por exemplo,

- o comboio 1 com 1 triângulo, de acordo com a fórmula da dupla, teria $3 \times 1 = 3$ palitos.
- o comboio 2 com 2 triângulos, de acordo com a fórmula da dupla, teria $3 \times 2 = 6$ palitos.

Eles argumentaram que bastava multiplicar por 3 a quantidade de triângulos de qualquer comboio, pois os triângulos são formados por 3 palitos cada.

Verifique isso formando comboios com 4, 5, e 6 triângulos e utilizando a expressão que os alunos elaboraram. O que você pode concluir?

Fonte: Adaptado de VALE; PIMENTEL, 2011, p. 80.

Fonte: Dados da pesquisa, 2016

Pesquisadora: Vocês pensaram numa explicação porque a fórmula dos meninos tá errada?
Evandro: Por que que o deles tá errado? Porque eles não pensam igual a gente!
Pesquisadora: Eles não pensam igual a vocês! Vocês pensaram melhor que eles! Porque nos quadrados[10], hora nenhuma vocês falaram que era 4 vezes o número do comboio. Vocês falaram isso? Esses meninos estão achando que precisa de três palitos para todos os triângulos!

[10] Neste episódio há referência à tarefa anterior da intervenção, “Comboio de quadrados”.

Figura 7: Sequência de imagens III – explicação da regra que poderia gerar uma fórmula

Fonte: Dados da pesquisa, 2016

A pesquisadora inicia a discussão com o grupo e Evandro assume a condução de justificar o que ele e os colegas pensavam (Figura 7). Na intenção de que não apenas avaliassem a fórmula proposta como certa ou errada, a pesquisadora interveio pedindo que comparassem com os raciocínios empreendidos nas sequências anteriores, particularmente na de quadrados. Acompanhando a explicação da pesquisadora atentamente, Evandro a olha fixamente e inicia a exposição do seu pensamento e, ao mesmo tempo, aponta para a sequência montada na mesa.

Evandro: É que eu acho que...tipo...multiplica?

A pesquisadora então estimula que Evandro continue olhando firme em seus olhos, e questiona se bastava multiplicar, a fim de que o aluno separasse o invariante “1” – o palito que iniciava cada comboio –.

Flávia: E aí? É 3 palitos que precisa ‘pra’ cada um?
Evandro: Não! Mas...já tem 1 aqui.

Nesse momento, Evandro já tinha elaborado o esquema que lhe daria o total de palitos em cada comboio, diante da percepção dos grupos de palitos que se repetiam (variante) e o palito fixo (invariante). A pesquisadora então atua novamente no sentido de lhe mostrar novamente a possibilidade de montar uma expressão que representasse a relação observada e Evandro então monta a expressão

> *Flávia: Já tem 1! Então vamos consertar a fórmula desses meninos! Eles estão falando assim: "'Pra' achar o comboio 2, é 3 × 2! 'Pra' achar o comboio 10, eu preciso de 10 triângulos, eu multiplico 3 × 10 triângulos!" E aí? Cada triângulo vai ter 3 palitos? Mas não é! A gente sabe que para formar cada triângulo precisamos 2 palitos, né?*

Evandro olha para pesquisadora acompanhando sua explicação. Ao mesmo tempo, recorre aos triângulos montados na mesa e faz contas nos dedos, apresentando uma expressão.

> *Evandro: 2 +...É...2 + 1!*
> *Flávia: 2 + 1? Quê que tem esse 1 a ver?*
> *Evandro: 2 que vai ser!*
> *Flávia: 2 que vai ser...e o que mais eu preciso para multiplicar?*
> *Evandro: O que nós precisamos!*[11]
> *Flávia: Então, a fórmula tá por aí... Escreve isso 'pra' mim!*

A expressão proposta por Evandro é um exemplo de generalização algébrica contextual, pois ele selecionou aspectos comuns e não comuns, escolheu uma operação que unia esses aspectos e outra operação, a multiplicação, que relacionava a posição, o número de triângulos do comboio e a quantidade de palitos para formar cada triângulo novo. É contextual, pois Evandro pensou em uma regra geral a partir dos exemplos concretos que estavam diante dele. Ainda que não tenha conseguido expressar de modo mais sofisticado o lugar da variável, mostrou ter consciência desse fato, multiplicando por 2, ao usar a expressão "O que nós precisamos" ao se referir ao número do comboio, que variava. Além disso, Evandro recorreu a menos gestos e materiais ao final da interação, usando apenas a linguagem oral para se expressar.

---

[11] Durante as intervenções, ao formar os grupos de repetição nas sequências, a pesquisadora referia como sendo o que era preciso em cada termo. Assim, nos comboios de triângulos, ao determinar o número de palitos do comboio 10, por exemplo, dizia que havia 1 palito fixo e que precisávamos de 10 grupos de 2 palitos.

Uma reflexão acerca dos processos de objetificação vivenciados por Evandro

Propomo-nos a fazer uma reflexão acerca da aprendizagem de álgebra. Primeiramente Buscamos, ao apresentar os dados dessa investigação, romper com o paradigma de aprendizagem de álgebra baseado no que Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) chamam de **transformismo algébrico.** Ao assumir o pensamento algébrico como foco do ensino álgebra, apresentamos aos estudantes possibilidades de reflexões acerca de padrões, durante as quais outros recursos, além da linguagem simbólica pudessem ser utilizados.

Assim, partindo da concepção material de pensamento (RADFORD, 2009), podemos dizer que Evandro iniciou suas experiências com padrões, com muitas dificuldades de perceber as regularidades e expressá-las, trabalhando em campo aritmético, apegado aos objetos materiais fornecidos (os colares) para efetuar contagens, o que fez com que pesquisadora e professor regente se envolvessem em lhe apresentar modos de organizar os padrões, e de se expressar, como gestos e fala. Nesse processo de ser colocado, de diversas formas, em frente a um modo de generalizar, Evandro, através de gestos e linguagem oral, se moveu nas três etapas do processo de generalização, selecionando os aspectos que variavam e os constantes como no comboio polígonos e elaborando uma regra, envolvendo números e operações, dando indícios de estar em campo algébrico (MASON, 1996). Quanto às camadas de generalidade, Evandro aparentou transitar entre as generalizações algébricas factuais e contextuais, sendo que os gestos estiveram presentes em todas as suas expressões, dando lugar à fala, ao lidar com os comboios. Nas palavras de Radford (2018) a aprendizagem ocorre como resultados dos processos de objetificação, no caso de Evandro, nos momentos em que determinou a cor da pedra desconhecida na sequência de círculos coloridos e ao elaborar a fórmula para o comboio de triângulos, momentos em que um sistema de pensamento matemático foi utilizado por ele como meio de expressão.

Referências

BEDNARZ, Nadine; KIERAN, Carolyn; LEE, Lesley. **Approaches to Algebra:** Perspectives for Research and Teaching. Mathematics Education Library. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela; MIGUEL, Antônio. Contribuições para um repensar a Educação Algébrica Elementar**. Pro-Posições**, v. 4, p. 78-91, n. 1, março, 1993.

GRUCOMAT (Grupo Colaborativo em Matemática). Sequência 10: sequências e generalizações. Disponível em: <http://grucomat.blogspot.com.br/>. Acesso em: 12 jan 2016.

LEONT'EV, Alexey Nikolaevich. **O desenvolvimento do psiquismo**. Lisboa: Livros Horizonte, 1978. 350 p.

LINS, Rômulo; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

MASON, John. (1996). **Expressing Generality and Roots of Algebra**. 1996. DOI: 10.1007/978-94-009-1732-3_5.

PONTE, João Pedro. Números e álgebra no currículo escolar. In: VALE, Isabel Vale. *et al.* (Ed.). **Números e álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores**. Lisboa: SEM-SPCE, 2006. p. 5-27.

RADFORD, Luis. Iconicity and Contraction: a Semiotic Investigation of Forms of Algebraic Generalizations of Patterns in Different Contexts. **Zdm**, v. 40, n. 1, jan. 2008.

RADFORD, L. Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. **Educational Studies in Mathematics**, 70(3), 2009, p.111 – 126.

RADFORD, Luis. En torno a tres problemas de la generalización. In: RICO, Luis *et al.* (Ed.). **Investigación en didáctica de la matemática**. Homenaje a Encarnación Castro Granada. Granada: Editorial Comares, 2013, p. 3-12.

RADFORD, Luis. Layers of Generality and Types of Generalization in Pattern Activities. **PNA**, v. 4, n. 2, 2010, p. 37-62.

RADFORD, Luis. Saber, aprendizaje y subjetivación en la Teoría de la Objetivación. *In*: 5º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – 5º SIPEMAT, 2018, p. 1-22. **Anais**. Belém, Brazil, 2018

REGIS, Flávia C. N. **Introdução ao pensamento algébrico:** a generalização de padrões. (Dissertação de Mestrado), Faculdade de Educação. Universidade Federal de Minas Gerais, 2017.

USISKIM, Z. (1995). Concepções sobre Álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Alberto P. (Org.). **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual.

VALE, Isabel; PIMENTEL, Teresa. **Padrões em matemática**. Uma proposta didática no âmbito do novo programa para o ensino básico. Lisboa: Texto Editores, 2011.

Texto recebido: 12/08/2019
Texto aprovado: 14/12/2019