EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019vol21i3p272-295

A prática do professor no ensino de álgebra e os Registros de Representação Semiótica

Teacher practice in teaching algebra and the Semiotic Representation Records

---

LUANI GRIGGIO LANGWINSKI [1]
TÂNIA STELLA BASSOI (*in memoriam*) [2]

Resumo

O texto apresenta o recorte de uma pesquisa de mestrado desenvolvida com cinco professores do 8° ano envolvidos no ensino de álgebra. O referencial teórico e metodológico apoia-se na Teoria dos Registros de Representação Semiótica. A pesquisa buscou responder "que atividades os professores propõem para o ensino da Álgebra?", De cunho qualitativo, teve como objetivo compreender o(s) modo(s) como o professor mobiliza os conteúdos algébricos em aulas de matemática. Sinalizamos que, apesar do destaque dado ao tratamento algébrico, dos registros de representação utilizados, produzidos e elaborados pelos professores cabe destacar que: existe um esforço por parte dos professores em minimizar as dificuldades dos alunos, para isso fazem analogias, em que se sobressaem a representação numérica.

Palavras-chave: *Ensino de álgebra, Registro de Representação Semiótica, Professor de Matemática.*

Abstract

The text presents the clipping of a master's research developed with five 8th grade teachers involved in the teaching of algebra. The theoretical and methodological framework is based on the Theory of Semiotic Representation Records. The survey sought to answer "what activities do teachers propose for the teaching of algebra?". Of qualitative nature, it aimed to understand the way the teacher mobilizes the algebraic contents in math classes. We point out that, despite the emphasis given to the algebraic treatment, the representation records used, produced and elaborated by the teachers, it is worth mentioning that: there is an effort on the part of the teachers to minimize the students' difficulties, they make analogy, in which the numeric representation stands out.

Keywords: *Algebra teaching, Register of Semiotic Representation, Mathematics teacher.*

---

[1]Mestre em Ensino – PPGEn – Unioeste. Professora do curso de Licenciatura em Matemática – UNIGUAÇU/FAESI; Professora de Matemática – Ensino Fundamental II – Colégio Bertoni. e-mail: luanig.lang@gmail.com
[2] Doutora em Educação pela Universidade Federal do Paraná/UFPR. Professora da UNIOESTE. e-mail: tstellabassoi@gmail.com

Introdução

A Álgebra se apresenta como uma linguagem matemática (CONDILAC, 1979) estruturada por rígidas regras e formalizações. O estudo da Álgebra compõe um espaço bastante significativo de abstração e generalização, além de possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas (DUVAL, 2011). Contudo, existem dificuldades relativas ao fazer pedagógico com a linguagem algébrica e em cálculos algébricos realizados que impossibilitam a compreensão dos conceitos associados (KIERAN, 1995).

A linguagem matemática não é simples como a língua materna ou língua natural[3]. Ela é construída e necessita da língua natural para essa construção. A língua natural permite produzir uma variedade de tipos de discursos (DUVAL, 2011). É pelo discurso que expressamos o que estamos pensando, mas é preciso primeiramente tomar consciência e objetivar esse pensamento para então torná-lo explícito aos outros, quer dizer, não se trata de codificar um pensamento já explícito.

Similarmente, compreender não é decodificar uma frase ou o enunciado de um problema, “mas discriminar as unidades de sentido em função de diferentes níveis de organização dos discursos e eventualmente reformulá-los.” (DUVAL, 2011, p. 75). Segundo este autor, todo discurso produzido oralmente ou escrito, se decompõe em unidades de sentido que são determinadas pelas operações discursivas, a saber: a enunciação, a designação e a expansão discursiva, intimamente ligadas ao conhecimento, à compreensão e à conscientização.

Matematicamente falando, lidamos com objetos que não estão presentes, que não são visíveis e que não são possíveis de serem tocados ou experimentados como, por exemplo, o número sete, ou ainda, apreciar o “crescimento” de uma função afim como se aprecia o desabrochar de uma flor. O acesso a esses objetos só pode ser feito pelas suas representações e quando falamos em ensino de álgebra, o professor de matemática é o responsável por apresentar estes objetos matemáticos para os alunos, e como afirma Tardif (2014, p. 236-237) trata-se de “um trabalho que não é simples nem previsível, mas complexo e enormemente influenciado pelas próprias decisões e ações”, levando-nos a refletir que finalidade tem as representações neste ensino e na aprendizagem.

[3] Para Duval (2011) a língua natural são discursos que podem ser produzidos oralmente ou em forma de escrita.

No presente artigo temos como finalidade apresentar os resultados da pesquisa de mestrado defendida em 2018. Desenvolvida com cinco professores do 8° ano envolvidos no ensino de álgebra, buscou responder “que atividades os professores propõem para o ensino da Álgebra? ” e teve como objetivo compreender o(s) modo(s) como o professor mobiliza os conteúdos algébricos em aulas de matemática. As análises foram subsidiadas, levando em conta os métodos de análise de problemas de aprendizagem propostos por Duval et al. (2014). Utilizou-se, por essa razão, como aporte teórico os Registros de Representação Semiótica e as operações metadiscursivas de formação, tratamento e conversão realizados e suas respectivas atividades cognitivas. O olhar voltou-se para interpretar a efetivação dessas operações pelos professores nas aulas de matemática e como isso se efetiva no ensino de Álgebra.

Para tanto, organizamos o texto apresentando um resumo da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2003, 2009, 2011, 2016), bem como o ensino de Álgebra relacionado a ela (DUVAL et al., 2014), seguido dos procedimentos metodológicos. Na sequência apresentamos a análise dos dados e a discussão dos resultados. E por fim as considerações finais.

Os Registros de Representação Semiótica: em suma

A teoria dos Registros de Representação Semiótica segundo Duval (2004, 2009), focaliza sua pesquisa na aprendizagem da Matemática, buscando sua compreensão segundo os aspectos cognitivos. Em um trabalho mais recente, Duval (2016, p. 5) afirma que

> [...] as formas de pensar e trabalhar em matemática são radicalmente diferentes daquelas praticadas em outros domínios do conhecimento, uma vez que, tanto nas pesquisas sobre a aprendizagem de matemática quanto no conjunto das dificuldades intransponíveis de compreensão nas quais a maioria dos alunos se bate sistematicamente, o ponto de vista cognitivo sobre a matemática é tão fundamental quanto o ponto de vista matemático.

A ideia fundamental dessa teoria é de que a compreensão em Matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica. Segundo Duval (2009) um objeto matemático só se deixa reconhecer pela sua representação, afirmando só ser possível que os sujeitos em fase de aprendizagem compreendam a Matemática se conseguem perceber a diferença de um objeto de sua representação. Por exemplo, os números são objetos matemáticos que podem ser representados na forma decimal, fracionária, ..., as funções são objetos matemáticos que podem ser apresentados na forma escrita, na forma algébrica ou por meio de um gráfico. Um mesmo objeto matemático pode se apresentar com representações muito diferentes. Nós formamos as ideias do objeto por meio de suas representações (DUVAL, 2011).

Para Duval (2009) sem as representações semióticas torna-se impossível a construção do conhecimento pelo sujeito que apreende os conceitos matemáticos. Conforme este autor, os sistemas semióticos devem proporcionar três atividades cognitivas ligadas à representação:

A atividade de *formação* é o recurso a um ou mais signos para atualizar a atenção voltada para um objeto ou para substituir essa atenção. A formação implica em selecionar um conjunto de caracteres de um conteúdo percebido, imaginado ou já representado em função, que são possibilidades próprias de representar o objeto no registro escolhido.

As atividades de *tratamento* são operações que envolvem uma transformação no interior de um mesmo registro. Exemplo: 1/2; 0,25; 25×10^{-2}.

As atividades de *conversão* são transformações que se fazem passar de um registro para o outro. Exemplo: o registro em língua natural "um meio, um sobre dois ou a metade" para o registro em escrita numérica 1/2.

De acordo com Duval (2011) a língua natural é um registro de representação semiótica, pois cumpre ao mesmo tempo, função de comunicação e de todas as funções cognitivas, uma vez que, preenche um desses dois atos: de dizer ou escrever qualquer coisa e compreender o que o outro quer dizer ou está escrito.

A língua natural permite produzir uma variedade de tipos de discursos, que podem ser produzidos oralmente ou em forma de escrita. Esses discursos se decompõem em unidades de sentido e podem ser também decompostas em outras unidades de sentido, contudo, em um nível de organização inferior (DUVAL, 2011).

A mudança de registro de uma representação dada após um tratamento é o primeiro passo do pensamento matemático. Porém, a atividade de conversão é menos imediata e menos simples do que parece ser. Na atividade de conversão entra em cena a congruência semântica. Segundo Duval (2009) para existir congruência semântica é necessário atender três critérios: correspondência semântica entre suas unidades significantes, univocidade semântica terminal e mesma ordem dentro da organização das unidades nas duas representações. Caso não exista um desses critérios de congruência, a não congruência está confirmada e a dificuldade de conversão aumenta.

Duval et al. (2014) partem do fato de que o ensino de Álgebra se tornou um duplo equívoco no que se refere aos objetivos que lhes são atribuídos no quadro de uma formação geral comum dos estudantes no Ensino Fundamental e Médio. De um lado, o que chamamos com frequência "álgebra" historicamente é identificado com a utilização das letras para calcular, porém, do ponto de vista matemático, esse tipo de representação dos números e das grandezas não é suficiente para fazer Álgebra.

Partindo do ponto de vista matemático, não se pode confundir as fórmulas com as equações, enquanto de um ponto de vista não matemático, não é possível fazer essa discriminação, levando em consideração que a fórmula e a equação encontram-se no mesmo registro de escrita literal (DUVAL et al., 2014).

A questão da compreensão em Matemática, do ponto de vista cognitivo, não se refere em termos de justificativas ou explicações, mas de reconhecimento, já que trabalhamos apenas com as representações semióticas ou sobre as representações semióticas. Principalmente em Álgebra o que é preciso reconhecer, ou seja, não confundir, "*são as operações de substituição semiótica variadas e heterogêneas*: uma letra por um número desconhecido, [...] vários números por uma letra, os símbolos designando as grandezas positivas e negativas [...] etc." (DUVAL et al., 2014, p. 51 grifos dos autores).

De acordo com Duval et al. (2014, p. 54 grifo dos autores) "A Álgebra permite *a generalização da operação semiótica de substituição*, não de um sinal em um objeto, mas a de um sinal em outro sinal e mais globalmente de uma expressão em outra expressão.", permitindo uma extensão sem limites da operação semiótica de substituição. Segundo estes autores, a Álgebra requer quatro tipos de substituição semiótica:

1. *Substituir, respectivamente, uma letra e um sintagma operatório compreendendo essa letra* por *duas listas abertas de números*, quando essas duas listas estão ligadas por uma relação funcional. Esse tipo de substituição nos remete a ideia de montar uma tabela, a fim de reconhecer se existe ou não regularidade na progressão da segunda lista em relação à da primeira.
2. *Substituir uma letra e/ou sintagma operatório compreendendo essa letra na designação lexical ou numérica-lexical dos dados* de um problema. Primeiro tem que haver uma redesignação literal do que já foi designado articulando duas grandezas heterogêneas para designar um valor numérico: o preço do quilo do feijão. Na sequência, associa UM número com a letra escolhida e não com uma lista aberta de números ou de valores. Exemplo: $P = 5{,}25\ X\ 1\ J$.

   Do ponto de vista matemático, isso significa que as letras não têm o mesmo *status* nos dois tipos de operação de substituição. O preço do quilo do feijão sempre será R$ 5,25, o que vai variar é a quantidade em quilos.

3. *Substituir um valor numérico ou um número por uma letra no contexto de uma fórmula* ou de uma equação. Neste caso, trata-se de uma simples atividade de decodificação: cada letra da fórmula é substituída por um valor lido. Por exemplo, as fórmulas em física.
4. **Substituir uma expressão literal por outra expressão literal** *que é mais desenvolvida ou mais reduzida*. Essa operação se refere às unidades relativas a uma operação de designação de elementos. No caso das equações de 1º grau, para a organização discursiva é necessário:

   - separar os termos literais e os termos puramente numéricos, e para isso mudar um termo de membro,

   - colocar em evidência.

Essas substituições que fazem parte do nível da organização interna da equação apresentam uma característica semiótica fundamental: as transformações de escrita não dizem respeito as letras, mas as ocorrências das letras.

Duval et al. (2014, p. 69) afirmam que "partir de uma igualdade numérica para elaborar problemas aditivos com uma operação é o caminho mais direto e mais natural para entrar na álgebra.". Todavia essa elaboração comporta várias etapas:

- Transformar uma igualdade numérica em três equações numéricas, sem a necessidade de introduzir a letra, apenas um espaço em branco: (-2) E (+3) = ___; (-2) E __ = (+1); __ E (+3) = (+1);
- Mostrar para os alunos a correspondência entre os pares de verbos antônimos (subir/descer, ganhar/perder) e os números relativos, a fim de que possam relacionar os números propostos com os verbos antônimos ou com as locuções de comparação (maior que..., menor que...).
- Resolver cada uma das operações com espaços em branco, mudando o lugar vazio para isolá-lo;
- Comparar os três procedimentos de resolução para tomar consciência da equivalência das três equações;
- Discutir o sentido e o sinal das operações, tomando consciência de que um espaço vazio corresponde na verdade a dois: um para o sentido da operação e o outro para o sinal do relativo. Ex.: (-2) + (+3) = (+1) em (-2) ... (...) = (+1).

Os autores nos alertam que é preciso lembrar que os estudantes não são matemáticos, "eles têm apenas algumas horas de matemática por semana e, principalmente [...] o funcionamento cognitivo cultivado não tem nada a ver com o requerido para compreender matemática". (DUVAL et al., 2014, p. 89).

Procedimentos metodológicos

Por tratar-se de uma abordagem qualitativa (LUDKE; ANDRÉ, 1986; CARVALHO, 2006; GIBBS, 2009), nessa pesquisa adotamos a observação em ambiente natural sem intervenções da pesquisadora nas aulas dos sujeitos de pesquisa. O projeto de pesquisa e o roteiro para as entrevistas foram aprovados pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Unioeste, em 31 de janeiro de 2017, com número de Certificado de Apresentação para Apreciação Ética (CAAE) 64457417.5.0000.0107.

Para a coleta de dados, foi realizada uma entrevista semiestruturada, com registros em gravações individuais "a partir de um esquema básico, porém não aplicado rigidamente, permitindo que o entrevistador faça as necessárias adaptações." (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 34). Foram observadas quatro aulas de cada um dos cinco professores, todas gravadas em vídeo e transcritas. Durante as observações das aulas, quando necessário, a pesquisadora também fez anotações por escrito, o que Tremblay (2008) chama de diário de campo.

A pesquisa foi realizada no município de Santa Terezinha de Itaipu, com 22.783 habitantes[4] e está localizada na região sudoeste do estado do Paraná. A opção por centrar o estudo nesse município está vinculada ao fato de a pesquisadora residir nesse local e a acessibilidade às escolas e professores, pois já lecionou em todas elas e os professores foram todos colegas de trabalho.

O município conta com quatro colégios estaduais, dois localizados na região central e os outros dois, um em cada bairro de maior população no município. A pesquisa foi realizada nos quatro colégios, os quais foram nomeados como C1, C2, C3 e C4. Os colégios[5] C1 (43 turmas e 926 alunos matriculados) e C2 (53 turmas e 1093 alunos matriculados) estão localizados na região central, sendo que C2 está localizado no centro da cidade. O colégio C3 (21 turmas e 467 alunos matriculados) está localizado no bairro mais pobre do município e o colégio C4 (16 turmas e 414 alunos matriculados) apesar de estar localizado no bairro mais populoso, é um colégio de porte pequeno.

[4] Cf <www.ipardes.gov.br/perfil_municipal/MontaPerfil.php?codlocal=173&btOk=ok> acesso em 08 ago 2017.
[5] Cf < www.consultaescolas.pr.gov.br > acesso em 03 nov 2017.

Para a escolha dos sujeitos da pesquisa considerou-se: estarem lecionando nos 8º anos; tempo de trabalho lecionado com esse ano (série) superior a dez anos para atender aos objetivos da pesquisa; lotados nos colégios estaduais do município de Santa Terezinha de Itaipu. A escolha pelo 8º ano é devido ao ensino de Álgebra ser iniciado formalmente neste ano escolar. Os professores entrevistados foram tratados como P1 e P2 que lecionam no colégio C1; P3 que leciona no C2; P4 que leciona no C3 e P5 que leciona no C4.

Para a transcrição das entrevistas, usou-se "( )" nas intervenções das falas, "(...)" para pausas e momentos de silêncio, letra em caixa alta para representar a mudança de entonação de voz, [ ] com escrita em itálico para caracterizar os momentos que não apareciam na gravação, interrupções nas falas e comentários da pesquisadora, / para o truncamento nas falas e :: para continuação de vogais ou consoantes, por exemplo, "éh::". Ressaltamos que durante as transcrições tanto das entrevistas quanto das filmagens, não fizemos correções nas falas dos sujeitos, pelo fato das transcrições serem feitas fielmente às falas a que correspondem (CARVALHO, 2006).

As entrevistas foram feitas no período de 23 de fevereiro a 10 de março de 2017. Elas aconteceram individualmente, agendadas antecipadamente para o horário da hora-atividade do professor, com exceção de P3, que preferiu ser entrevistada em sua casa. Ao final de cada entrevista, a pesquisadora combinou com o professor que a primeira observação das aulas, seria comunicada por ele quando iniciasse o conteúdo de Álgebra. As primeiras observações aconteceram praticamente na mesma semana. Contudo, algumas aulas tiveram seus horários em conflito, pois eram de colégios diferentes e desse modo fez-se necessário remarcar a observação para a semana seguinte.

Foram observadas quatro aulas de cada professor, com exceção de P3 que foram observadas seis aulas[6], totalizando 22h/aulas de observação. Como o objetivo era observar o início do conteúdo de Álgebra, as aulas abordaram: expressões algébricas, polinômios e suas operações e produtos notáveis. As observações foram feitas no período de 07 de abril a 22 de maio de 2017 e sempre em aulas geminadas.

Na perspectiva de Duval (2003, 2009, 2011), a pesquisadora destacou o modo como os conteúdos algébricos foram abordados pelos professores, selecionando as atividades cognitivas ligadas à representação, a saber, formação, tratamento e conversão dos

[6] Inquieta com a prática de P3, a pesquisadora decidiu fazer uma observação a mais com esta professora. Escolhendo o conteúdo de produtos notáveis, pois P3 na entrevista afirmou que era esse o conteúdo que os alunos tinham mais dificuldades.

registros. Utilizamos o termo representações intermediárias[7] para as representações não formais utilizados pelos professores.

Para a análise e discussão dos resultados agrupamos as reflexões em formação, tratamento e conversão, seguidos de uma síntese.

Análise e discussão dos dados

Os dados das entrevistas e as observações em sala de aula permitiram à pesquisadora perceber características de como os professores identificam os objetos matemáticos algébricos e verificar como eles conduzem esse ensino nos diferentes modos de representação.

No decorrer das observações das aulas, encontramos elementos de diferentes naturezas operados pelos professores para explicar os conteúdos aos alunos. O quadro 1 apresenta os conteúdos que foram trabalhados pelos professores durante as aulas observadas.

Quadro 1: Conteúdos trabalhados pelos professores durante as observações

Professor	P1	P2	P3	P4	P5
Conteúdos	Adição e subtração de polinômios e multiplicação de polinômios; Expressão numérica com a soma e a diferença dos quadrados, de dois termos.	Divisão de monômio por monômio; Potenciação de monômios.	Divisão de polinômios; Divisão de polinômios; O quadrado da diferença de dois termos.	Expressões algébricas; Atividade com o Tangran; Fatoração da diferença de dois quadrados.	Expressões algébricas; O piquenique algébrico.

Fonte: dados da pesquisa.

Ao longo do texto, destacaremos as três atividades cognitivas ligadas à representação: formação, tratamento e conversão, daremos ênfase ao discurso utilizado pelos professores e a congruência e não congruência presentes nele, buscando ligações com os quatro tipos de operações de substituição semiótica, propostas por Duval et al. (2014).

Segundo Duval (2009) a *formação* implica em fazer a “designação nominal de objetos, a reprodução de seu contorno percebido, a codificação de relações ou de certas propriedades de um movimento.” (DUVAL, 2009, p. 55). *S*eguindo as regras próprias ao sistema empregado, ou seja, aquelas que definem o sistema de representação. O modo

[7] “Duval chama a atenção para a complementaridade de registros necessários à passagem de um registro a outro que Damm (1999, p.149) denomina de representação intermediária.” (BASSOI, 2006, p. 55).

como o professor concebe o objeto matemático sem dúvida influencia e impacta a maneira como ele apresenta o ensino.

P5 trabalha o princípio de "pensamento algébrico", conduzindo o processo utilizando o registro língua natural.

> *P5: Agora vocês prestem atenção que eu vou falar, qual é o número que somado com cinco dá onze?*
> *As: seis.*
> *P5: qual é o número que somado com noventa e nove dá duzentos?*
> *As: cento e um.*
> *P5: qual é o número que somado com dez dá menos cinco?*
> *As: menos quinze.*
> *P5: menos quinze. A primeira foi fácil? (As: foi) A segunda foi fácil? (As: sim) A terceira teve que pensar um pouquinho mais ou foi fácil também? (As: mais ou menos) Então tá. O dobro de um número somado com quatro dá dezesseis, que número que é esse?*
> *As: doze/seis/quatro.*
> *[...]*
> *P5: teve que pensar um pouco mais? O A3 fez rapidinho, outras pessoas nem entenderam direito o que eu falei né. Outras pessoas começaram a pensar como que faziam. Gente o que nós acabamos de fazer não foi descobrir uma charada, nós acabamos de resolver uma equação.*
> *[...]*
> *P5: [...] equação é [...] quando a gente quer descobrir um número que chega num resultado [...] a primeira coisa que a gente pode pensar da equação é assim, que número mais cinco dá onze. Isso aqui vocês faziam lá no quinto ano, que é tentar descobrir, que é a parte mais fácil. Daí ano passado no sétimo ano, que esse 'qual é o número' a gente representa por um símbolo, esse símbolo é uma letra, pode ser qualquer letra. Poderia ser até se eu quisesse colocar um coraçãozinho também estaria certo, só que o matemático ele gosta das coisas bem tradicionais, daí todo mundo usa uma letra e a maioria das pessoas usa o "xis". Mas pode ser qualquer letra.*

Pela fala P5 está construindo com os alunos a escrita de uma equação, atribuindo implicitamente o conceito de incógnita. Quando ela fala que se pode substituir o valor por um coraçãozinho, ela está tentando atribuir um grau de generalização para essa letra, no entanto, não é possível afirmar que isso garanta a aprendizagem dos diferentes estatutos da letra numa sentença matemática.

Diante dos exemplos dados pela professora para formalizar o conceito de equação, os três primeiros estão estritamente ligados a operação de adição, muito simples de resolver, tal que os alunos o fazem mentalmente. Já o último exemplo, "o dobro de um número somado com quatro dá dezesseis", a professora quer mostrar a utilização da equação como uma ferramenta matemática. Segundo Duval et al. (2014, p. 87 - 88) "Os problemas aritméticos podem também ser resolvidos por raciocínio. [...] existe o recurso a uma letra para nomear a quantidade desconhecida [...] Para facilitar esse recurso, escolhemos números bastante grandes para desencorajar “estratégicas numéricas””.

Para formalizar a fórmula da área do triângulo, P4 serviu-se do tangram e para isso usou como representação intermediária a figura de dois triângulos que unidos formavam a figura de um quadrado.

> *P4: eu admiti que a medida desse lado é quatro, a área dessa figura então é quanto?*
> *As: dezesseis.*
> *P4: e agora é quanto? [tirou um dos triângulos].*
> *A2: quatro, não pera aí, éh::*
> *As: dezesseis.*
> *A2: oito, oito!*
> *P4: ah, tá vendo oh. Então vamos lá, então nós vamos criar uma formulazinha [...] de novo, a área dessa figura, aqui é quatro, aqui é quatro, então vai dar deze? (As: dezesseis). Mas quando eu tiro uma das partes, quanto que fica? (As: oito). Tá mas se eu tirei metade, como é que a gente vai achar esse oito? Como é que eu acho esse oito se deu dezesseis? [o professor juntava e separava os triângulos, a fim de tentar fazer com que os alunos visualizassem que os dois triângulos formavam um quadrado e portando um triângulo era a metade].*
> *A2: porque oito é a metade, deze...*
> *A7: dezesseis dividido por dois.*
> *P4: isso, quando a gente fala assim, [...] A área de um triângulo nós fazemos pela base vezes altura, [...] dividido por dois.*

Essa atividade feita por P4 trabalha com as letras com outro estatuto: fator desconhecido que leva a fórmulas. E pode ser analisada quanto aos tipos de substituição semiótica proposto dor Duval et al. (2014): o *tipo 3*, que é substituir um valor numérico por uma letra em uma fórmula, tratando-se de uma simples codificação, nesse caso, a área do triângulo $A = \frac{b.h}{2}$, em que cada letra é substituída por um valor dado.

Este mesmo professor ao verificar que alguns alunos estavam escrevendo as letras em forma maiúscula, chamou a atenção e explicou que não poderiam usar letra maiúscula para representar os lados da figura, recordando que a escrita maiúscula se refere a ponto na geometria, possivelmente é um ato consciente ou não, para que os alunos não comecem a confundir as letras dos lados de uma figura com as letras de uma equação.

Duval et al. (2014) apontam quanto à generalização da operação semiótica a importância da compreensão e designação lexical na substituição de uma letra e/ou sintagma operatório nos dados de um problema, e que, do ponto de vista matemático, as letras não têm o mesmo status.

Para formalizar uma ideia algébrica, a maioria dos professores usou como exemplo as representações numéricas, com a intenção de que os alunos entendessem sem uma explicação clara, que nem sempre o que ocorre com os termos numéricos ocorrerá com os termos algébricos. Tomando como exemplo a formação de uma sentença algébrica, o que ocorre na aritmética, três mais quatro é igual a sete ($3 + 4 = 7$), não ocorre numa sentença algébrica utilizando os mesmos elementos numéricos, três a mais quatro b não é igual a sete ab ($3a + 4b \neq 7ab$).

Aqui está o maior obstáculo didático já apontado por pesquisas: a Álgebra como aritmética generalizada. Ainda que tentem 'facilitar' o entendimento dos alunos, os professores não percebem que estão partindo de situações matematicamente diferentes expressa por elementos semelhantes. Esses exemplos embora tenham termos semelhantes, não tornam claras as diferentes propriedades as quais essas sentenças matemáticas se referem.

Salientamos que todos os professores apresentaram aos alunos a existência do coeficiente 'um' nas expressões, possivelmente para que o aluno não atribua ao termo inexistente o valor zero.

Destacamos agora os **tratamentos** realizados pelos professores, lembrando que para Duval (2003, 2009) estes são transformações que acontecem em um mesmo registro.

Nem sempre os tratamentos são simples manipulações de letras e números, por exemplo, o desenvolvimento da expressão $(a + 3).(a - 3)$ não tem o mesmo custo cognitivo que a passagem do polinômio $a^2 – 9$ para a sua forma fatorada, ou seja, a conscientização do funcionamento cognitivo próprio de cada um dos registros, exige a compreensão de que eles nem sempre permitem efetuar os mesmos tratamentos matemáticos, determinando buscas específicas para cada um dos registros (DUVAL; MORETTI, 2016).

O exemplo a seguir pode ser comparado como uma decomposição regressiva em elementos de base, que se limita ao único objetivo da resolução das equações, que é o funcionamento da "ferramenta equações", no que concerne aos algoritmos ou às regras de transformações de escrita, ou seja, os "conhecimentos procedimentais": desenvolver, fatorar e mudar um termo de membro (DUVAL et al., 2014).

$$(a+3).(a-3) = a^2 - \cancel{3a} + \cancel{3a} - 9 = a^2 - 9$$

Ressaltamos a explicação do exemplo utilizado por P1 para iniciar o conteúdo do produto da soma pela diferença de dois termos: (a + b).(a – b).

> *P1: A primeira parte é a soma e a segunda parte é a diferença, que é a subtração. Esse caso está bem prático para vocês resolverem, você vai pegar e multiplicar o primeiro pelo primeiro é o mesmo método, pega o primeiro termo e multiplica pelo, pelos dois termos seguintes. Depois pega o segundo termo multiplica pelos dois termos seguintes, usando o jogo de sinal, fazendo a soma dos expoentes e depois reduzindo ao máximo que você puder. [...] a vezes a, (As: a ao quadrado) o expoente quando não tem vale um. A vezes b? (As: ab) como eles são diferentes nós vamos só repeti-los. (A1: menos) e aqui colocando o sinal, para que possamos separar os termos, mais vezes menos (A1: menos). Tá, o a eu já multipliquei com os dois, agora vou para o segundo e multiplicar aqui* [a professora enquanto fala da multiplicação faz o "chuveirinho" – uma representação intermediária da propriedade distributiva] *b vezes a (As: ab/ ba) mais com mais, mais ab. Vamos mudar aqui para ficar igual, ab*. [a professora se referiu a multiplicação b vezes a] *e b vezes b (As: b ao quadrado) mais vezes menos, menos b ao quadrado.* [novamente houve interrupção da aula para pedir silêncio] *olhem aqui, entenderam a primeira parte? (A2: simmm) então olha aqui, o a ao quadrado só tem ele uma vez, então nós vamos repetir. Aqui ab com ab, nós vamos somar ou subtrair? (As: subtrair) subtrair né. Sinais diferentes subtrai, então vai ficar um menos um*? [faz com o dedo o um imaginário na frente dos termos] *(As: zero). Então a gente só corta eles aqui, não precisa aparecer o zero ali. E o b, menos b ao quadrado. O que que acontece aqui oh, pegamos o primeiro termo ao quadrado menos o segundo termo ao quadrado* [afirmou mostrando o resultado].

Neste episódio, primeiramente P1 faz a formação do processo do tratamento, mostrando aos alunos como deve ser a sequência dos procedimentos a serem tomados. Nesta explicação o que P1 fez, foi mostrar aos alunos como se dá o resultado do produto fatorado, ou seja, a técnica. P1 não fez o tratamento contrário nem tão pouco questionou sobre a volta do processo. Poderia também ter mostrado a representação geométrica, já que o livro didático (LD) traz a demonstração, mas nesta aula a professora não fez uso dele, nem mencionou que os alunos poderiam recorrer ao LD para ver a representação geométrica.

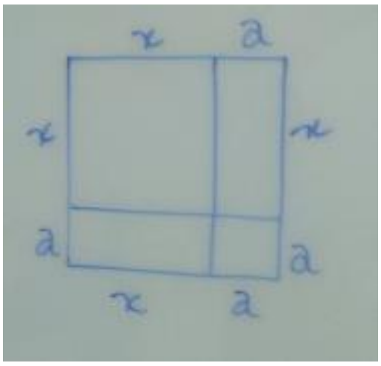
Entendemos que o tempo das aulas é curto para cumprir todo o currículo, porém é necessário que possibilitemos aos alunos conhecer os objetos matemáticos nas suas diferentes representações. Segundo Duval et al. (2014), é possível observar a ausência referente ao *status* das letras e dos diferentes sentidos do símbolo “=”, sendo utilizado apenas os “conceitos” que justificam os procedimentos de tratamento, que são: multiplicação, potências, adição e distributiva da multiplicação em relação à adição.

P1 atribuiu a inexistência do expoente ‘um’ utilizando apenas a fala e não outro registro, como por exemplo, o escrito. Possivelmente já tenha mostrado para os alunos em outro momento e agora só reforça o que ensinou. Esta atividade proposta por P1, pode ser classificada como o tipo 4 de substituição semiótica: substituir uma expressão literal por outra, que é mais desenvolvida ou mais reduzida. E que exige uma operação de designação de elementos, em que é preciso distinguir vários tipos de substituições, que vão exigir um reconhecimento puramente formal da forma de expressão, com “uma característica semiótica fundamental: as transformações de escrita não dizem respeito às letras, mas às ocorrências das letras” (DUVAL et al., 2014, p. 56).

Diante do que afirma Duval et al. (2014) e da explicação de P1, é possível nos questionar: os alunos entendem o que fazem ou só reproduzem o modelo do professor?

Na aula de P4, a partir de uma pergunta de um aluno, ele mostra a volta desse tratamento, após apresentar a representação geométrica do quadrado da soma, como mostra a Figura 1.

Figura 1: Representação geométrica do quadrado da soma de dois termos

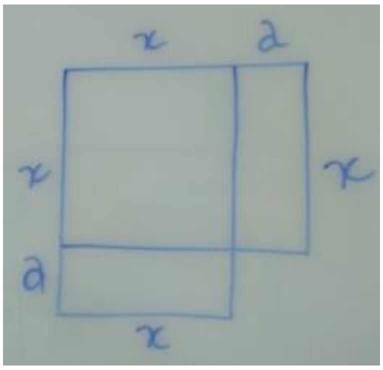


Fonte: dados da pesquisa.

> *A5: agora faz uma coisa, tira aquele quadradinho do lado*. [o aluno estava se referindo ao quadrado de lado a].
> *P4: e agora?* [o professor apagou a figura que o aluno se referiu].

A Figura 2 mostra o desenho com o quadrado de lado a apagado.

Figura 2: Representação geométrica do produto da soma pela diferença de dois termos



Fonte: dados da pesquisa.

A: como assim?
A5: eu acho que fica quase a mesma coisa só que em vez de ficar dois ax, fica ax.
P4: e agora que nós tiramos esse quadradinho, como vai ficar?
A5: fica dois a mais quatro xis. [o aluno contou a quantidade de cada letra que aparecia representando os lados].
P4: olhem para cá. [o professor pegou a figura de sulfite para mostrar aos alunos].
A7: "xis" elevado ao quadrado mais dois a "xis", eu não sei mais.
P4: "xis" ao quadrado, menos a ao quadrado.
A5: "xis" ao quadrado MAIS DOIS A "XIS" menos a ao quadrado.
P4: is-so. Por isso que fica o quadrado do primeiro menos o quadrado do segundo. Então quer dizer, oh, eu vou fazer o contrário aqui oh. [escreveu $a^2 – b^2$] *como que fica a fatoração dele aqui? (As: ...) é a mesma coisa gente, só que é ao contrário. Agora vou fazer com letra e número* [escreveu $a^2 – 4$] *esse como é que vai ficar?*
As: a mais quatro vezes a menos quatro/ a mais quatro vezes a, pera aí.
P4: agora peguei vocês. Vê se a expressão algébrica vai dar esse valor.
As: a ao quadrado/ dois. A ao quadrado mais dois vezes a ao quadrado menos dois.
P4: beleza! Vou escrever igual vocês estão falando. [escreveu a expressão como os alunos disseram $(a^2 + 2)(a^2 – 2)$].

Apesar de todo esforço feito por P4, de trazer as figuras recortadas, desenhar a figura no quadro e escrever a expressão algébrica, não garantiu que os alunos compreendessem a relação entre os três registros – língua natural, escrita algébrica e geométrica. A volta da transformação do registro geométrico para o algébrico deve ser compreendida como uma equivalência de área. É importante compreender que os termos de uma equação de um quadrado perfeito correspondem a áreas, é essa significação que deve ser atribuída pelo aluno e que na maioria das vezes não é ensinada pelo professor ou deixada passar despercebida, pois para ele isso já é claro, ou não.

De acordo com Duval et al. (2014) existe uma diferença cognitiva importante quando se trata de efetuar as duas operações originárias da técnica: desenvolver e fatorar. Desenvolver é uma operação que se começa e que se desenvolve automaticamente aplicando uma sequência de operações, já para fatorar é preciso reconhecer cada termo numérico como o produto possível de dois números, e ainda mais, ela deixa certo equívoco didático, porque as duas letras “a” e “b” “*podem ser substituídas seja por outra letra, seja por um número* (que será então o quadrado de outro).” (ibidem, p. 41 grifos do autor).

Ao perceber que os alunos estavam confusos, na fatoração da expressão $a^2 - 4$, o ato de o professor fazer o registro escrito $(a^2 + 2)(a^2 - 2)$ para os alunos visualizarem o que estavam falando, possibilitou que eles percebessem onde estava o erro.

> *A7: a ao quadrado está errado professor.* [depois que os alunos visualizaram a expressão, viram que não tinha como $a^2 . a^2$ dar a^2] *É só a, não é a ao quadrado.*
> *P4: ah, por isso que eu deixei vocês falarem. Tem esse a ao quadrado?* [apontou para o termo a^2] *(As: não) Não. Porque a hora que a gente fizer o produto* [mostrou com o dedo] *vai ficar na quarta potência. Não existe ao quadrado, só existe o a.*
> *A: agora a gente já sabe.*
> *P4: agora não tem mais graça, porque se eu fizer esse aqui* [escreveu $x^2 – 49$] *qual é a expressão algébrica?*
> *A1: “xis” mais dois três.*
> *P4: mais dois o quê? Qual a área quadrada que vai dar quarenta e nove?*
> *A1: sete.*
> *A5: “xis” mais sete vezes xis menos sete.* [o professor escrevia enquanto o aluno falava].
> *P4: agora volta. O quadrado do primeiro, menos o quadrado do segundo. Mas vamos tirar a prova real se é mesmo*. [fez a multiplicação membro a membro, utilizando a representação intermediária ‘chuveirinho’] *Agora vamos fazer uma atividade, escreva aí, fatore as expressões.*

Duval (2009) afirma que é preciso criar condições para que o aluno visualize um mesmo objeto matemático em várias representações, ainda que no mesmo registro, gerando uma significação dos conceitos matemáticos.

Destacamos a fala do aluno A1 ao responder “xis mais dois três” referindo ao primeiro fator de $x^2 – 49$. Percebemos que o aluno faz a raiz de quatro e a de nove separadamente. Diante da resposta do aluno, P4 mudou a forma da pergunta: “Qual a área quadrada que vai dar quarenta e nove” e entendendo o significado o aluno respondeu corretamente. A expressão utilizada pelo aluno vai revelar que ele sabe transformar a diferença de quadrados num produto da soma pela diferença de dois termos. Porém, percebe-se que se vale de quarenta e nove cujos valores posicionais respectivamente identificam-se com quadrados reconhecidos quatro e nove.

Enfatizamos a atenção do professor para a resposta do aluno e a mudança do discurso utilizada por ele. Segundo Duval (2009) a língua natural possibilita produzir uma variedade de tipos de discursos, que podem ser decompostos em unidades de sentido podendo ser reformulados e também ser decompostos em outras unidades de sentido, tornando acessível à compreensão do outro.

No tratamento feito por P2 no conteúdo de divisão de monômio por monômio, separamos a resolução da letra d) $(18\ x^5y^4):(-9\ x^5y^3)$.

> *A1: dezoito "xis" elevado a cinco. (P2: dezoito "xis" na quinta) y quatro* [professor abriu e fechou os parênteses sem que o aluno ditasse] *dividido por menos nove "xis" elevado a cinco, y elevado a três.*
> *P2: vamos lá então, dezoito dividido por nove?*
> *As: dois.*
> *P2: mais dividido por menos?*
> *As: menos.*
> *P2: "xis" na quinta dividido por "xis" na quinta?*
> *A: y.*
> *A1: que?*
> *A: zero. [risos]*
> *P2: "xis" na quinta dividido por "xis" na quinta, zero, não vai, isso! y, quatro menos três? Um, então, menos dois y.*

Destacamos o momento em que P2 diz "xis na quinta por xis na quinta, zero", embora estivesse se referindo possivelmente a subtração dos expoentes, o aluno entende como um "processo divisório". Esta é uma divisão em que o dividendo e o divisor são iguais, ou seja, xis na quinta dividido por xis na quinta é igual a um. Embora exista uma regra na potenciação que afirme que 'todo número elevado à zero é igual a um', o que deve estar claro para o professor e para o aluno é que essa regra resulta de uma das propriedades da potenciação, como podemos observar na demonstração por indução:

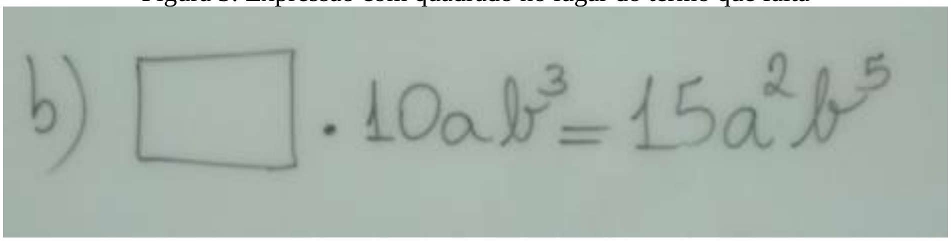
$$x^0 = x^{5-5} \Rightarrow \frac{x^5}{x^5} = \frac{x.x.x.x.x}{x.x.x.x.x} = 1.1.1.1.1 = 1$$

A fala carrega as dificuldades de os alunos entenderem esses processos operatórios. Quando o professor fala que "xis" na quinta, dividido por "xis" na quinta é zero, ele impregna do ponto de vista do registro da fala, uma concepção errônea do processo divisório, de dividir duas quantidades iguais. O problema quando o professor fala zero, está se referindo ao expoente, mas o aluno entende o zero como um processo divisório. A significação atribuída pelo aluno é diferente daquela exposta pelo professor.

Retomamos o que dizem Duval et al. (2014) que na Álgebra é preciso reconhecer as operações de substituição semiótica e o que os símbolos designam.

Na resolução da atividade 'Qual é o monômio que, multiplicado por $10\ ab^3$, tem como resultado $15\ a^2b^5$?', P2 coloca no lugar do monômio que deve ser encontrado, um quadrado, como pode ser visualizado na Figura 3. Essa lacuna o qual ele quer dar um caráter operatório, recorrendo ao pensamento algébrico, procurando minimizar as dificuldades dos alunos de lidarem com o que desconhecem.

Figura 3: Expressão com quadrado no lugar do termo que falta



Fonte: dados da pesquisa.

P2 parte do que os alunos já sabem, tentando sempre impregnar as propriedades algébricas a partir das propriedades numéricas.

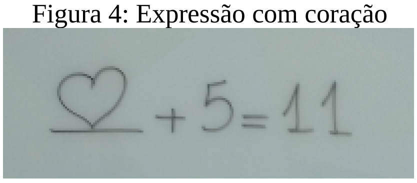
> *P2: [...] as letras a gente já descobriu, eu quero saber aqui o quinze. [...] vou dar aqui um exemplo numérico. [...] Igual eu falei ontem, quanto que é três vezes quatro? (As: doze).* [o professor deu um exemplo numérico, enquanto falava escrevia o algoritmo (3 x 4 =12)] *se eu apagar esse que é o que eu quero descobrir* [apagou o três e fez um quadrado no lugar □ x 4 = 12] *o que que eu vou fazer com esses dois?* [apontou se referindo ao quatro e ao doze*] (A: vai dar 3) vai dividir.* [e foi escrevendo o algoritmo]. *Então o que que a gente vai escrever aqui com esses dois?* [e apontou para a expressão, se referindo ao dez e ao quinze]. *(As: dividir) Então vamos lá, então vai ficar quinze dividido eu posso pôr assim? [escreve a fração 15/10] (As: pode) Oh, quinze dividido por dez* [aponta os números nessa sequência]. *Daqui para cá. As letras nós já fizemos, então dois tira um sobra um, cinco tira três sobra dois, agora quinze dividido por dez, quinze décimos, simplificando, (A1: dá 15) não. Por cinco, então quinze por cinco? (As: três) dez por cinco (As: dois). Então três meios* [escreve a resposta].

O desenho do quadrado feito pelo professor na expressão que precisa ser encontrada substitui a supressão de um termo, que agora não é mais um número, mas uma expressão, aumentando o grau de dificuldade. O fato de o professor colocar o quadrado para representar a expressão e não outra letra se fez possivelmente para não confundir ainda mais os alunos. No entanto, isso não garante que o aluno estabeleça a equivalência que aquele quadrado ou espaço vazio representa, exigindo um procedimento de redesignação. Quando o professor dá um exemplo numérico ele sugere subjacentemente que as propriedades numéricas valem também para os termos algébricos. Contudo, nem sempre isso é verdade na Álgebra, pois nem sempre somamos ou multiplicamos as letras como fazemos com os números. Por exemplo, a divisão de polinômios por polinômios, a divisão não é dividir termo a termo. Esse processo analógico entre os números e monômios, por exemplo, não tem equivalência, a operação está significando a mesma coisa, mas a forma do tratamento não é equivalente com a divisão numérica.

Do ponto de vista dos Registros de Representação Semiótica, esse modo como o professor exemplifica, para nós indica uma possibilidade de minimizar a incongruência que existe entre a fala e a escrita. Vejamos como P5 suprimi um termo da equação:

> *P5: [...] Por exemplo, eu falei pra vocês, qual é o número que somado com cinco dá onze. [...] que número [traçou um risco] mais cinco dá onze. [...] esse 'qual é o número' a gente representa por um símbolo, esse símbolo é uma letra, pode ser qualquer letra. Poderia ser até se eu quisesse colocar um coraçãozinho [...]*

Figura 4: Expressão com coração



Fonte: dados da pesquisa.

Para Duval et al. (2014) partir de uma igualdade numérica para elaborar problemas aditivos com uma operação é o caminho mais direto e natural para introduzir o conteúdo de Álgebra, transformando esta igualdade em três equações numéricas, suprimindo um termo de cada vez. Segundo os autores, o importante não é dar o problema, o importante é reformular o problema a partir da sentença matemática.

P5 está usando o processo substitutivo de uma expressão referida por uma pergunta. Nessa relação a professora exclui sempre o primeiro termo numa relação de operação de adição e subtração triádica, o que não é equivalente a suprimir o segundo ou o terceiro termo em caso de conversão (DUVAL et al., 2014). Ressaltamos que não é o 'espacinho' ou uma letra que vai garantir o valor operatório na expressão entre eles, mas como é transformado numa linguagem discursiva, falada ou escrita. É preciso reconhecer que naquele espaço em branco, que pode ser substituído por uma letra, um coraçãozinho ou outro símbolo, tem uma função diferente do que se estivesse ocupando outro espaço.

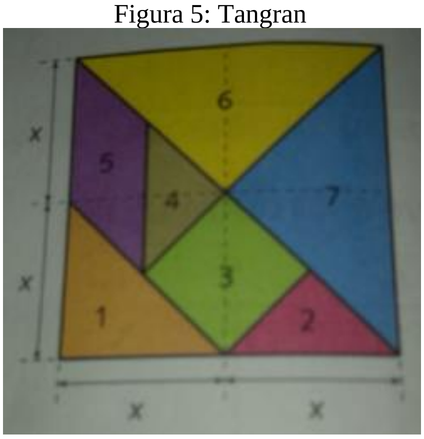
A conversão consiste na transformação da representação de um objeto matemático em uma representação em outro registro, seguindo as mudanças referentes a cada registro. Para Duval (2003, p. 15), "a capacidade de converter implica a coordenação de registros mobilizados". As **conversões** que aconteceram durante as observações das aulas se estabeleceram comumente entre os registros língua falada e escrita algébrica, língua falada e língua escrita, figural e escrita algébrica e vice-versa.

P3 e P5 recorrem às atividades com figuras geométricas para que fosse encontrado o polinômio que representasse o perímetro, contudo, as figuras relacionavam os elementos para usá-los como o tipo 4 de substituição semiótica, que é encontrar a forma reduzida de um polinômio e não para descobrir as letras como variáveis. As conversões em maior parte se deram entre o registro falado e o registro escrito. Contudo não houve nenhuma conversão de um problema em linguagem natural para se criar uma expressão algébrica e nem a de elaboração de problemas, apesar de verificarmos que o LD propunha alguns.

P4 usou o Tangran para apresentar a conversão da forma figural para a escrita algébrica da área do triângulo. O enunciado do exercício proposto foi:

> Atividade 6. O Tangran é um jogo chinês, que é uma espécie de quebra-cabeça, composto de sete peças, com as quais se podem criar numerosas figuras. Determine a área das peças 1, 6 e 7, sabendo que a soma de todas as áreas corresponde a $4x^2$. (SILVEIRA, 2015, p. 54).

Figura 5: Tangran



Fonte: Silveira, 2015, p. 54

Para a resolução da atividade, o professor poderia apenas ter resolvido com os alunos por meio da fórmula da área do triângulo ((b.h)/2) tendo em vista que o problema dava além dos dados necessários. Porém, ele fez a construção do jogo com os alunos, utilizando o Tangran como material manipulativo para mostrar como chegar nesta fórmula.

P4 disponibilizou aos alunos uma folha sulfite e com ela cada um construiu o seu Tangran seguindo as instruções dadas por ele. Após a construção do jogo, o professor foi conversando e questionando os alunos sobre o que eles tinham feito e estavam enxergando.

> *P4: [...] se aqui tem a mesma medida dessa,* [mostrou os catetos] *e eu não sei quanto mede e determinei chamar de "xis". Agora eu vou substituir o "xis" por um valor numérico [...] Então aqui o valor numérico é quatro, vamos substituir por quatro. Qual a área quadrada dessa figura? Quatro e quatro [mostrou os catetos enquanto falava].*

As: oito/ oito "xis"/ seis.
P4: oito? Área quadrada.
A7: dezesseis.
P4: quando é área quadrada é multiplicada. Um lado pelo outro lado. Esse lado vezes esse [mostrou os catetos]*. Então vamos lá, qual a área quadrada mesmo? (As: dezesseis) Mas será? Agora eu pergunto, dezesseis quadradinhos certo? Será que se eu for cortar esse triângulo, vai dá dezesseis quadradinhos? (As: não/ vai) vai ou não vai? E se eu ajuntar esse?* [juntou os dois triângulos maiores].
A2: trinta e dois.
P4: ué, como vai ser trinta e dois se aqui é quatro e aqui é quatro. [mostrou os lados].
A2: ué, dezesseis mais dezesseis.
As: discussão.
P4: calma. Olha, aqui não é quatro, aqui não é quatro [foi mostrando os lados enquanto falava] *(A2: oito, doze, dezesseis). Presta atenção, eu admiti que a medida desse lado é quatro, a área dessa figura então é quanto?*
As: dezesseis.
P4: e agora é quanto? [tirou um dos triângulos].
A2: quatro, não pera aí, éh...
As: dezesseis.
A2: oito, oito!
P4: ah, tá vendo oh. Então vamos lá, então nós vamos criar uma formulazinha oh, e é o exercício que tem aí [se referiu ao exercício do LD] *de novo, a área dessa figura, aqui é quatro, aqui é quatro, então vai dar deze? (As: dezesseis). Mas quando eu tiro uma das partes, quanto que fica? (As: oito). Tá mas se eu tirei metade, como é que a gente vai achar esse oito? Como é que eu acho esse oito se deu dezesseis?* [o professor juntava e separava os triângulos, a fim de tentar fazer com que os alunos visualizassem que os dois triângulos formavam um quadrado e portando um triângulo era a metade].
A2: porque oito é a metade, deze...
A7: dezesseis dividido por dois.
P4: A área de um triângulo nós fazemos pela base vezes altura [...] dividido por? (A: dois) dividido por dois. [enquanto falava escrevia a fórmula no quadro]. *[...] Aí gente essa é a resposta da figura um.*

O fato de o professor insistir no juntar e separar os triângulos para que os alunos visualizassem que o quadrado estava dividido em dois, possibilitou que eles fizessem a conversão do registro geométrico para o numérico e posteriormente, permitiu ao professor mostrar a fórmula da área do triângulo.

Contudo, P4 não faz uso constante de desenhos e esquemas. Ele prefere o registro língua natural e o repete inúmeras vezes como uma forma de provocar a aprendizagem.

O professor continuou com os questionamentos, pois o objetivo da atividade era encontrar a área das figuras 1, 6 e 7, referente à Figura 4.

P4: eu quero ver se alguém faz alguma relação da área da figura seis com a figura um.
A2: ela é metade do outro.

P4: ochi, então tá fácil. Se ele é metade do outro então quer dizer que ele é o dobro desse [estava com os triângulos grande e médio na mão e se referia a eles respectivamente].
A2: é.
P4: opa então ficou fácil, se é o dobro então, é só ocupa essa daqui e fazer o dobro dela [apontou no quadro para a resposta da figura um].
A: "xis" veis "xis" veis "xis". [o aluno denominou os lados do triângulo de "xis" e fez a multiplicação]
P4: gente olhem não é o mesmo? (As: sim) Então quer dizer que é a metade [sobrepôs o triângulo médio no triângulo grande, mostrando que cabiam dois]. *Se é a metade, então quer dizer que essa maior é o? (As: ...) dobro dessa aqui. Sendo o dobro é só fazer duas vezes.*

Embora o professor afirmasse 'tá fácil', os alunos não estavam conseguindo compreender. Não é tão simples assim, para os alunos entenderem que o dobro de uma quantidade é equivalente a duas vezes à quantidade, que neste caso refere-se a duplicar uma área.

O dobro se referia a uma grandeza geométrica. Pensar no dobro de alguma coisa acarreta um processo operatório próprio do pensamento algébrico. Mas esse dobro de alguma coisa estava atrelado exclusivamente ao dobro da área de uma figura, o dobro da área do triângulo, 'o dobro do que'. Para saber o dobro da área de um triângulo cuja área vale "xis" ao quadrado sobre dois ($x^2/2$), então o dobro dessa área é dois "xis" ao quadrado sobre dois ($2x^2/2$). Essa analogia não é simples para os alunos estabelecerem. O apelo para representações que não estão visíveis ou escritas dificulta a compreensão do aluno.

Considerações finais

Segundo Duval et al. (2014) os professores devem propor situações de aprendizagem que propiciem uma análise cognitiva, exigindo dos alunos não apenas justificativas e explicações acerca das respostas, mas de reconhecimento sobre o valor operatório que a letra assume e o que o símbolo representa.

Constatou-se que os professores se preocupam em preparar o aluno para o uso dos algoritmos e propriedades algébricas, quando percebiam que os alunos não compreendiam o exercício, davam outro exemplo, sendo eles algébricos ou numéricos frisando os procedimentos e regras, em que se destacam as atividades cognitivas de tratamento.

Mais do que reproduzir e manipular é imprescindível suscitar nos alunos situações matemáticas que permitam pensar genericamente, perceber regularidades, ou seja, que promova o progresso do pensamento algébrico. Mas isso exige do educador um conhecimento matemático que vá além do livro didático (LAUTENSCHIAGER; RIBEIRO, 2014).

É notória a ênfase dada pelos professores nos procedimentos de resolução, ou seja, a preocupação em ensinar a técnica. Não tiramos o mérito de que exercitar os tratamentos algébricos não seja importante no ensino de Álgebra, porém, o grande problema é que os professores acabam ficando apenas na escrita literal, não garantindo que o aluno compreenda a função dos elementos algébricos (DUVAL et al. 2014).

Quanto aos tipos de substituição semiótica propostas dor Duval et al., (2014), apesar de P4 mostrar a fórmula da área do triângulo, o tipo que mais se destacou foi o 4. Substituir uma expressão literal por outra expressão literal, possivelmente por tratar-se dos conteúdos de expressões algébricas, monômios e polinômios que foram observados.

Sabemos do trabalho, do esforço e da energia dispensada, que esses professores fazem todos os dias em ir para as escolas e trabalhar com seus alunos, em que muitas vezes são sozinhos nas suas dúvidas e nos entendimentos que têm que mostrar.

Agradecimentos

À minha orientadora Tânia Stella Bassoi, que veio a falecer no dia 17 de setembro de 2019, antes mesmo que este artigo fosse publicado. Foram dois anos de aprendizado, pesquisa, ensino, carinho e respeito que fortaleceram nosso vínculo e, ao longo do percurso do mestrado, nos tornamos grandes amigas. A professora Tânia sempre foi uma mulher admirável, alegre e destemida, uma profissional dedicada e comprometida com a Educação Matemática. Deixou um belo legado e muitos ensinamentos. Lutou bravamente até os últimos dias de sua vida. Descanse em paz professora guerreira!

À CAPES pelo apoio financeiro.

Referências

CONDILLAC, É. B. 1715-1780 **Condillac, Helvétius, Degérando: os pensadores**.Traduções de Luiz Roberto Monzani et al.- 2 ed.- São Paulo: Abril Cultural, 1979.

CARVALHO, A. M. P. Uma metodologia de pesquisa para estudar os processos de ensino e aprendizagem em salas de aula. In: SANTOS. F. M. T.; GRECA, I. M. (Orgs). **A Pesquisa em Ensino de Ciências no Brasil e suas Metodologias.** Ijuí: Ed. Unijuí, 2006. p. 13-48.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D.A. (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica.** Campinas: Papirus, 2003, p.11-33.

________. **Semiosis y pensameiento humano**: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía-Grupo de Educación Matemática. 2004.

________. **Semiósis e pensamento humano**: registro semiótico e aprendizagens intelectuais (Sémiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissagens Intellectuels): (fascículo I) / Raymond Duval. Trad. LEVY, L. F.; SILVEIRA, M. R. A. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

________. **Ver e ensinar a matemática de outra forma:**entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. vol I.Org. Tânia M. M Campos; Trad. Marlene A. Dias. São Paulo: PROEM Editora, 2011.

________. Questões epistemológicas e cognitivas para pensar antes de começar uma aula de matemática. Trad. Méricles T. Moretti. In.: **REVEMAT**. Florianópolis (SC), v.11, n. 2, p. 1-78, 2016. Disponível em <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2016v11n2p1/33628 > Acesso em 30 jun 2017.

DUVAL, R.; CAMPOS, T. M.M.; DIAS, M. A.; BARROS, L. G. X. **Ver e ensinar matemática de outra forma:** introduzir a álgebra no ensino: qual o objetivo e como? vol II. Org. Tânia M. M. Campos. 1ª ed. São Paulo: PROEM, 2014.

KIERAN. C. Duas abordagens diferentes entre os principiantes em álgebra. COXFORD, A.; SHULTE, A.P. (Org); Traduzido por DOMINGUES, H. H. In.: **As ideias da álgebra**. Atual. 1995, p. 104-110.

LAUTENSCHLAGER, E.; RIBEIRO, A. J. Reflexões acerca do impacto do conhecimento matemático dos professores no ensino: a álgebra da educação básica. In.: **JIEEM** – Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática **IJSME** – International Journal for Studies in Mathematics Education. v.7(3)-2014. p.1- 26. Disponível em < http://www.pgsskroton.com.br/seer/index.php/jieem/article/view/69> Acesso em: 05 mar 2017.

LÜDKE, M., ANDRÉ M. E. D. A. **Pesquisa em educação: Abordagens Qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. 17 ed. – Petrópolis, RJ: Vozes, 2014.

TREMBLAY, M. A. Prefácio: Reflexões sobre uma trajetória pessoal pela diversidade dos objetos de pesquisa. **A pesquisa qualitativa: Enfoques Epistemológicos e Metodológicos**. 2ª ed. Editora Vozes, 2008.

Texto recebido: 23/08/2019
Texto aprovado: 04/12/2019