EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019vol21i3p143-166

A educação algébrica e a resolução de problemas numéricos no 6º. ano do ensino fundamental: prelúdio ao pensamento algébrico

Algebraic education and numerical problem solving not 6th. grade elementary school: prelude to algebraic thinking

---

MÁRCIA AZEVEDO CAMPOS [1]

LUIZ MÁRCIO SANTOS FARIAS [2]

Resumo

Analisamos neste artigo, recorte de uma pesquisa maior, as contribuições, condições e restrições para a implementação de uma Sequência Didática elaborada para o ensino de números naturais, visando o desenvolvimento do pensamento algébrico. Compreendeu oito momentos didáticos e as experimentações se deram em uma escola pública estadual baiana, com 111 alunos do 6º. Ano do Ensino Fundamental. Resultados apontam que o pensar algebricamente se manifesta principalmente ao manipular objetos desconhecidos de forma analítica como se fossem conhecidos e na capacidade de estabelecer relações entre os dados de um problema, significando-os. As atividades e sua condução didática, explorando variados registros de representação, contribuíram para a promoção do conhecimento e o enriquecimento didático da educação algébrica.

Palavras-chave: *Pensamento algébrico, sequência didática, educação algébrica, didática da matemática.*

Abstract

We analyze in this article, clipping of a larger research, the contributions, conditions and restrictions for the implementation of a Didactic Sequence elaborated for the teaching of natural numbers, aiming at the development of algebraic thinking. It comprised eight didactic moments and the experiments took place in a state public school in Bahia, with 111 students from the 6th grade. Results indicate that thinking algebraically manifests itself mainly by manipulating unknown objects analytically as if they were known and in the ability to establish relationships between the data of a problem. The activities and their didactic conduction, exploring varied records of representation, contributed to the promotion of knowledge and the didactic enrichment of algebraic education.

Keywords: *Algebraic thinking, didactic sequence, algebraic education, math didactics.*

[1] Doutora: Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Brasil, – azevedoxu@gmail.com
[2] Doutor: Universidade Federal da Bahia, Brasil, IHAC – lmsfarias@ufba.br

Introdução

O campo de estudo denominado Didática da Matemática surgiu como uma área cientifica que investigava essencialmente os objetos de ensino. Sua origem remete a pesquisadores como Guy Brousseau, Yves Chevallard, Gérard Vergnaud, dentre outros. Na sua origem está a ideia de que é possível descrever e explicar de maneira racional os fenômenos de ensino, em geral mais empíricos (BESSOT, 1994). As pesquisas em Didática, enquanto campo de estudo de situações de ensino e produção de conhecimento, são articuladas em torno de uma questão. E eis a questão que norteou este estudo:

Que contribuições uma Sequência Didática – elaborada com atividades de resolução de problemas com números naturais envolvendo operações de natureza aditiva e multiplicativa e aplicada a alunos do 6º. Ano do Ensino Fundamental – traz para o desenvolvimento do pensamento algébrico?

A Didática da Matemática possui um objeto de estudo, definido por Chevallard, Bosch e Gascón (2001) como sistema didático, que tem por finalidade o estudo da questão geratriz da pesquisa a fim de encontrar uma resposta, ou um conjunto de respostas. Chevallard (1991) afirma que uma situação didática existe em toda instituição social em que há uma intenção que o outro aprenda. No sistema didático há um estabelecimento de relações entre o professor, o aluno e o saber, aqui constituído em torno de atividades articuladas dentro de uma organização matemática que envolve os números naturais e o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Almouloud (2017, p.14) define a Didática da Matemática como

> (...) a ciência da educação cujo propósito é o estudo de fenômenos de ensino e de aprendizagem, mais especificamente, é o estudo de situações que visam a aquisição de conhecimentos/saberes matemáticos pelos alunos ou adultos em formação, tanto do ponto de vista das características dessas situações, bem como do tipo de aprendizagem que elas possibilitam.

Em um duplo movimento de teorização e de experimentação, situamos nosso estudo no campo da Educação Matemática, cujas discussões teóricas perpassam pela Didática da Matemática. Delimitamos como tema o desenvolvimento do pensamento algébrico a partir de resolução de problemas com números naturais, dando ênfase à produção de significados aos objetos algébricos que podem ser evocados na resolução destes problemas, por entendermos ser fundamental à aprendizagem matemática algébrica. Neste sentido, adotamos a prerrogativa de Lins (2012) de que a produção de significados é necessária à produção do conhecimento, ao afirmar que “sempre que há produção de significado há produção de conhecimento, e vice-versa" (p. 28). E produção de conhecimento é o foco deste estudo.

Assumiremos em nossas discussões neste texto o pensamento algébrico como uma ação exclusivamente humana, cognitiva e revelada na atividade matemática através do estabelecimento de relações, nos processos de generalizar, modelar, operar com o desconhecido como se fosse conhecido (RADFORD, 2009) e de construir significado para os objetos e para a linguagem simbólica algébrica.

Referimo-nos à álgebra elementar, a que é estudada nos níveis fundamental e médio, como uma abordagem básica de conceitos algébricos como equação, incógnita, variável.

Apoiamo-nos teoricamente em estudos correlatos, como os do movimento denominado *Early Algebra*[3], em suas discussões sobre a produção de significados e a formação do pensamento algébrico de resolução de problemas desde os anos iniciais, como motivador da aprendizagem matemática.

Fizemos também uma análise das orientações curriculares para essa educação algébrica no 6º. Ano nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1988) de Matemática[4] e na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017), esta última em processo de implantação por época da escrita deste texto.

Os arcabouços teóricos metodológicos da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996) deram sustentação à elaboração de uma sequência didática que propusemos e às análises e discussões, em busca de validar as hipóteses de estudo que construímos. As experimentações possibilitaram conhecer, interpretar e analisar as estratégias e o nível de pensamento algébrico que os alunos mobilizaram ao se depararem com problemas intencionalmente elaborados para este fim. A sequência previu aplicação de instrumentos de produção de dados (testes), e suas análises, a didática e a epistemológica, se deram em duas etapas: *a priori* e *a posteriori*.

Uma análise majoritariamente qualitativa dos instrumentos e das etapas da sequência didática nos forneceu dados quanto ao desenvolvimento do pensamento algébrico, como também para o enriquecimento da prática docente.

---

[3] Grupo de trabalho que teve origem na *Conferência Algebra Gateway to Technological Future*, em novembro de 2006, nos Estados Unidos da América. Mais sobre o Early Algebra em http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/default.asp. Disponível em: <http://www2.research.uky.edu/pimser/p12mso/pub/2009. Acesso em maio/18.

[4] Chamaremos aqui de PCN de Matemática os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1988) do 3º. e 4º. Ciclos do Ensino Fundamental de Matemática. Trata-se de uma coleção de caráter institucional, elaborada pelo Ministério da Educação com o papel de serem norteadores da educação no Brasil, na perspectiva de contribuir para uma nova prática pedagógica.

Trazemos à discussão as *condições* e *restrições* (CHEVALLARD, 2002) desta sequência no ensino de Matemática do 6º. ano, enquanto proposta didática pensada para minimizar os entraves com a aprendizagem matemática escolar, a partir do desenvolvimento do pensamento algébrico. E para investigá-lo elencamos o conteúdo Números Naturais e Operações para elaborar as atividades de experimentação. Trata-se do conteúdo previsto no Plano Pedagógico da escola para o 6º. ano, que por questões éticas não podíamos distanciar. O que também não nos distanciou do objeto de estudo elencado, uma vez que estudos empíricos nos mostraram que a resolução de problemas com números naturais é um campo propício e oportuno para introduzir noções de álgebra, do raciocínio matemático de pensar quantidades desconhecidas como se fossem conhecidas, significando-as, ou seja, introduzir o pensamento algébrico.

Como um recorte de um estudo de doutorado, trazemos neste artigo discussões que podem se consolidar como contribuições para a Educação Matemática e, especificamente, para a Didática da Matemática, indicando caminhos para novos estudos revelados a partir deste.

A educação algébrica na perspectiva de formação do pensamento algébrico: inspirações teóricas

Nos inspirou o estudo de Campos (2015) sobre a aprendizagem da álgebra elementar, que identificou dificuldades cognitivas nas ações dos alunos em interpretar problemas algébricos que exigiam uma tradução da linguagem natural para a linguagem simbólica no 7º. ano do ensino fundamental. Essas dificuldades residiam principalmente em significar os elementos algébricos necessários à codificação da linguagem algébrica. A partir deste estudo, e de acordo com outros que argumentam sobre a introdução algébrica precoce, como o Early Algebra (BLANTON; KAPUT, 2005; CAHARRER; SCHILIEMANN; BRIZUELA, 2006; CARRAHER; SCHLIEMANN, 2007; KAPUT, 1998, 2000), entendemos que a introdução do pensamento algébrico se dá num processo que começa desde os anos iniciais. E, além disso, pode residir harmonicamente no currículo de Matemática dos anos iniciais, transversalmente, durante o ensino e aprendizagem das diferentes temáticas. E assim focamos no 6º. ano por anteceder a introdução formal da álgebra no 7º. ano, como propõe os PCN (BRASIL, 1988), documento curricular em vigor para o ensino de matemática no Brasil.

Não se trata de defender a antecipação de conteúdos, mas sim de primar pelo desenvolvimento de um raciocínio capaz de formar a base do pensamento algébrico. Como também, não se trata de usar letras e símbolos na atividade matemática para caracterizá-la como atividade algébrica ou pensamento algébrico. E apoiados teoricamente em Kieran (2007, apud ALMEIDA, 2016) e Radford (2006) entendemos que o uso de letras e símbolos não equivale a fazer álgebra.

Em traços gerais, o Early Algebra está associado ao estudo e à generalização de padrões e de relações numéricas, de relações funcionais, manipulação de símbolos e modelação. E a atividade algébrica reside nas generalizações, na resolução de problemas, como ferramenta para formar a base do pensamento algébrico.

Pensando o ensino da matemática em nossa realidade, vislumbramos a institucionalização destas ideias. Identificamos na BNCC (BRASIL, 2017) avanços neste sentido ao instruir que a educação algébrica deve ser voltada para a construção do significado dos objetos algébricos e da linguagem simbólica algébrica. E a BNCC (BRASIL, 2017, p. 296) traz argumentos de que

> (...) a aprendizagem em Matemática no Ensino Fundamental – Anos Finais (6º. ao 9º. Anos) também está intrinsecamente relacionada à apreensão de significados dos objetos matemáticos. Esses significados resultam das conexões que os alunos estabelecem entre os objetos e seu cotidiano, entre eles e os diferentes temas matemáticos e, por fim, entre eles e os demais componentes curriculares.

Quanto ao ensino de matemática no 3º e 4º. Ciclos, em que situa o nosso estudo, os PCN (BRASIL, 1988) propõem que o professor tenha um papel de mediador entre o conhecimento matemático e o aluno, através da proposição de atividades que façam uso de letras como "generalização de modelos, como variáveis nas relações funcionais, como incógnitas na resolução de equações e como símbolos abstratos na dimensão estrutural" (p. 116-122).

É consenso, e nosso entendimento, que o objetivo do ensino é desvendar aos alunos os caminhos da aprendizagem. Privilegiar o que lhes é útil e significativo é essencial na busca desta aprendizagem (ALMOULOUD, 2017). Um ensino de álgebra centrado na utilização de simbologia desprovida de significado, com ênfase na aplicação de regras e técnicas, visando a manipulação simbólica e com elevado grau de abstração não contribui para construção do saber. Além disso, frequentemente a álgebra constituiu um domínio à parte, isolado dos outros temas do currículo de Matemática e, isolado também, dos interesses dos alunos, que tendem a não lhe reconhecer valor. Como afirma Kaput (1999), "a álgebra escolar tem tradicionalmente sido ensinada e aprendida como um conjunto de procedimentos desligados quer dos outros conteúdos matemáticos, quer do mundo real dos alunos" (p. 2).

Duval (2003) afirma que as competências algébricas são estruturadas pela capacidade de produzir expressões algébricas que traduzem um problema e pelos aspectos sintáxico e semântico destas, ao manipulá-las formalmente. E Duval (2003, 2009) afirma ainda que objetos matemáticos só são acessíveis a partir de uma representação. Trata especificamente de operações de *tratamento* e *conversão* (DUVAL 2009, 2011) como operações cognitivas presentes na atividade matemática e fundamentais para que ocorra a aprendizagem. Neste sentido, em nossas análises nos referiremos a objetos diretamente acessíveis, manipuláveis ou não, como definem Bosch e Chevallard (1999, p.82)

> (...) os conceitos surgem da manipulação de *ostensivos* dentro de determinadas organizações matemáticas (...) e esta mesma prática que, ao institucionalizar ou oficializar-se, estabelece vínculos entre *ostensivos* e *não-ostensivos* que permitiram aos primeiros remeter ou representar aos segundos em futuras possíveis atividades.

O termo *ostensivo* é usado por Bosch e Chevallard (1999) para indicar aquilo que se apresenta visível, manipulável. E estabelecem uma dialética do *ostensivo* e do *não-ostensivo* nos quais buscam responder a origem dos conceitos matemáticos, enquanto objetos não-ostensivos e sua relação com os objetos ostensivos que os representam. Exemplo claro de objeto ostensivo são os recorrentes *risquinhos*, utilizados pelos alunos nos problemas com operações de números naturais.

Os objetos ostensivos na atividade matemática assumem dois papeis: a função semiótica, dada sua capacidade de produzir significado, e a função instrumental, pela sua capacidade de integrar manipulações técnicas, tecnológicas e teóricas (BOSCH; CHEVELLARD, 1999). Na análise da atividade matemática, a dialética ostensivo/não-ostensivo (BOSCH; CHEVALLARD, 1999) é geralmente concebida em termos de signos de objetos não-ostensivos que constituem o sentido e a significação, perceptíveis por algum órgão dos sentidos. O registro, seja oral, escrito, gráfico, gestual ou material, é um desses objetos ostensivos pois “é o sistema no qual ocorre ou se realiza a representação de um dado objeto, externando assim o objeto não-ostensivo (ideia, noção, conceito) pensado pelo sujeito” (HENRIQUES; ALMOULOUD, 2016, p. 469).

Assim, conjecturamos, apoiados nos argumentos de Bosch e Chevallard (1999), que propor problemas no ensino de matemática que admitem diferentes soluções, com base em diferentes técnicas, e que ativam uma pluralidade de registros ostensivos, como o oral, escrito, gráfico e gestual, é um caminho para a aprendizagem. E assim, conjecturamos também que pensar algebricamente é lidar com o desconhecido como se fosse conhecido num contínuo processo de produção de significados para os objetos da álgebra; é observar regularidades; fazer conversões de linguagem, como da linguagem natural para a oral, algébrica ou figural, e realizar cálculos; é manipular ostensivos para evocar os não-ostensivos imprescindíveis à aprendizagem matemática.

São atuais e contínuas as pesquisas, correlatas ao nosso estudo, sobre a produção de significados para os conteúdos algébricos (CARRAHER; SCHLIEMANN, 2007; LINS, 2012; CAMPOS, 2015, dentre outras) e a aprendizagem matemática.

A sequência didática: percurso metodológico

Construímos uma sequência didática pelos pressupostas da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996) visando o desenvolvimento do pensamento algébrico. A assumimos como uma ação de ensino devidamente acompanhada, com observação dos alunos[5] participantes, um esquema experimental de resolução de problemas, elaborados a partir de um estudo preliminar. As análises preliminares evidenciaram os saberes e os conhecimentos matemáticos relacionados a cada um dos problemas, de acordo com os objetivos traçados. As experimentações das atividades em sala de aula e a confrontação de suas análises a priori e a posteriori serviram para a validação da proposta.

Segundo Bogdan e Biklen (1994), as diversas formas de interpretar as experiências são acessíveis aos investigadores através da sua interação com os pesquisados quando buscam compreender o pensamento subjetivo destes. Assim, enquanto investigadores, buscamos interpretar as ações dos participantes que se constituíram dados para as nossas análises.

A pesquisa teve como participantes, além da primeira autora (doutoranda à época), 111 alunos, na faixa etária de 11 a 15 anos, e a professora de Matemática de três turmas do 6º. ano de uma escola pública baiana. Trazemos no Quadro 1 o Desenho do Experimento para ter uma visão global da pesquisa maior, ainda que analisaremos neste texto apenas a terceira sessão de experimentação.

Quadro 1: Desenho do Experimento

ATIVIDADE	DURAÇÃO/ PREVISÃO	DESCRIÇÃO/OBJETIVOS DA ATIVIDADE
Apresentação da pesquisa	1 encontro Junho/2018	Apresentação da pesquisa, objetivos, termos legais, a função de cada participante na pesquisa; entrega e explicação do TCLE.

[5] Sem diferenciação de gênero, usaremos o termo aluno(s) para nos referirmos ao conjunto de estudantes. Estes são participantes de uma pesquisa maior de Doutorado, autorizada pelo Conselho de Ética – CEP/UFBA, com parecer final (nº. 2.121.524, de 14/07/2017) favorável à pesquisa (APROVADA), que envolveu seres humanos, no caso os alunos e a professora das turmas participantes.

Experimentação: 1ª. sessão	2 encontros Junho/2018	A pesquisadora assumirá a sala de aula por duas aulas, trabalhando atividades intencionalmente elaborada para verificar o desenvolvimento do pensamento algébrico.
Avaliação da 1ª. Sessão de Experimentação	1 encontro Julho/2018	Discutir a 1ª. Sessão da Experimentação; Realizar questionamentos, entrevistas, se necessário e esclarecer possíveis dúvidas nas resoluções.
Experimentação: 2ª. Sessão	2 encontros Julho/2018	A pesquisadora assumirá a sala de aula por duas aulas, como na sessão anterior.
Avaliação da 2ª. Sessão de Experimentação	1 encontro Julho/2018	Discutir a 2ª. Sessão da Experimentação; Realizar questionamentos, entrevistas, se necessário e esclarecer possíveis dúvidas nas resoluções.
Experimentação: 3ª. Sessão	2 encontros Julho/2018	A pesquisadora assumirá a sala de aula por duas aulas, como na sessão anterior.
Avaliação da 3ª. Sessão de Experimentação	1 encontro Julho/2018	Discutir a 3ª. Sessão da Experimentação; Realizar questionamentos, entrevistas, se necessário e esclarecer possíveis dúvidas nas resoluções.
Encerramento	1 encontro Agosto/2018	Encerramento: discussão sobre a pesquisa, a participação da pesquisadora e avaliação das atividades desenvolvidas.

Fonte: elaboração própria

As fases de experimentação coadunam com a preocupação de analisar a evolução do aluno ao longo da realização da sequência didática. Não se trata de traçar paralelos e comparação entre os conhecimentos do aluno antes e depois da aplicação desta, são características de uma validação externa “[...] porque são externas à classe” (ARTIGUE, 1996, p. 284). As entrevistas tiveram como objetivo esclarecer possíveis dúvidas quanto aos procedimentos de resolução dos problemas registrados em meio escrito pelos alunos. Os protocolos gerados com a aplicação dos testes e entrevistas foram organizados de forma a possibilitar a análise qualitativa a posteriori, que será descrita a seguir.

Discussão e análise dos resultados

Conforme delimitamos metodologicamente elencamos duas categorias para as análises qualitativas: (i) análise didática a priori dos problemas que elaboramos (testes) para as etapas de experimentação, e as (ii) análises a posteriori, uma categoria que emergiu das respostas dadas pelos alunos aos instrumentos diagnósticos propostos.

A priori analisamos as condições e restrições para a implementação da sequência didática e dos problemas elencados para a experimentação, visando o desenvolvimento do pensamento algébrico. Didaticamente discutimos as habilidades e competências que poderiam ser requeridas ou desenvolvidas pelos alunos para atingirmos o objeto matemático pensamento algébrico, e descrevemos as possíveis resoluções e os resultados esperados, fundamentados nos estudos realizados.

Analisamos as estratégias utilizadas pelos alunos para resolver os problemas e confrontamos com as estratégias previstas, enquanto categorias de análise a posteriori que traçamos. Esta apoiou-se nos dados produzidos nas experimentações, como também nas observações, entrevistas, produções dos alunos e nas discussões durante os encontros, e se deu de forma interacionista, cuja confrontação possibilitou a validação das hipóteses de pesquisa.

Uma terceira categoria, a (iii) análise dos resultados, surgiu como uma confrontação entre as duas primeiras, analisando as respostas dos alunos aos questionamentos realizados nas entrevistas e os dados captados pelas observações realizadas. Esta buscou responder as indagações iniciais e validar a sequência didática elaborada.

Trata-se de um processo essencialmente descritivo e interpretativo. As atividades integradas que compuseram a sequência didática centraram na exploração das relações numéricas e das propriedades das operações, numa perspectiva de desenvolvimento do pensamento matemático algébrico, tendo em conta os tópicos matemáticos. A exploração destas atividades tem como objetivos a identificação de regularidades, a expressão da generalização através da linguagem natural e a iniciação de um percurso em direção à simbolização através da passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica.

Em relação às questões formuladas em linguagem simbólica o objetivo era analisar a significação dada pelos alunos aos objetos matemáticos. E com os problemas em linguagem natural pretendíamos verificar se os alunos já apresentavam algum indício de pensamento algébrico.

Quanto à resolução, era esperado técnicas como tentativa e refinamento, desfazendo operações ou até mesmo transposição de termos e com operações cognitivas de tratamento e conversões (DUVAL, 2009, 2011).

Neste artigo vamos discutir e analisar os resultados dos problemas aplicados na terceira sessão de experimentação, não só pela limitação do texto, mas por serem bem próximos aos das outras sessões, tanto nas categorias quanto nas dificuldades elencadas a priori.

A terceira sessão de experimentação

Reunimos na terceira sessão de experimentação problemas dos tipos já trabalhados nas sessões anteriores – aritméticos, algébricos, partilha, sequências – que remetem às ideias de equação e/ou função. São problemas próximos em suas dificuldades e formas de apresentação, pois pretendíamos verificar se os alunos já conseguiam mostrar um raciocínio mais direto de generalização. Estes são apresentados na Figura 1.

Figura 1 – Questões do teste da 3ª. sessão de experimentação.

Nome: ____ Ano/Turma: ________

ATIVIDADES DE MATEMÁTICA

1) Os números da tabela abaixo obedecem a uma sequência. Descubra os números que estão faltando nos quadrinhos em branco:

a)

9	15	21			39	

b) Qual o décimo número dessa sequência?

2) Resolva os problemas:

a) Gabriel, Rodrigo e Henrique têm juntos 36 revistas em quadrinhos. Rodrigo tem o dobro de revistas de Gabriel e Henrique tem 12 revistas a mais que Gabriel. Quantas revistas têm cada um?

b) Clara, Guilherme e Antônio vão repartir 27 bombons de modo que Guilherme receba o dobro de bombons de Clara e Antônio receba três vezes mais bombons que Clara. Quantos bombons receberá cada uma das crianças?

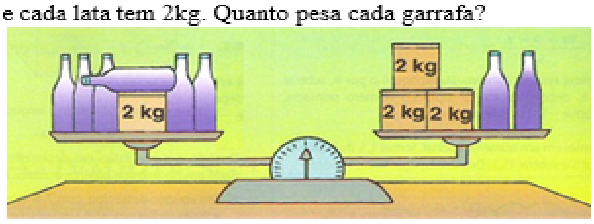
3) Um estacionamento cobra R$ 3,00 pela primeira hora. A partir da segunda hora, o valor é de R$ 2,00 por hora adicional.

a) Preencha a tabela abaixo com os valores para cada tempo de permanência:

Tempo (Horas)	1	2	3	7
Preço (R$)	3,00			

b) Quanto pagará o proprietário de um carro que esteve estacionado durante 7 horas?

4) A balança ilustrada abaixo está com os pratos em equilíbrio. Todas as garrafas têm o mesmo peso e cada lata tem 2kg. Quanto pesa cada garrafa?



Fonte: elaboração própria, a partir de Aldrini e Vasconcelos (2015)

Análise a priori dos problemas da terceira sessão de experimentação

As estratégias que previmos para análise dos problemas propostos nesta terceira sessão foram:

E1: A utilização de estimativa ou cálculo mental, através da tentativa e erro.

E2: A busca da solução utilizando cálculos explícitos, através de tentativa e erro.

E3: O estabelecimento de relações entre os dados do problema para a busca da solução.

E4: A utilização do aspecto de observação de regularidades.

E5: Uso de ostensivos para representar o problema.

O objetivo da análise a priori foi determinar como as escolhas das atividades permitiriam controlar os comportamentos dos alunos, testar e possibilitar respostas às nossas hipóteses. Analisamos as características matemáticas e didáticas dos problemas, as possíveis estratégias dos alunos para resolvê-los, a possibilidade de generalização, a explicitação de leis, o raciocínio intuitivo e dedutivo e a identificação de estruturas operatórias que poderiam influenciar na relação aluno/saber, no raciocínio algébrico e na linguagem da álgebra formal.

Os problemas propostos traziam objetos ostensivos, como quadrinhos, bolinhas, tabelas, gráficos, e esperávamos observar um pensamento algébrico que subsidiasse as primeiras ideias dos não-ostensivos incógnita e variável.

A condição que mais prevaleceu nas soluções dos problemas foi a de tratar o desconhecido como se fosse conhecido (RADFORD, 2009), numeralizando-o.

Observamos no livro didático do 6º. ano adotado pela escola uma ênfase maior nos problemas aritméticos visto que apresenta mais sequências numéricas de indução ao raciocínio aritmético e menos ao raciocínio funcional. Entendemos que há aí uma restrição imposta pelo currículo do 6º. ano, o fato dos alunos pesquisados não terem visto equação algébrica, por época da aplicação deste teste. No entanto, presumimos que nas atividades que demandavam raciocínio funcional o aluno pudesse perceber ordem, regularidade dos números, o que varia, e, intuitivamente, o conceito de variável.

Os enunciados dos problemas foram elaborados no registo da língua natural e os que apresentavam figuras em sua formulação foram classificados como linguagem icônica. Privilegiar a linguagem natural é hipótese de estudo. Assumimos que a resolução de problemas em linguagem natural e o apropriar-se da linguagem algébrica, significando-a, são fatores preponderantes à aprendizagem matemática.

Quanto ao nível de dificuldade dos problemas, classificamos como simples ou sofisticado, a depender do número de relações necessárias para solucioná-lo. A nossa premissa é que o pensamento algébrico pode surgir a partir de problemas mais simples, sem necessariamente estarem associados ao uso de ferramentas algébricas, letras, símbolos ou em linguagem distante do contexto de quem o resolve. Primamos pela indução ao raciocínio de estabelecimento de relações e conexões, como o funcional e o equacional.

Dentre as estratégias previstas, temos o maior número de problemas concentrando-se em **E1** e o menor número em **E5**, gradativamente. Identificamos que no nível em que os alunos pesquisados se encontravam, fechando um ciclo de aritmeticismo, a estratégia de tentativa é a mais comum, como pudemos verificar nas pesquisas correlatas que nos serviu de aporte teórico e metodológico para a elaboração destas estratégias.

Análise a posteriori dos problemas da terceira sessão de experimentação

Pelos pressupostos da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996) esta é a última fase e na qual efetuaremos uma análise cruzada, mais ampla, ao nível do pensamento algébrico, com o intuito de compreender as características dos alunos pesquisados frente às atividades propostas.

Nesta etapa, realizamos uma confrontação entre as análises a priori e a posteriori realizadas, ponderando pelos objetivos de pesquisa que foram traçados, como também:

_ pelas estratégias de resolução que conjecturamos nas análises a priori para os problemas dos testes de experimentação;

_ pelas condições e restrições para a existência do objeto matemático pensamento algébrico no contexto da sequência didática elaborada;

_ dos aspectos inerentes ao pensamento algébrico destacados na revisão de literatura e nas teorias de aporte elencadas;

_ pelo tipo de problema e o raciocínio matemático requerido – sequencial, funcional, de equação ou mistos, sejam aritméticos ou algébricos – de acordo os problemas experimentados;

_ pelos objetos ostensivos e outros registros de representação, como a linguagem, presentes nos problemas ou utilizados na resolução destes.

Antes, porém, vamos destacar uma visão geral dos números gerados pelas experimentações, necessários à última análise.

Foram aplicados 79 testes na terceira sessão de experimentação, sendo que 7 deles foram entregues em branco. Entrevistamos estes alunos e trazemos esta discussão nas considerações finais.

Vejamos a questão 1:

> **Questão 1:** Os números da tabela abaixo obedecem a uma sequência.
> Descubra os números que estão faltando nos quadrinhos em branco:
> a) E complete-a:

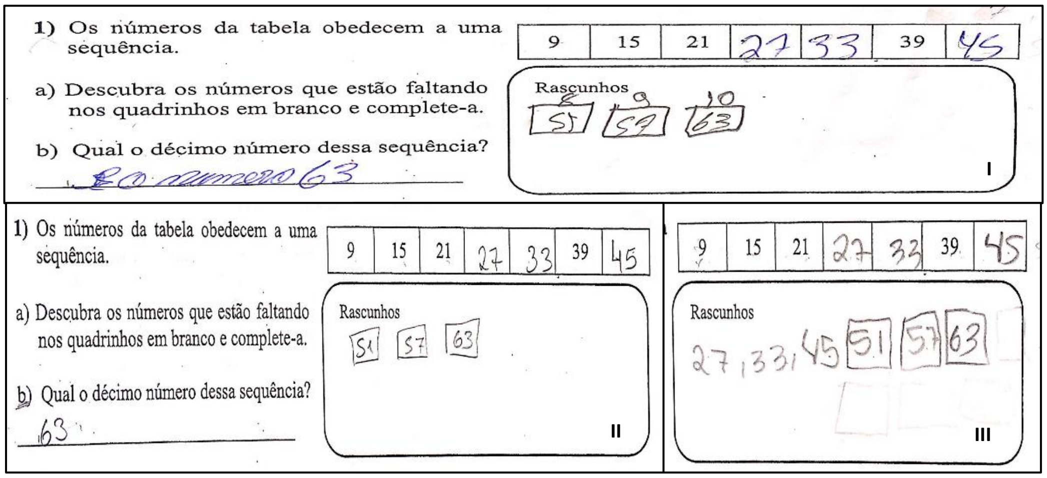
9	15	21			39	

> b) Qual o décimo número dessa sequência?

O problema apresentado na questão 1 traz um ostensivo do tipo tabela e um enunciado em linguagem natural para evocar um termo desconhecido. Trata-se de uma sequência recursiva, de natureza aditiva e crescente. Tivemos um número de acertos maior (65%) em relação aos problemas anteriores (1ª. sessão), visto que o raciocínio sequencial já foi trabalhado, aqui e em anos anteriores. Observamos também que o uso da estratégia de observação de regularidades (**E4**) foi natural e imediato nas ações dos alunos.

Como esperado, não houve dificuldade em completar a sequência pedida. Alguns alunos sentiram necessidade de continuar o traçado da tabela (**E5**), isto é, de um ostensivo visual que evocasse o termo desconhecido.

Figura 2 – Resoluções do problema 1 pelos alunos TA2 (I), TB9 (II) e TC20 (III)



Fonte: Dados da pesquisa (CAMPOS; FARIAS, 2018)

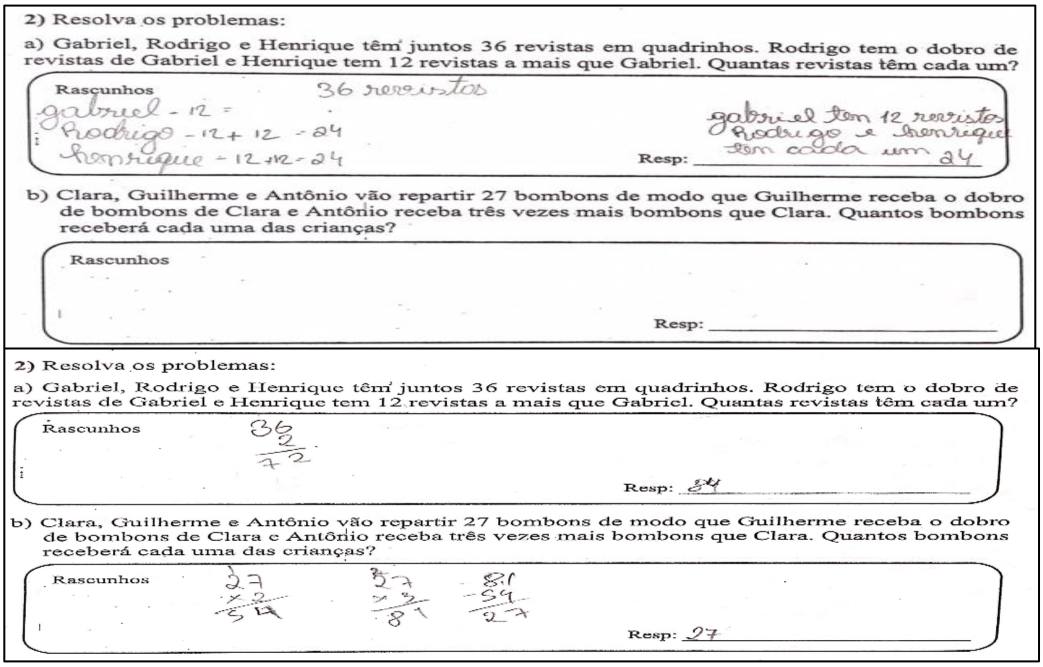
Nos protocolos apresentados na Figura 2 observamos que o processo de generalização, que elencamos ser um dos mais importantes na formação do pensamento algébrico, ainda precisa da ativação de ostensivos para a sua construção. Ao tempo em que Bosch e Chevallard (1999) afirmam que o processo de generalização exige uma ativação mínima de ostensivos, os dados nos mostraram que este é um processo que deve ser explorado nos problemas e trabalhado com os alunos na perspectiva da formação do pensamento algébrico que leva à aprendizagem.

Os problemas da questão 2, em destaque, trazem duas situações classificadas como algébricos de partilha, e se diferenciam apenas pelas relações aditivas e multiplicativas que traçam.

> **Questão 2:** Resolva os problemas:
>
> a) Gabriel, Rodrigo e Henrique têm juntos 36 revistas em quadrinhos. Rodrigo tem o dobro de revistas de Gabriel e Henrique tem 12 revistas a mais que Gabriel. Quantas revistas têm cada um?
>
> b) Clara, Guilherme e Antônio vão repartir 27 bombons de modo que Guilherme receba o dobro de bombons de Clara e Antônio receba três vezes mais bombons que Clara. Quantos bombons receberá cada uma das crianças?

Classificamos tais problemas, itens 2a e 2b, como de raciocínio sofisticado pelas relações que exigem para solucioná-los. Tivemos um baixo número de acertos (20%). No entanto foi possível verificarmos algum estabelecimento de relações e conexões (**E3**), como previmos a priori, não suficientes para solucionar o problema, mas indicativos de pensamento algébrico de tratar o desconhecido (parte) em relação ao conhecido (todo). Ilustramos esta situação com protocolos de pesquisa na Figura 3.

Figura 3 – Resoluções do problema 2 pelos alunos TA2, TC20, respect


2) Resolva os problemas:

a) Gabriel, Rodrigo e Henrique têm juntos 36 revistas em quadrinhos. Rodrigo tem o dobro de revistas de Gabriel e Henrique tem 12 revistas a mais que Gabriel. Quantas revistas têm cada um?

Rascunhos 36 revistas

gabriel - 12 =

Rodrigo - 12+ 12 - 24

henrique - 12+12 - 24

Resp: gabriel tem 12 revistas Rodrigo e henrique tem cada um 24

b) Clara, Guilherme e Antônio vão repartir 27 bombons de modo que Guilherme receba o dobro de bombons de Clara e Antônio receba três vezes mais bombons que Clara. Quantos bombons receberá cada uma das crianças?

Rascunhos

Resp:

2) Resolva os problemas:

a) Gabriel, Rodrigo e Henrique têm juntos 36 revistas em quadrinhos. Rodrigo tem o dobro de revistas de Gabriel e Henrique tem 12 revistas a mais que Gabriel. Quantas revistas têm cada um?

Rascunhos 36 2 72

Resp: 34

b) Clara, Guilherme e Antônio vão repartir 27 bombons de modo que Guilherme receba o dobro de bombons de Clara e Antônio receba três vezes mais bombons que Clara. Quantos bombons receberá cada uma das crianças?

Rascunhos 27 x2 54 27 x3 81 81 -54 27

Resp: 27

Fonte: Dados da pesquisa (CAMPOS; FARIAS, 2018)

Nos protocolos de pesquisa apresentados na Figura 3 observa-se basicamente uso de estratégias de cálculo (**E1, E2, E3**), visto que as habilidades para a resolução de problemas de partilha ainda estão num nível insipiente. Corrobora com nossa constatação o estudo de Almeida (2016) que, ao trabalhar problemas de partilha com alunos do 6º. ano, identificou que cerca de 30% dos alunos não apresentaram nenhuma característica de pensamento algébrico, e apenas 5% apresentaram as características elencadas a priori em sua pesquisa como indicadoras do desenvolvimento de pensamento algébrico.

Observamos que o nível de congruência (DUVAL, 2003) dos problemas é maior naqueles cujas relações são aditivas. Fato é que os alunos encontraram dificuldade em evocar a ideia da multiplicação associada à expressão semiótica *três vezes mais*, que aparece no item 2b, e fizeram como no item 2a em que a expressão *12 a mais que* remete a uma adição.

Não consideramos tais situações como erro operacional, e sim conceitual. O ostensivo *vezes* no registro escrito não foi suficiente para evocar o não-ostensivo ideia de multiplicação. Como também não foi o termo *mais* que soou fortemente associado à ideia de adição, mostrando assim que os conceitos não estão bem estruturados, pois não compreendem a multiplicação como uma adição. E esse foi um quadro geral nas análises dos problemas dentro dos campos aditivo e multiplicativo. Concordamos com Duval (2003) que as relações, expressões e termos dentro do campo aditivo têm maior congruência e univocidade semântica quando os registros de ida e de volta são congruentes e compreensíveis.

Assim como os problemas da questão 2, os problemas da questão 3, que segue, traz uma situação contextualizada que classificamos de linguagem simples e a resolução induz ao raciocínio de dependência funcional.

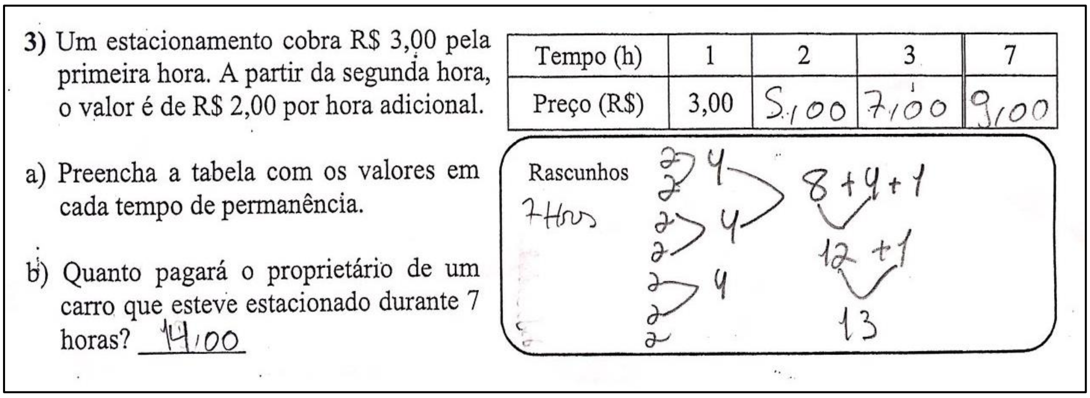
> **Questão 3:** Um estacionamento cobra R$ 3,00 pela primeira hora. A partir da segunda hora, o valor é de R$ 2,00 por hora adicional.
>
> a) Preencha a tabela abaixo com os valores para cada tempo de permanência:

Tempo (Horas)	1	2	3	7
Preço (R$)	3,00			

> b) Quanto pagará o proprietário de um carro que esteve estacionado durante 7 horas?

As primeiras estratégias de resolução observadas para estes problemas estão no campo da aritmética (**E1, E2**). E a proporcionalidade situa-se como um apoio para o raciocínio funcional, de estabelecimento de relações (**E3**), ainda que discretamente observadas. Quando o problema solicita um termo da sequência à frente (item 3b) requer então um raciocínio da generalização que o torna de raciocínio mais sofisticado. Fatos estes que levaram a um percentual de 35% de acertos neste item. Já o item 3a, que é uma sequência recursiva aditiva e de dificuldade simples, obtivemos em torno de 50% de acertos. Protocolo de resolução deste problema encontra-se na Figura 4.

Figura 4 – Resoluções do problema 3 pelo aluno TB7.



3) Um estacionamento cobra R$ 3,00 pela primeira hora. A partir da segunda hora, o valor é de R$ 2,00 por hora adicional.

a) Preencha a tabela com os valores em cada tempo de permanência.

b) Quanto pagará o proprietário de um carro que esteve estacionado durante 7 horas? 14,00

Tempo (h)	1	2	3	7
Preço (R$)	3,00	5,00	7,00	9,00

Rascunhos
7 Hors
2 2 4
2 2 4
2 2 4
2
8 + 4 + 1
12 + 1
13

Fonte: Dados da pesquisa (CAMPOS; FARIAS, 2018)

Observamos no protocolo destacado na Figura 4 que há um estabelecimento de relações e conexões com o dado *valor da hora* e a incógnita do problema *valor pago pelas sete horas*, apesar dos cálculos incorretos que levaram à resposta incorreta do problema. Outro fato observado é o quão definido é o raciocínio sequencial do aluno que preencheu a tabela, sem observar a interrupção. Estes resultados nos conduzem à ideia de que exercícios de sequência, pelo uso de operações que lhes são peculiares, são propícios ao desenvolvimento do pensamento algébrico de estabelecimento de relações e conexões.

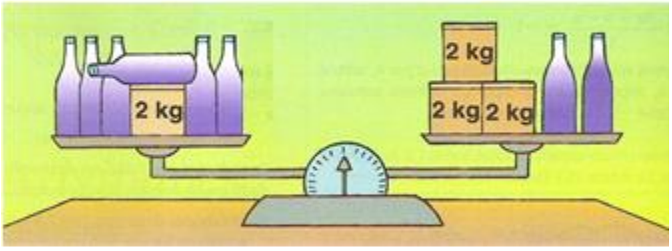
Os problemas que envolviam o raciocínio funcional simples também se mostraram favoráveis ao desenvolvimento do pensamento algébrico, a partir das estruturas aditivas neles presentes, e principalmente pela ideia de proporcionalidade embutida e que traduzia uma relação de dependência, um raciocínio funcional.

Uma forma de introduzir a noção de função tende a ser favorecida pelas estruturas que envolvem as operações aritméticas. Tal postura vai ao encontro das ideias e os estudos de Carraher e Schliemann (2007); Carraher, Martinez e Schliemann (2008), e outros; e das orientações curriculares da BNCC (BRASIL, 2017) sobre os domínios das operações aritméticas e algébricas no desenvolvimento das ideias da variabilidade presente no raciocínio funcional.

O que observamos nos resultados dos testes sugere que propor atividades aritméticas/algébricas na forma de resolução de problemas é um caminho para a aprendizagem matemática, visto que “os conteúdos fazem sentido para o aluno, que é protagonista na construção do seu próprio conhecimento” (ONUCHIC; ALLEVATO, 2015, p. 3).

E o último problema que aqui apresentamos traz o ostensivo balança, largamente utilizado nos livros didáticos, para evocar o não-ostensivo ideia de equilíbrio enquanto raciocínio equacional. Apresenta linguagem icônica, verificada por nós como uma aliada à resolução de problemas.

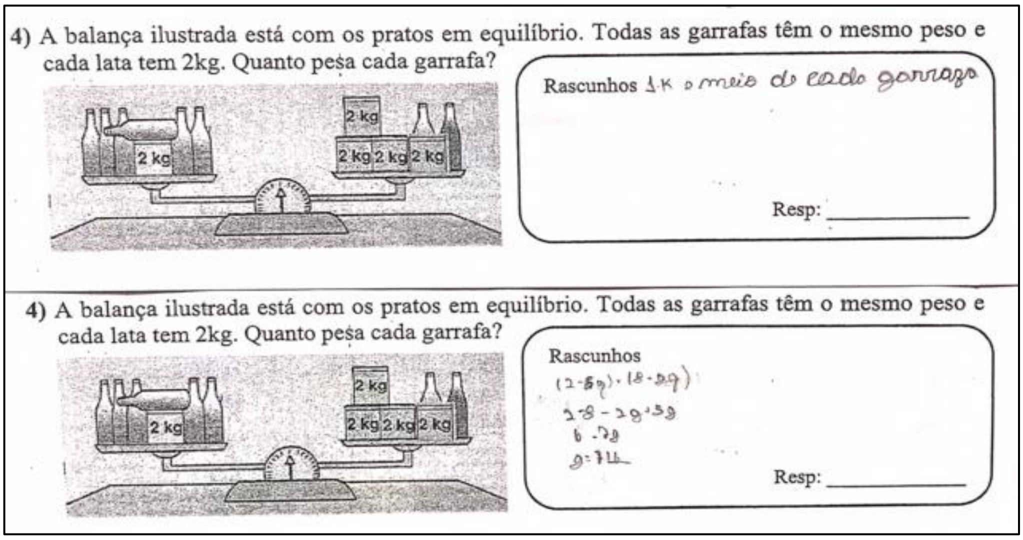
> **Questão 4:** A balança ilustrada abaixo está com os pratos em equilíbrio. Todas as garrafas têm o mesmo peso e cada lata tem 2kg. Quanto pesa cada garrafa?



Fonte: Aldrini e Vasconcelos (2015)

O principal aspecto da Álgebra envolvido nesta questão está relacionado à equivalência da igualdade. Faz-se necessário estabelecer uma equivalência entre os ostensivos da estrutura icônica e da linguagem natural do enunciado para solucionar o problema.

Figura 5 – Resoluções do problema 4 pelos alunos TA2 e TB20



Fonte: Dados da pesquisa (CAMPOS; FARIAS, 2018)

Nos protocolos de pesquisa destacados na Figura 5, podemos identificar um conhecimento do aluno, ainda que insipiente, em relação aos conceitos que envolvem uma equação. Ele identifica parcialmente a relação de equivalência que pode ser evocada a partir da balança de dois pratos e com esta visão algébrica parcial constrói uma relação de equivalência e alguma relação de igualdade. E por estratégias de cálculo mental (**E1**) chegam, inclusive, a um resultado correto, sem, no entanto, equacionar o problema.

Indagados, respondiam sempre: - *fizemos as contas professora!* Confirma-se assim habilidades operacionais de tratamento (DUVAL, 2011) apenas, e um conhecimento ainda insipiente da relação de igualdade enquanto equilíbrio.

Reiterando, nosso objetivo não era capacitar o aluno a resolver problemas. Mas sim propiciar a formação de um pensamento algébrico capaz de solucionar problemas que encontrarão na sua educação algébrica, através da capacidade de generalização. Segundo Chevallard (1999) a resolução de problemas é intrínseca à atividade matemática, como um veículo que leva à aprendizagem, e deve ser vista como uma forma de abordagem do conteúdo.

A ação didática de propor resolução de problemas visa a aprendizagem. A implementação de qualquer ação, e nenhuma ação existe no vácuo, traz mudança de comportamento, e por certo traz contribuições. Pretendíamos investigar quais e que tipo de contribuição a sequência didática pensada por nós traria à aprendizagem matemática, especificamente no desenvolvimento de um raciocínio capaz de amenizar dificuldades, rupturas e barreiras, sejam cognitivas ou epistemológicas, com esta aprendizagem. E o pensamento algébrico, enquanto uma forma especial de pensar (BRASIL, 2017), com estabelecimento de relações e conexões entre os dados de um problema que levam à significação (BRASIL, 1988), à abstração e à generalização (RADFORD, 2009) do saber aprendido, constituiu o foco da nossa investigação.

Considerações finais

Considerando a experimentação analisada, que configura uma intervenção didática pelos momentos de troca com os alunos pesquisados, verificamos que houve ganho de entendimento. E este ganho configura-se aprendizagem, pela perspectiva qualitativa adotada na pesquisa e pelos resultados obtidos mostrarem-se alinhados com outras pesquisas que apontam o potencial de aprendizagem a partir de intervenções intencionalmente planejadas.

Analisamos o uso de ostensivos na atividade matemática como facilitador da aprendizagem. Bosch e Chevallard (1999) discutem que as dificuldades na utilização dos ostensivos de representação dos objetos matemáticos está na relação não tão direta e natural entre o sistema de leitura e a escrita, ou seja, na atividade de conversão (DUVAL, 2003). E não sendo esta relação tão óbvia, as técnicas que dependem destes ostensivos necessitam ser justificadas (CHEVALLARD, 1999). Isso conduz à expectativa de que os não-ostensivos associados aos objetos matemáticos sejam construídos à medida em que as atividades são realizadas, pelo próprio aluno, em um processo de construção da sua independência em pensar.

Nosso estudo revelou que a construção do pensar, e então do pensamento algébrico, deve ser um processo gradual, autônomo e sistemático, tal como argumenta Radford (2009), passando pelos problemas aritméticos até chegar aos problemas algébricos. E nessa passagem processual dos não-ostensivos da aritmética para os da álgebra, reside o desenvolvimento do pensamento algébrico.

E diante das leituras, das experimentações que produziram os dados, das vivências em sala de aula, das observações e percepções, trouxemos à tona as premissas iniciais deste estudo. Os dados nos mostraram que (I) usar a resolução de problemas para a introdução de conceitos matemáticos, em especial os algébricos, através de situações que possam desenvolver o pensamento algébrico contribui para a aprendizagem matemática. Foram situações de raciocínio funcional, sequencial e de equação que possibilitaram este avanço, que identificamos de uma sessão à outra, no acompanhamento dos alunos, nas entrevistas e observações. Não podemos garantir a difusão ou a manutenção deste conhecimento, no entanto, as observações na passagem de uma sessão à outra nos permitiram detectar ganhos cognitivos dos alunos nas tarefas similares que propusemos.

Os resultados apontaram que propor atividades aritméticas e algébricas na forma de resolução de problemas em linguagem natural é um caminho para o desenvolvimento do pensamento algébrico, pelas relações e conexões necessárias para solucioná-los. Como também, que o uso da linguagem natural e de situações contextualizadas nos problemas matemáticos aproxima o aluno de sua realidade, do que lhe é próximo, útil e prazeroso, além de desmistificar a ideia de uma disciplina de difícil aprendizagem.

Assim, a linguagem se mostrou fator essencial à construção do saber matemático, da aprendizagem. A capacidade de manipulá-la é o ápice do desenvolvimento do pensamento algébrico, como de qualquer conhecimento. E por ser um recurso semiótico que permite a inter-relação com os demais saberes e estar diretamente ligada à proposição de atividades em situação contextualizada, a linguagem permitiu a comunicação dos resultados. E o domínio das diferentes formas de linguagem pode levar o aluno a aprender o que aparentemente não sabe (CARRAHER; SCHLIEMANN, 2007), como tratar o desconhecido como se fosse conhecido (RADFORD, 2009), um dos pilares do desenvolvimento do pensamento algébrico, construindo assim uma aprendizagem significativa e duradoura.

Dessa forma é fato que (II) o aluno do 6º. ano, que teve pouco ou nenhum contato com a álgebra formal e sua linguagem, pela adequação à orientação curricular que rege o ensino brasileiro consegue significar os objetos matemáticos dos problemas, apropriar-se da linguagem e significar o desconhecido a partir das relações e conexões que estabelece.

Por significação entendemos compreensão e esta leva à aprendizagem. Como colocam Da Rocha Falcão (1993) e Lins (2012), é através da significação que se constitui a aprendizagem algébrica. E acrescentamos, pela capacidade de generalização que lhe é sinônimo constitui a própria aprendizagem matemática. Trata de inserir o aluno no contexto dos problemas que levam ao desenvolvimento do pensamento algébrico o quanto antes, como propõe o Early Algebra, não primando pelos conteúdos algébricos apenas, mas pelo pensamento de relações e conexões que podem promover essa generalização do pensamento, a partir da significação dos problemas e assim desenvolver o pensamento algébrico (KAPUT, 1999; CARRAHER; SCHLIEMANN, 2007; KIERAN, 2007 apud ALMEIDA, 2016).

Como dissemos, não podemos garantir a manutenção da aprendizagem, mas sua própria natureza e solidez são indicativos dessa manutenção. Assim, (III) inserir o aluno no contexto de situações que são limiares entre a aritmética e a álgebra, desmistificando fenômenos de aritmeticismo ou algebrismo, pode contribuir para a aprendizagem algébrica futura. Nessa discussão defendemos os pressupostos do movimento Early Algebra que, em consonância com as inovações curriculares que estão sendo implantadas no nível de Ensino Fundamental pela BNCC (BRASIL, 2017), traz em sua natureza elementos caracterizadores e constitutivos do pensamento algébrico e o coloca numa posição de destaque na aprendizagem matemática. Ambos preveem a introdução do pensamento algébrico a partir de noções algébricas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental como forma de promover a aprendizagem e sua manutenção.

Pela proposta da BNCC (BRASIL, 2017) a álgebra trará as ideias de equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade como base para a formação do pensamento algébrico. Essas noções conceituais deverão ser enfatizadas a partir do estabelecimento de generalizações, da análise de interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações (BRASIL 2017). Este é um item que trouxemos à discussão, bem pontual na aprendizagem algébrica, por considerarmos válido, sem, no entanto, adentrarmos na discussão maior sobre a implantação da Base.

E para responder ao nosso questionamento inicial partimos do princípio de que a sequência didática proposta trouxe contribuições para o desenvolvimento do pensamento algébrico, com o conhecimento advindo dela, como toda e qualquer ação didática pensada e sistematizada para este fim.

Propusemo-nos analisar as condições e restrições para que a sequência pudesse ser implementada no 6º. ano, não como um modelo de ensino, mas como uma proposta pensada para o desenvolvimento do pensamento algébrico. E entendemos que é preciso idealizar um ensino que valoriza os saberes, o contexto, as relações, a significação e o caminho percorrido no desenvolvimento do pensamento algébrico.

É fato que "o aluno é agente da construção do seu conhecimento, pelas conexões que estabelece com seu conhecimento prévio num contexto de resolução de problemas" (BRASIL, 1988, p. 37). Assim, as principais contribuições da sequência didática que elaboramos reside no diferencial de trabalhar com resolução de problemas em linguagem natural, que privilegia o desenvolvimento do pensamento algébrico pelas relações e conexões que exigem no seu processo de resolução.

Observamos que existe uma restrição imposta pelos documentos curriculares que rege o ensino de matemática no nível fundamental, que traduz uma separação entre aritmética e álgebra nos currículos, especificamente do 6º. para o 7º. ano. Essa separação trouxe rupturas (DA ROCHA FALCÃO, 1993) no ensino de Matemática e se tornou um dos fatores geradores das dificuldades de aprendizagem algébrica no 7º. ano. Estudos como o nosso, que situaram no 6º. ano, limiar entre a aritmética e a álgebra escolar do 7º. ano, com sua linguagem própria de símbolos e letras, buscaram soluções para este entrave, tanto no campo epistemológico como cognitivo.

Essa passagem da aritmética à álgebra, segundo Chevallard (1991), se torna possível e mais branda com o estabelecimento de uma relação pessoal satisfatória dos estudantes com as ferramentas da aritmética que são disponibilizadas em seus repertórios conceituais e que lhes permitem manipular os ostensivos associados aos não-ostensivos a eles relacionados. E essa interação se faz através da memória e da linguagem.

As condições para que a sequência planejada pudesse ser implementada no 6º. ano situam tanto no campo curricular quanto no campo conceitual. A sequência foi pensada com problemas envolvendo Números Naturais, no entanto, poderia ser qualquer conteúdo matemático, ou situação, que envolva o pensar.

As atividades propostas foram de natureza diagnóstica e os dados produzidos indicaram que a relação com o aspecto da igualdade enquanto equivalência, da relação de dependência enquanto raciocínio funcional e de sequência como generalização de padrões não está estabelecido de forma satisfatória. Há necessidade de uma reflexão dos alunos sobre as anotações por eles desenvolvidas, basicamente estratégias de cálculo, uma vez que parecem não compreender o significado das anotações realizadas.

De acordo com Chevallard (1994) as relações pessoais dos estudantes com o saber são culturalmente construídas, mediadas pelas relações institucionais impostas a eles por instituições a que eles se submetem. E estas restrições podem vir da escola, das diretrizes curriculares, do livro didático, dos manuais de ensino.

Não estamos falando de transferir responsabilidades ao professor, às instituições ou aos órgãos regulamentadores, tampouco propor modelos a se seguir. Estes são falíveis, não se encaixam em todos os contextos, não preveem as especificidades dos alunos, generalizam ou uniformizam pessoas. Falamos de estratégias didáticas e de resolução que amenizem as rupturas dessa passagem da aritmética à álgebra, ou de chegada de um novo conhecimento, que possibilitem então o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Referências

ALDRINI, A.; VASCONCELOS, M. J. **Praticando Matemática.** 6º. Ano. Editora do Brasil: São Paulo, 2015.

ALMEIDA, J. R. **Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico: um modelo para os problemas de partilha de quantidade**. 2016.Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica). Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

ALMOULOUD, S. Fundamentos norteadores das teorias da Educação Matemática: perspectivas e diversidade. **Amazônia - Revista de Educação em Ciências e Matemática,** Pará, v.13, n. 27, 2017, p. 05-35.

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. (org.) **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996, p. 193-217.

BESSOT, A. Panorama del quadro teorico della didattica matematica in Francia**. L'educazione matematica,** Italie, Anno XV, Serie IV, v.1, n.1, 1994.

BLANTON, M.; KAPUT, J. **Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning**. Journal for Research in Mathematics Education, v. 5, n. 36, 2005, p. 412-446.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

BOSH, M., CHEVALLARD, Y**.** La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'estude et problematique. **Recherches em Didactique des Mathématiques.** Grenoble: La Pensé Sauvage-Éditions, v. 19, n. 1, 1999, p. 77-124.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª Séries) Matemática**. Brasília, DF: 1998.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Base Nacional Curricular Comum para o Ensino Fundamental (versão final)**. Brasília, DF: 2017.

CAMPOS, M. A. **Construindo significados para o x do problema.** 2015. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus.

CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D. Early algebra and algebraic reasoning. In: LESTER, F. (Ed.). **Second handbook of mathematics teaching and learning**. Greenwich: Information Age Publishing, 2007, p. 669-705.

CARRAHER, D. W.; MARTINEZ, M. V.; SCHLIEMANN, A. D **Early algebra and mathematical generalization.** ZDM – The International Journal on Mathematics Education, v. 40, p. 3-22, 2008.

CHEVALLARD, Y. **La Transposicion Didactica: Del saber sabio al saber enseñado**. Argentina: La Pensée Sauvage, 1991.

______. Les processus de transposition didactique et leur théorisation. In: ARSAC, G. et al. **La transposition didactique à l'épreuve**. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1994.

______. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. **Recherche en Didactique des Mathématiques**, v. 19, n. 2, 1999, p. 221-266.

______ . Organiser l'étude. Ecologie & regulation. **Actes de la École d'Éte de Didactique des Mathématiques.** France: La Pensée Sauvage, 2002, p. 41-55.

CHEVALLARD, Y. BOSCH, M. GASCÓN, J. **Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem**. Tradução: Daisy Vaz de Moraes, Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

DA ROCHA FALCÃO, J. T. A álgebra como ferramenta de representação e resolução de problemas. In; SCHILLIEMAN, A. D. et al. (Org.). **Estudos em Psicologia da Educação Matemática.** Recife: Ed. Universitária da UFPE, 1993.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.) **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papirus, 2003, p.11-33.

______ . **Semiósis e pensamento humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais** (Fascículo I). Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

______ . Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas. Organização Tânia M. M. Campos. Tradução Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

HENRIQUES, A.; ALMOULOUD, S. A. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do *software* Maple. **Ciência e Educação**. v. 22, n. 2, 2016, p. 465-487.

KAPUT, J. Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K–12 curriculum. In: FENNELL, S. (Ed.). **The nature and role of algebra in the K–14 curriculum: Proceedings of a national symposium**. Washington, DC: National Research Council, National Academy Press, 1998, p. 25-26.

______ . Teaching and learning a new algebra. In: FENNEMA, E; ROMBERG, T.A. (Eds.). **Mathematics classrooms that promote understanding.** Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum. 1999.

______ . **Teaching and learning a new algebra with understanding**. National Center for Improving Student learning & Achievement in Mathematics & Science, 2000.

LINS, R. C. O Modelo dos Campos Semânticos: estabelecimentos e notas de teorizações. In: ANGELO, C. L. et. al. (Ogs) **Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática**. São Paulo: Midiograf, 2012.

ONUCHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G. Proporcionalidade através da Resolução de Problemas no Curso Superior de Licenciatura em Matemática. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., 2015, Pirenópolis. ***Anais***... Goiânia: UFG, 2015.

RADFORD, L. Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In: North America Conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education – PME. Bergen University College. v. 1, 2006.

______ . Signs, gestures, meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. In: SIXTH CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION. **Anais…** Lyon – França, 2009.

Texto recebido: 25/08/2019
Texto aprovado: 23/11/2019