

O Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA): mapeamento de algumas de suas produções

The Research Group in Algebraic Education (GEPA): the mapping of a number of its productions

BARBARA LUTAIF BIANCHINI¹

GABRIEL LOUREIRO DE LIMA²

SILVIA DIAS ALCÂNTARA MACHADO³

Resumo

O objetivo, neste artigo é, com base em dissertações e teses defendidas por membros do Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA), de 2003 a 2018, mapear alguns aspectos dessas produções, tais como, conteúdo matemático, objetivo, tipo de produção (dissertação ou tese), nível de ensino, sujeitos (no caso de pesquisas experimentais) e documentos analisados. O corpus inicial da investigação constitui-se de 93 dissertações e 18 teses, mas, neste estudo, como nos detivemos às produções relativas aos cinco conteúdos matemáticos mais explorados, quais sejam, Números e Operações, Generalização de Padrões, Função, Álgebra Linear e Equações, analisamos 62 produções, 54 dissertações e oito teses. Por meio do exame realizado, notamos uma diversidade de temas ou conteúdos matemáticos explorados pelos pesquisadores do GPEA, o que indica a permeabilidade da Álgebra em diferentes campos da Matemática. A análise revela, entre outros aspectos, que, em relação às pesquisas experimentais, há demanda por mais investigações que estabeleçam relação entre os processos de ensino e de aprendizagem dos conteúdos matemáticos anteriormente citados e a utilização de Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação. Quanto às pesquisas documentais, há necessidade de investigações que considerem uma maior diversidade de materiais, além de livros didáticos, dissertações e teses, para a produção de dados.

Palavras-chave: Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica; Mapeamento; Dissertações; Teses.

Abstract

Based on dissertations and theses produced by members of the Research Group in Algebraic Education (GEPA), the objective of this article is to map some aspects of these productions, such as: mathematical content, objective, type of production (dissertation or thesis), level of education, subjects (in the case of experimental studies) or analyzed documents. The initial corpus of investigation is constituted by 93 dissertations and 18 theses, but in this article, as we worked on productions related to

¹ Doutora em Educação: Psicologia, PUC-SP, departamento de Matemática, barbara@pucsp.br

² Doutor em Educação Matemática, PUC-SP, departamento de Matemática, gllima@pucsp.br

³ Doutora em Matemática: sem vínculo, silvia.puc.dam@gmail.com

the five mathematical contents most explored: Numbers and Operations, Generalization of Patterns, Function, Linear Algebra and Equations, we analyzed 62 productions, of which 54 were dissertations and eight were theses. Based on the study held, we noted that a diversity of themes and mathematical contents were explored by the researchers of GPEA, indicating the permeability of Algebra em different fields of Mathematics. Regarding experimental studies, the analysis reveals, among other aspects, that there is a demand for more investigations related to the processes of the learning and teaching of the mathematical contents previously mentioned and the use of Digital Technologies of Information and Communication. For the documental studies, investigations considering a wider diversity of materials, beyond workbooks, dissertations and theses are required to produce data.

Keywords: *Research Group in Algebraic Education, Mapping, Dissertations, Theses.*

Introdução

Em 2019, durante a defesa de uma tese de doutorado de um membro do *Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica* (GPEA), um dos examinadores, o professor doutor Francisco César Polcino Milies⁴, indicou-nos a importância de sintetizar os resultados das pesquisas sobre Educação Algébrica obtidos pelo Grupo desde seu início em 2003. Isso nos inspirou a realizar a investigação aqui apresentada, cujo objetivo é, com base em dissertações e teses defendidas por membros do GPEA, de 2003 a 2018, mapear alguns elementos presentes nessas produções, a saber: conteúdo matemático em foco, objetivo, tipo de produção (dissertação ou tese), nível de ensino, sujeitos (no caso de pesquisas experimentais) e documentos analisados.

Nossa intenção ao realizar esse mapeamento, conforme metodologia de Fiorentini, Passos e Lima (2016), é evidenciar à comunidade de Educação Matemática interessada em questões relacionadas ao ensino e à aprendizagem de Álgebra, bem como aos próprios membros do GPEA, os temas mais explorados nas investigações, aqueles que demandam novos estudos e, especialmente, lacunas existentes e caminhos ainda não percorridos que podem indicar direções para pesquisas futuras relativas à Educação Algébrica. Além disso, trabalhos como o aqui apresentado, que certamente terá continuidade por meio do mapeamento de outros elementos por parte do Grupo, oferecem aos educadores matemáticos sínteses e inventários de posicionamentos, quadros de referências e concepções do GPEA acerca do ensino e da aprendizagem de Álgebra.

⁴ Professor titular do Departamento de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Antes de efetivamente apresentar o mapeamento realizado, discorreremos sobre o histórico do GPEA e sobre os projetos de pesquisa desenvolvidos, assim como aqueles em andamento no âmbito do Grupo; posteriormente, explicitamos a metodologia empregada nesta investigação.

Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica: suas origens e projetos de pesquisa

O GPEA constituiu-se como Grupo de Pesquisa, vinculado ao Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), em 2003. Inicialmente, seus membros eram os seguintes professores: Silvia Dias Alcântara Machado, Maria Cristina de Souza Albuquerque Maranhão, Sonia Pitta Coelho, Leila Zardo Puga e Barbara Lutaif Bianchini que, na ocasião, orientavam pesquisas voltadas ao ensino e à aprendizagem de Álgebra nos diferentes níveis de ensino.

Ao longo dos 16 anos de atividades do Grupo, foram desenvolvidos 20 projetos de pesquisa, considerando-se os finalizados e os em andamento, cujos títulos, tempo de duração e objetivos são apresentados no Quadro 1.

Quadro 1 – Projetos de pesquisa finalizados ou em andamento no âmbito do GPEA

Título do Projeto	Período de Realização	Objetivo
Sobre o desenvolvimento da noção de base de um espaço vetorial	2002 - 2006	Investigar como abordar o objeto matemático base de um espaço vetorial, de modo a propiciar sua compreensão pelo aluno ingressante no Ensino Superior.
O Teorema Fundamental da Aritmética e o cotidiano escolar	2002 - 2005	Investigar aspectos procedimentais e conceituais mobilizados por estudantes e por professores de Matemática em situações-problema envolvendo o Teorema Fundamental da Aritmética.
Qual a Álgebra a ser ensinada na formação de professores que ensinam Matemática?	2003 - 2008	Buscar resposta à questão que dá nome ao projeto por meio da investigação do ensino de Álgebra nos diferentes níveis educacionais: infantil, básico, universitário e pós-universitário.
O que se entende por Álgebra do ponto de vista curricular e didático?	2003 - 2009	Investigar o que se entende por Álgebra nos planos institucional, docente e discente.
A Teoria Elementar dos Números no Ensino Básico e na Licenciatura	2003 - 2010	Investigar o estatuto que a Teoria Elementar dos Números tem nos campos institucional, docente e discente.
O uso de <i>software</i> em pesquisa qualitativa na	2005 - 2006	Investigar o uso do <i>software</i> Aplusix (original em francês) nos processos de ensino e de

área de Álgebra		aprendizagem de Álgebra.
Sobre observação e generalização de padrões: uma atividade transversal	2005 - 2010	Investigar o estatuto da observação de regularidades e generalização de padrões nos níveis institucional, docente e discente.
Concepções acerca de relações	2006 - 2009	Investigar concepções de estudantes e professores de Matemática acerca de relações algébricas.
Expressões, equações e inequações: pesquisa, ensino e aprendizagem	2006 - 2010	Caracterizar o ensino e a aprendizagem de expressões, equações e inequações no Brasil.
Em busca de situações propícias para a aprendizagem de conceitos básicos de Álgebra Linear	2007 - 2014	Investigar o ensino e a aprendizagem de Álgebra Linear em cursos de Ciências Exatas e afins, tais como: Matemática, Física, Ciência da Computação, Engenharia, entre outros. etc.
A aprendizagem de Álgebra com a utilização de ferramentas tecnológicas	2008 - 2013	Investigar, na Educação Algébrica, o papel da tecnologia e avaliar seu impacto na Educação Básica, bem como seus efeitos nos campos institucional, docente e discente.
Teoria Elementar dos Números na Educação Básica	2010 - 2011	Investigar o ensino e a aprendizagem de conceitos da Teoria Elementar do Números na Educação Básica nos planos curricular, didático e cognitivo.
Contribuições a materiais de orientação à docência da Educação Básica	2010 - 2014	Fornecer contribuições sustentadas em modelos teóricos acerca da formação e desenvolvimento do pensamento proporcional e do pensamento algébrico a materiais de orientação à docência na Educação Básica.
Funções do ponto de vista cognitivo e didático	2010 - 2013	Investigar o ensino e a aprendizagem de funções na Escola Básica.
Pesquisas documentais relativas a articulações com a Álgebra: influências na Educação Básica	2010 - 2013	Realizar pesquisa documental sobre conteúdos considerados basilares ao ensino e à aprendizagem de Álgebra, contemplada em sua interação com diversos campos intra e extramatemáticos, que influenciam a Educação Básica, nos vários segmentos de ensino.
Educação Algébrica e o uso de tecnologias	2010 - 2014	Investigar os conhecimentos sobre Álgebra por parte de alunos e professores em formação inicial e continuada, por simulação, conhecimentos esses construídos pelos sujeitos com o auxílio de tecnologias.
Álgebra do ponto de vista epistemológico e didático	2011 - 2016	Investigar a Álgebra do ponto de vista epistemológico e didático nos planos institucional, acadêmico e histórico-epistemológico por meio de metanálises e panoramas sobre objetos do saber.
Educação Matemática em cursos de serviço	A partir de 2014 (em andamento)	Investigar o ensino e a aprendizagem de tópicos algébricos em cursos de serviço.
A Álgebra na Educação Básica	A partir de 2014 (em andamento)	Investigar a Álgebra do ponto de vista do ensino e da aprendizagem no âmbito da Educação Básica, focalizando concepções e conhecimentos do aluno e do professor de Matemática, este tanto em formação inicial quanto em formação continuada.

Aportes da Didática à formação do professor que ensina Matemática	A partir de 2014 (em andamento)	Investigar, com base no aporte da Didática, questões fundamentais, especialmente aquelas vinculadas à Álgebra, associadas à formação do professor, tanto inicial quanto continuada.
---	---------------------------------	---

Fonte: elaborado pelos autores com base em dados extraídos dos currículos Lattes dos pesquisadores que compõem ou já compuseram o GPEA.

Por meio do Quadro 1, podemos perceber que os projetos de pesquisa já finalizados e os ainda em andamento são abrangentes, tanto em relação às temáticas, quanto em relação aos níveis de ensino aos quais seus focos estão voltados, da Educação Básica até o pós-universitário, englobando também reflexões acerca da formação de professores e do ensino e da aprendizagem de Álgebra em cursos nos quais a Matemática está a serviço. Nos diferentes projetos, são abordados objetos específicos da Álgebra, como relações algébricas, expressões algébricas, equações, inequações, função, Teorema Fundamental da Aritmética e base de um espaço vetorial. Em relação às diferentes subáreas da Álgebra, duas ganham especial destaque nos projetos: Teoria Elementar dos Números e Álgebra Linear.

Existem projetos cujas questões diretrizes, por serem mais abrangentes, têm fundamentado as reflexões estabelecidas no âmbito de outros projetos. Entre tais questões, podemos citar: Qual Álgebra deve ser ensinada na formação do professor de Matemática? O que se entende por Álgebra do ponto de vista curricular e didático? E do ponto de vista epistemológico? E do ponto de vista do ensino e da aprendizagem na Educação Básica? Da mesma forma, para subsidiar outros estudos realizados no Grupo, procedeu-se à investigação, por meio de pesquisas documentais, de conteúdos basilares no ensino e na aprendizagem de Álgebra.

Além disso, buscou-se implementar estudos que pudessem contribuir para o aperfeiçoamento de materiais de orientação à docência na Educação Básica, os quais incluem o Caderno do Professor da Rede Pública Estadual de São Paulo e livros didáticos. A construção de conhecimentos de Álgebra, por parte de alunos e professores, com auxílio de tecnologias, também foi objeto de pesquisas de membros do Grupo, bem como o estatuto de atividade transversal da observação de regularidades e generalização de padrões.

Após esse breve panorama dos projetos de pesquisa já realizados ou em andamento no GPEA, na seção seguinte, tratamos da metodologia empregada na realização do estudo relatado neste artigo.

Metodologia

Do ponto de vista metodológico, a investigação que originou este artigo abrange preceitos de uma pesquisa caracterizada como *mapeamento* que, segundo Fiorentini, Passos e Lima (2016, p. 18), diferencia-se da modalidade estado da arte por ter como foco “mais os aspectos descritivos de um campo de estudo do que seus resultados”. Nesse sentido, novamente em consonância com as ideias dos autores supracitados,

[...] entendemos o mapeamento da pesquisa como um processo sistemático de levantamento e descrição de informações acerca das pesquisas produzidas sobre um campo específico de estudo, abrangendo um determinado espaço (lugar) e período de tempo. Essas informações dizem respeito aos aspectos físicos dessa produção (descrevendo onde, quando e quantos estudos foram produzidos ao longo do período e quem foram os autores e participantes dessa produção), bem como aos seus aspectos teórico-metodológicos e temáticos (FIORENTINI; PASSOS; LIMA, 2016, p. 18).

Respeitando os pressupostos da metodologia empregada, neste artigo, não descrevemos os resultados obtidos nas dissertações e teses desenvolvidas pelos membros do GPEA, mas elementos específicos abordados, quais sejam, conteúdo matemático, objetivo, tipo de produção (dissertação ou tese), nível de ensino, sujeitos (no caso de pesquisas experimentais) e documentos analisados. O *corpus* inicial da investigação, composto por 111 trabalhos, constituiu-se de 93 dissertações e 18 teses. Destacamos que o número de dissertações é maior que o de teses por conta do funcionamento concomitante, no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, durante alguns anos, do Mestrado Acadêmico e do Mestrado Profissional, e este último atraiu quantidade significativa de professores. As dissertações e teses produzidas pelo GPEA desde sua criação foram orientadas por docentes que são ou já foram membros do Grupo, a saber, Silvia Dias Alcântara Machado, Maria Cristina de Souza Albuquerque Maranhão, Sonia Pitta Coelho, Barbara Lutaif Bianchini, Leila Zardo Puga e Gabriel Loureiro de Lima. Todos os professores têm graduação e mestrado em Matemática; três têm doutorado na mesma área (Silvia, Sonia e Leila), duas, em Psicologia da Educação (Barbara e Maria Cristina), e um, em Educação Matemática (Gabriel). A formação acadêmica desses docentes tem influência direta no fato de as produções do GPEA, na abordagem das temáticas investigadas, caracterizarem-se pelo viés matemático, e não apenas pela perspectiva da área da Educação.

Depois de identificados os trabalhos a serem analisados, o que foi feito por meio dos currículos Lattes dos professores orientadores, acessamos cada uma das dissertações e

teses selecionadas na biblioteca digital da PUC-SP⁵ e elaboramos o Quadro 2, que traz ano de publicação do trabalho, autor, título e objetivo, e o Quadro 3, em que explicitamos o tema ou o conteúdo matemático, o objetivo, o tipo de produção (mestrado ou doutorado), se a pesquisa se caracteriza como experimental ou documental e o nível de ensino no qual a investigação foi realizada. Em relação a este aspecto, ressaltamos que utilizamos a nomenclatura atualmente em vigor no Brasil, a saber: Educação Infantil (alunos de 0 a 5 anos), Ensino Fundamental (subdividido em anos iniciais (do 1º ao 5º ano - alunos de 6 a 10 anos) e anos finais (do 6º ao 9º ano - alunos de 11 a 14 anos)), Ensino Médio (do 1º ao 3º ano - alunos de 15 a 17 anos), Ensino Superior, Pós-Graduação *Lato Sensu* (especialização) e Pós-Graduação *Stricto Sensu* (mestrado e doutorado).

Em um primeiro momento, organizamos a análise dos dados considerando o conteúdo matemático focado nas dissertações e teses que compunham o *corpus* inicial. No Quadro 2, apresentamos a relação dos temas ou conteúdos matemáticos contemplados, bem como o número de pesquisas nos quais eles estão presentes.

Por meio dos dados constantes nesse quadro, notamos, em primeiro lugar, a amplitude de temas ou conteúdos matemáticos aos quais os integrantes do GPEA têm direcionado suas investigações. Essa diversidade evidencia que reflexões acerca de questões de Álgebra permeiam as diferentes áreas da Matemática e lhes são fundamentais. Além disso, as informações revelam que os cinco conteúdos matemáticos mais explorados nas pesquisas analisadas são, respectivamente, Números e Operações; Generalização de Padrões; Função; Álgebra Linear e Equações. Dada essa constatação, optamos por analisar detalhadamente as investigações referentes a esses conteúdos.

Quadro 2 – Temas ou conteúdos matemáticos enfocados nas dissertações e teses analisadas

Tema ou Conteúdo Matemático	Dissertações	Teses	Total
Números e Operações	19	3	22
Generalização de Padrões	11	1	12
Função	10	0	10
Álgebra Linear	6	3	9
Equações	8	1	9
Inequações e Desigualdades	7	1	8
Pensamento Algébrico	5	1	6
Razão, Proporção e Pensamento Proporcional	5	0	5
Matrizes e Sistemas Lineares	4	0	4
Sem conteúdo matemático específico	3	1	4

⁵ Todas as dissertações e teses defendidas no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, incluindo as produções do GPEA (para localizá-las, pode-se inserir um filtro de busca considerando-se os nomes dos orientadores), estão disponíveis em <<https://sapientia.pucsp.br/>>.

Geometria Analítica	1	2	3
Teoria dos Números	2	1	3
Usos da Variável	3	0	3
Equações Diofantinas	3	0	3
Função, Limite, Derivada e Integral	0	1	1
Porcentagem e Regra de Três	1	0	1
Educação Algébrica	0	1	1
Alfabetização Matemática	0	1	1
Sequências Numéricas	1	0	1
Produtos Notáveis	1	0	1
Distribuição de Probabilidade Exponencial	1	0	1
Algoritmos	0	1	1
Aritmética	1	0	1
Trigonometria	1	0	1
TOTAIS	93	18	111

Fonte: elaborado pelos autores com base em dados da pesquisa.

Ao recortarmos os cinco conteúdos matemáticos mais explorados, o *corpus* foi reduzido a 62 trabalhos, 54 dissertações e 8 teses. Especificamente no caso dessas produções, destacamos, quando houver, os subtemas tratados em cada um dos conteúdos matemáticos mais abordados, explicitando os números de dissertações e teses referentes a eles e, posteriormente, refinamos nossa análise mediante categorização das pesquisas em experimentais ou documentais; para as da primeira categoria, apresentamos subtema (quando houver), objetivo, tipo de produção (dissertação ou tese) e sujeitos, para as da segunda categoria, apresentamos subtema (quando houver), objetivo, tipo de produção (dissertação ou tese) e documento(s) analisado(s). Passamos, então, à apresentação e à análise dos dados.

Apresentação e Análise dos Dados

Em primeiro lugar, destacamos, em relação aos cinco temas privilegiados nas pesquisas desenvolvidas no âmbito do GPEA, a predominância no número de dissertações em relação ao número de teses.

Relativamente ao conteúdo *Números e Operações*, os dados apresentados no Quadro 3 evidenciam, por um lado, a ausência de pesquisas voltadas para o estudo dos números reais e complexos; por outro lado, evidenciam a prevalência dos subtemas Divisibilidade em \mathbb{N} e Números Racionais. No entanto, não foi produzida nenhuma tese a respeito dessas temáticas. Em contrapartida, em relação aos números naturais há apenas teses de doutorado. O subtema *Campo Multiplicativo e Conceito de Multiplicação* foi o único explorado de maneira equânime em dissertações e teses.

Notamos como possibilidade para investigações futuras a questão das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação associadas aos processos de ensino e de aprendizagem de Números e Operações, uma vez que apenas duas pesquisas (aquelas relacionadas aos subtemas Números e Tecnologia e Uso de Calculadora e Jogos Matemáticos) estão diretamente vinculadas a esse aspecto.

Quadro 3 – Dissertações e teses sobre o conteúdo Números e Operações

Conteúdo Matemático	Subtema	Dissertações	Teses	Total
Números e Operações	Divisibilidade em \mathbb{N}	5	0	5
	Números Racionais	4	0	4
	Número Zero	2	0	2
	Números Naturais	0	2	2
	Campo Multiplicativo e Conceito de Multiplicação	1	1	2
	Operações em \mathbb{N} com tecnologias não usuais	1	0	1
	Números Inteiros	1	0	1
	Divisibilidade em \mathbb{Z}	1	0	1
	Números e Operações nos PCN	1	0	1
	Números e Tecnologia	1	0	1
	Sistema de Numeração Decimal	1	0	1
	Uso de Calculadora e Jogos Matemáticos	1	0	1
TOTAIS		19	3	22

Fonte: elaborado pelos autores com base em dados da pesquisa.

Em relação aos estudos de caráter experimental, como ratificam as informações constantes no Quadro 4, a maioria tem como foco os anos finais do Ensino Fundamental. Apenas duas dessas investigações são teses, únicos trabalhos que trazem reflexões acerca do Ensino Superior (com olhar voltado especificamente à formação do pedagogo). Além disso, a ênfase das pesquisas produzidas no âmbito do GPEA está nos números naturais (quatro estudos), em seguida, nos números racionais (três estudos). Os subtemas mais explorados são *Divisibilidade em \mathbb{N}* (cinco pesquisas) e *Números Racionais* (quatro pesquisas). Em quatro pesquisas, há discussões relativas ao uso de algum tipo de tecnologia; em uma delas, investiga-se o emprego de tecnologias não usuais no ensino de operações com números naturais, em outra, estuda-se a possível influência de um *software* específico na aprendizagem de números inteiros por parte de alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, na seguinte, analisa-se um projeto (Números em Ação) que envolve o uso de tecnologias desenvolvido pela Rede Pública de Ensino do Estado de São Paulo e, finalmente, há uma investigação em que se considera a utilização de calculadora e de jogos matemáticos como possíveis estratégias

para refinar a percepção dos alunos em relação aos erros cometidos na manipulação de estruturas aditivas e multiplicativas. Diante do que observamos e considerando o papel desempenhado pelas tecnologias no cenário atual, destacamos a demanda por investigações que tenham como foco o emprego de tecnologias, incluindo jogos digitais educativos, nos processos de ensino e de aprendizagem de números e operações.

Outros apontamentos que podem ser feitos em decorrência dos dados elencados no Quadro 4 são: entre as investigações experimentais, apenas em quatro os professores são sujeitos. Além disso, embora em sala de aula o trabalho com o tema Números e Operações comece nos primeiros anos da trajetória escolar dos estudantes, há somente duas pesquisas direcionadas aos anos iniciais do Ensino Fundamental. A respeito dos objetivos das pesquisas experimentais, notamos a predominância de reflexões acerca das potencialidades de diferentes tecnologias, tanto digitais quanto de outras naturezas, nos processos de ensino e de aprendizagem do tema em questão. Há quantidade significativa de estudos que visam à identificação de conhecimentos mobilizados por estudantes ao trabalharem com determinado aspecto do conteúdo e de investigações nas quais o foco está no diagnóstico de concepções manifestadas pelos alunos em relação a determinado objeto matemático pertinente ao conteúdo em tela.

Quadro 4 – Pesquisas experimentais sobre o conteúdo Números e Operações

Conteúdo Matemático: Números e Operações – pesquisas experimentais				
Subtema	Objetivo	Tipo de Produção	Nível de Ensino	Sujeitos
Número Zero	Investigar quais conhecimentos são mobilizados por alunos acerca do valor posicional no Sistema de Numeração Decimal e qual o sentido dado ao número zero nesse mesmo sistema.	Dissertação	Anos iniciais do Ensino Fundamental	Alunos do 4º ano
Números Naturais	Verificar se os conhecimentos acerca dos números naturais que alunos do curso de Pedagogia, também docentes na Educação Infantil ou nos anos iniciais do Ensino Fundamental, construíram quando cursaram a disciplina que trata dos conteúdos de Matemática ampliaram seus saberes matemáticos e deram novo significado às suas práticas docentes.	Tese	Ensino Superior	Professores universitários de cursos de Pedagogia e alunos desses cursos (já atuantes como docentes) que também foram observados nas escolas em que lecionavam

Divisibilidade em \mathbb{N}	Diagnosticar as concepções de alunos sobre a divisão de números naturais.	Dissertação	Anos finais do Ensino Fundamental	Alunos do 7º ano
	Investigar a concepção de alunos sobre divisibilidade dos números naturais.	Dissertação	Ensino Médio	Alunos do 1º ano
	Investigar a concepção de alunos sobre divisibilidade por meio de uma abordagem com calculadora.	Dissertação	Anos finais do Ensino Fundamental	Alunos do 6º ano
	Investigar o efeito da retomada da divisibilidade dos números naturais na compreensão do estudante sobre a divisibilidade de polinômios.	Dissertação	Ensino Médio	Alunos do Ensino Médio
	Investigar como alunos mobilizam conhecimentos a respeito de divisibilidade de números naturais	Dissertação	Anos finais do Ensino Fundamental	Alunos do 6º ano
Operações em \mathbb{N} com tecnologias não usuais	Investigar se e como alunos que apresentam dificuldades na resolução de atividades que envolvem operações com números naturais aprofundam seus conhecimentos quando lhes é dada a oportunidade do uso de tecnologias não usuais em sala de aula.	Dissertação	Anos finais do Ensino Fundamental	Alunos do 8º ano
Números Inteiros	Investigar como o uso do <i>software</i> APLUSIX influi na aprendizagem de números inteiros.	Dissertação	Anos finais do Ensino Fundamental	Alunos do 7º ano
Números Racionais	Investigar se alunos atribuem sentido restrito às relações <i>chegar antes de e não chegar depois de e</i> , caso o façam, se esses significados podem ser ampliados como resultado de um processo de intervenção didática.	Dissertação	Ensino Médio	Alunos do 1º ano
	Investigar quais conceitos, propriedades e procedimentos matemáticos, bem como quais domínios (em termos de representação numérica, gráfica e outras) são utilizados por estudantes na resolução de atividades abrangendo o enquadramento de números racionais em intervalos de racionais.	Dissertação	Anos finais do Ensino Fundamental	Alunos do 8º ano
	Investigar o que professores	Dissertação	Anos finais	Professores do

	consideram ao elaborar aulas referentes a atividades que envolvem enquadramento de números racionais em intervalos.		do Ensino Fundamental	8º e do 9º ano
	Investigar a compreensão de alunos sobre a divisão de números racionais na forma decimal.	Dissertação	Anos finais do Ensino Fundamental	Alunos do 7º ano
Números e Tecnologia	Analisar o uso da sala de informática e as novas tecnologias presentes no projeto <i>Números em Ação</i> , da Rede Estadual Paulista, como suporte para alunos com problemas de aprendizagem na disciplina de matemática.	Dissertação	Anos finais do Ensino Fundamental	Professores e alunos de 6º e 7º ano
Campo Multiplicativo e Conceito de Multiplicação	Investigar a constituição de saberes da docência no campo multiplicativo ao longo da formação inicial e continuada do licenciado em Pedagogia e no âmbito das produções de seus alunos.	Tese	Ensino Superior e Anos iniciais do Ensino Fundamental	Professores pedagogos e seus alunos
Uso de Calculadora e de Jogos Matemáticos	Investigar quais estratégias pedagógicas, considerando o uso da calculadora em sala de aula, podem refinar a percepção dos erros cometidos por alunos na manipulação de estruturas aditivas e multiplicativas.	Dissertação	Anos finais do Ensino Fundamental	Alunos do 7º ano

Fonte: elaborado pelos autores com base em dados da pesquisa.

A respeito dos estudos documentais relativos ao conteúdo *Números e Operações*, por meio do Quadro 5, notamos a predominância de investigações de mestrado, havendo apenas uma tese. O nível de ensino privilegiado é o Fundamental (quatro pesquisas); em um estudo de doutorado, o nível de ensino contemplado é Especialização. Uma ampla gama de materiais foi alvo de análise dos pesquisadores do GPEA que se dedicaram a essa temática: livros de história da Matemática, artigos, dissertações, teses, coleções de livros didáticos, documentos oficiais (Parâmetros Curriculares Nacionais), livros publicados pela Secretaria Municipal de Educação de uma cidade de Minas Gerais e videoaulas. A opção por um ou outro material está, obviamente, vinculada aos objetivos das pesquisas que, também como evidenciam as informações apresentadas no Quadro 5, são diversos, mas, em alguma medida, na maior parte dos estudos, estão relacionados ao

interesse de compreender a abordagem de determinado conceito proposta em livros didáticos, documentos oficiais ou materiais de outras naturezas.

Quadro 5: Pesquisas documentais sobre o conteúdo Números e Operações

Conteúdo Matemático: Números e Operações – pesquisas documentais				
Subtema	Objetivo	Tipo de Produção	Nível de Ensino	Documentos Analisados
Número Zero	Investigar as dificuldades que surgiram ao longo da história para se considerar o zero como número.	Dissertação	Não há	Livros de História da Matemática, artigos e uma dissertação
Números Naturais	Investigar conhecimentos relativos ao número natural construídos por professoras-alunas na disciplina Construção do Conhecimento Lógico-Matemático, de um curso de especialização semipresencial intitulado Psicopedagogia com foco em sala de aula.	Tese	Especialização	Ementário, videoaulas, livros e respostas das professoras-alunas
Divisibilidade em \mathbb{Z}	Verificar a abordagem de números inteiros, em particular o conceito de divisibilidade.	Dissertação	Ensino Fundamental	Três coleções de livros didáticos
Números e Operações nos PCN	Investigar a abordagem proposta para números e operações.	Dissertação	Ensino Fundamental	Parâmetros Curriculares Nacionais de 1997
Sistema de Numeração Decimal	Investigar a docência dos anos iniciais e a compreensão do sistema de numeração decimal.	Dissertação	Ensino Fundamental	Dissertações e teses
Campo Multiplicativo e Conceito de Multiplicação	Investigar o processo de elaboração do conceito de multiplicação do 1º ao 5º ano.	Dissertação	Ensino Fundamental	Livros da Coleção do Professor adotados na Rede Municipal de Ensino de uma cidade de Minas Gerais

Fonte: elaborado pelos autores com base em dados da pesquisa.

Em relação ao Quadro 6, os dados evidenciam um número elevado de pesquisas, 12 no total, sobre *Generalização de Padrões*, o que se justifica pelo desenvolvimento, no âmbito do Grupo, entre 2005 e 2010, de um projeto de pesquisa intitulado *Sobre Observação e Generalização de Padrões: uma atividade transversal*. Além disso, uma

vez que generalizar padrões é uma atividade essencial para o desenvolvimento do pensamento algébrico, mesmo após o término do mencionado projeto, outras pesquisas sobre essa temática foram produzidas. Convém destacar que, ao contrário do observado no tocante a outros conteúdos matemáticos, nas pesquisas relativas a Generalização de Padrões, não identificamos subtemas. A particularidade, como podemos observar com base nos dados do Quadro 7, é que quatro das investigações relativas à temática articulam generalização de padrões com sequências numéricas, em especial progressões aritméticas e geométricas.

Quadro 6 – Dissertações e teses sobre o conteúdo Generalização de Padrões

Conteúdo Matemático	Dissertações	Teses	Pesquisas
Generalização de Padrões	11	1	12
TOTAIS	11	1	12

Fonte: elaborado pelos autores com base em dados da pesquisa.

Os dados apresentados no Quadro 7 evidenciam que entre as pesquisas experimentais sobre *Generalização de Padrões*, há somente investigações de mestrado. Embora esse conteúdo, em virtude de sua importância para o desenvolvimento do pensamento algébrico, deva ser trabalhado desde os primeiros anos da trajetória escolar, predomina, no *corpus* analisado, estudos voltados ao Ensino Médio (cinco pesquisas), além do que, há, em menor número, investigações relativas aos anos finais (duas) e aos anos iniciais do Ensino Fundamental (uma) e, ainda, uma pesquisa na qual o nível de ensino não é explicitado. Salientamos a ausência de investigações voltadas ao Ensino Superior, especialmente aos cursos de Licenciatura em Matemática.

Observamos a prevalência de trabalhos em que alunos são os sujeitos de pesquisa: do Ensino Médio (cinco pesquisas) e dos anos finais do Ensino Fundamental (uma pesquisa). Os professores estão presentes como sujeitos em quatro investigações; são docentes dos anos finais do Ensino Fundamental (uma pesquisa), do Ensino Fundamental na Rede Estadual de Ensino de São Paulo (uma pesquisa), docentes que participaram de curso de formação continuada oferecido pela Rede Municipal de Ensino de São Paulo (uma pesquisa) e docentes das oficinas Experiências Matemáticas das Escolas de Tempo Integral (uma pesquisa).

Em quatro das dez pesquisas experimentais, o conteúdo *Generalização de Padrões* é trabalhado de maneira articulada com as sequências numéricas; em três trabalhos, o foco recai sobre progressões aritméticas (duas pesquisas) e geométricas (uma pesquisa). Em relação aos objetivos dos estudos, cinco estão relacionados a compreender como os alunos trabalham com situações que envolvem generalização de padrões; três, aos

conhecimentos ou percepções de professores a respeito de atividades que envolvem o conteúdo em questão e a como explorá-lo em sala de aula; um; às condições a serem criadas para que os alunos desenvolvam generalizações, e um, a como o conteúdo é explorado em oficinas realizadas em escolas de tempo integral.

Quadro 7 – Pesquisas experimentais sobre o conteúdo Generalização de Padrões

Conteúdo Matemático: Generalização de Padrões – pesquisas experimentais			
Objetivo	Tipo de Produção	Nível de Ensino	Sujeitos
Investigar o conhecimento que os professores de Matemática apresentam sobre o estudo de generalizações de padrões e regularidades.	Dissertação	Anos finais do Ensino Fundamental	Professores de 8º ano
Investigar se e como alunos resolvem situações-problema que envolvem generalização de padrões.	Dissertação	Ensino Médio	Alunos do 1º, 2º e 3º ano
Verificar se professores trabalham com atividades que envolvem a observação de regularidades e de generalização de padrão, e, caso o façam, quais estratégias de resolução preveem que seus alunos utilizem.	Dissertação	Ensino Fundamental	Professores da Rede Estadual de Ensino de São Paulo
Investigar se e como alunos criam estratégias para resolver situações que envolvem a percepção e generalização de padrões em sequências.	Dissertação	Anos finais do Ensino Fundamental	Alunos do 6º ano
Investigar quais são as mudanças de percepção dos professores sobre o tema observação e generalização de padrões ao vivenciarem um processo de pesquisa em sua própria sala de aula.	Dissertação	Ensino Fundamental	Professoras que participaram de curso de formação continuada proposto pelo Projeto de Valorização do Educador e Melhoria da Qualidade de Ensino da Rede Municipal de Ensino de São Paulo
Investigar como o aluno observa, realiza e compreende as atividades de observação de regularidades e de generalização de padrões.	Dissertação	Ensino Médio	Aluno que terminou o 1º ano
Verificar como atividades que envolvem observação e generalização de padrões são exploradas nas oficinas Experiências Matemáticas das escolas de tempo integral.	Dissertação	Não é explicitado	Cinco professores das oficinas Experiências Matemáticas
Investigar se é possível criar condições para que alunos	Dissertação	Ensino Médio	Alunos do 1º ano

generalizem termos de progressões aritméticas e, se o fazem, se a generalização permite que construam uma fórmula para o termo geral desse tipo de sequência.			
Investigar se e como estudantes observam regularidades e as generalizam, construindo expressões relativas às progressões geométricas com o apoio de calculadora simples ou de impressora.	Dissertação	Ensino Médio	Alunos do 1º ano
Investigar se alunos, diante de atividades de observação e generalização de padrões de sequências, constroem uma fórmula para o termo genérico de uma Progressão Aritmética.	Dissertação	Ensino Médio	Alunos do 2º ano

Fonte: elaborado pelos autores com base em dados da pesquisa.

No Quadro 8, observamos que apenas duas investigações documentais sobre *Generalização de Padrões* foram desenvolvidas: uma dissertação e uma tese. Na primeira, analisam-se livros didáticos selecionados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) em 2011, com foco nos anos finais do Ensino Fundamental; na segunda, examinam-se as contribuições de pesquisas brasileiras sobre o tema, sem se voltar a um nível de ensino específico. Além de certamente haver demanda por outras investigações de cunho documental sobre generalização de padrões, em razão da importância do trabalho com esse conteúdo para o desenvolvimento do pensamento algébrico, notamos lacunas em relação ao tipo de material passível de ser pesquisado, como notas de aula, documentos oficiais, entre outros. Como possíveis objetos de estudo, temos a generalização de padrões com o uso de recursos tecnológicos, por exemplo, calculadora e *softwares* educativos, e questões relacionadas a esse conteúdo presentes no Ensino Superior.

Quadro 8 – Pesquisas documentais sobre o conteúdo Generalização de Padrões

Conteúdo Matemático: Generalização de Padrões – pesquisas documentais			
Objetivo	Tipo de Produção	Nível de Ensino	Documentos Analisados
Analisar se a linguagem algébrica é introduzida por meio de atividades de generalização de padrões e como isso ocorre.	Dissertação	Anos finais do Ensino Fundamental	Livros didáticos selecionados no PNLD/2011
Analisar as contribuições de pesquisas brasileiras em Educação Matemática produzidas de 2003 a 2013	Tese	Não há	Teses e dissertações

sobre o tema generalização de padrões matemáticos.			
--	--	--	--

Fonte: elaborado pelos autores com base em dados da pesquisa.

Em relação ao tema Função, como podemos perceber com base nos dados constantes no Quadro 9, foram realizadas apenas investigações de mestrado. Não foram foco de atenção as funções cosseno, tangente, cotangente, secante, cossecante e as respectivas funções inversas, além de funções definidas por várias sentenças matemáticas, o que indica possibilidade de pesquisas futuras no âmbito do Grupo. O predomínio é de pesquisas relacionadas ao conceito de função (três estudos) e à função exponencial (dois estudos). Dada a importância da ideia de função para a Modelagem Matemática, chama a atenção o fato de haver, entre os trabalhos analisados, apenas um que articula esses dois aspectos. Em relação aos diferentes tipos de funções, nos estudos do GPEA, já foram contemplados logarítmica, exponencial, modular e seno. Entendemos como relevante o desenvolvimento de investigações relacionadas à aplicação do conceito de função a outras áreas do conhecimento, como Física, Química, Engenharias, Economia, Administração e Computação.

Quadro 9 – Dissertações e teses sobre o conteúdo Função

Conteúdo Matemático	Subtema	Dissertações	Teses	Total
Função	Conceito de Função	3	0	3
	Função Exponencial	2	0	2
	Função e Modelagem Matemática	1	0	1
	Relações Funcionais em Diferentes Representações	1	0	1
	Função Logarítmica	1	0	1
	Função Seno	1	0	1
	Função Modular	1	0	1
TOTAIS		10	0	10

Fonte: elaborado pelos autores com base em dados da pesquisa.

Por meio do Quadro 10, podemos perceber que, em relação às pesquisas experimentais sobre o conteúdo *Função*, o foco é o Ensino Médio (quatro pesquisas); há apenas uma investigação voltada aos anos finais do Ensino Fundamental. Identificamos, assim, uma lacuna nas produções do GPEA em relação a investigações experimentais relacionadas ao conteúdo função no Ensino Superior. Nas pesquisas analisadas, os alunos, especificamente do Ensino Médio (três estudos) e dos anos finais do Ensino Fundamental (um estudo), predominam como sujeitos; há apenas uma investigação em que professores são sujeitos, o que revela ser mais uma possibilidade de estudo futuro.

Os tipos de função abordados nos trabalhos são os seguintes: logarítmica, exponencial, seno e modular. Há lacunas referentes a outros tipos de função, como já destacamos ao comentar o Quadro 9. Em relação aos objetivos, em três das seis pesquisas ganham destaque as diferentes representações semióticas para o objeto matemático Função e um dos estudos considera a utilização do *software* GeoGebra. O uso de tecnologias está presente em outro estudo, que envolve o *software* Winplot. Notamos que em três das seis pesquisas mencionadas no Quadro 10 os objetivos estão relacionados à compreensão dos efeitos, na aprendizagem dos estudantes, de sequências didáticas implementadas em sala de aula. Em uma das investigações, objetiva-se refletir como a compreensão das relações funcionais em suas diferentes representações podem contribuir para a introdução do pensamento algébrico e da linguagem da Álgebra. Salientamos, ainda, que há demanda para a realização de investigações que enfoquem no uso de tecnologias digitais, como, por exemplo, computadores e *smartphones*.

Quadro 10 – Pesquisas experimentais sobre o conteúdo Função

Conteúdo Matemático: Função – pesquisas experimentais				
Subtema	Objetivo	Tipo de Produção	Nível de Ensino	Sujeitos
Relações Funcionais em Diferentes Representações	Investigar como as relações funcionais em diferentes representações contribuem para a introdução ao pensamento e à linguagem da Álgebra.	Dissertação	Anos finais do Ensino Fundamental	Alunos do 7º ano
Função Logarítmica	Investigar o efeito de uma sequência didática sobre funções logarítmicas elaborada com o intuito de possibilitar que o aluno explore as representações com o <i>software</i> GeoGebra.	Dissertação	Ensino Médio	Alunos do 3º ano
Função Exponencial	Analisar se as atividades apresentadas no Caderno do Professor contribuem ou não para a compreensão do aluno a respeito do objeto Função Exponencial, e se os alunos conseguem realizar ou não as mudanças de representação semiótica à luz da teoria de Duval.	Dissertação	Ensino Médio	Alunos do 2º ano
Função Seno	Investigar se uma sequência de atividades no contexto físico-	Dissertação	Ensino Médio	Alunos do 2º ano

	matemático, com o uso do <i>software</i> Winplot, promove a aprendizagem de alunos a respeito da Função Seno.			
Função Modular	Investigar contribuições do ensino da Função Modular para a Educação Básica.	Dissertação	Ensino Médio	Professores do Ensino Médio também estudantes de pós-graduação em Educação Matemática

Fonte: elaborado pelos autores com base em dados da pesquisa.

O conteúdo do Quadro 11 permite-nos notar que, em termos de pesquisas documentais sobre *Função*, em relação ao nível de ensino, uma pesquisa refere-se aos anos finais do Ensino Fundamental, três estudos referem-se simultaneamente aos anos finais do Ensino Fundamental e ao Ensino Médio, e uma refere-se ao Ensino Médio. Assim como observado na esfera das pesquisas experimentais, não há investigações voltadas ao Ensino Superior. Diferentes tipos de materiais foram contemplados nas análises: materiais de ensino da Rede Pública de Ensino do Estado de São Paulo, livros didáticos, artigos publicados na revista *Educação Matemática Pesquisa* e dissertações de mestrado. Não encontramos análises de livros de História da Matemática, de materiais preparados pelo professor para ministrar aulas, de documentos oficiais, de ementas e planos de ensino, do currículo, entre outros elementos passíveis de serem analisados. Em relação aos subtemas, há predominância de discussões acerca do conceito de Função. Se voltarmos nossa atenção a tipos específicos de funções, nas pesquisas experimentais em tela, são abordadas apenas as exponenciais. Considerando os objetivos de pesquisa, a maior parte (três) dos estudos destina-se a analisar como são abordadas as funções em livros e em outros tipos de materiais didáticos, duas pesquisas voltam-se às contribuições de outras investigações para reflexões a respeito do tema, uma delas está relacionada à Modelagem Matemática.

Quadro 11 – Pesquisas documentais sobre o conteúdo Função

Conteúdo Matemático: Função – pesquisas documentais				
Subtema	Objetivo	Tipo de Produção	Nível de Ensino	Documentos Analisados
Conceito de Função	Analisar como é apresentado o conceito de Função nas atividades propostas.	Dissertação	Anos finais do Ensino Fundamental	Material do Ensino Fundamental da Rede Pública de Ensino do Estado de São Paulo

	Investigar a abordagem de Função.	Dissertação	Anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio	Livros didáticos
	Investigar o que tem sido discutido, nos últimos dez anos, sobre o ensino e a aprendizagem de função em pesquisas brasileiras da área de Educação Matemática.	Dissertação	Anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio	Artigos publicados na revista <i>Educação Matemática Pesquisa</i>
Função e Modelagem Matemática	Investigar possíveis contribuições da Modelagem Matemática para o ensino de Função.	Dissertação	Anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio	Dissertações de mestrado
Função Exponencial	Investigar como as funções exponenciais são abordadas.	Dissertação	Ensino Médio	Livros didáticos de Matemática aprovados em 2015 pelo PNLD

Fonte: elaborado pelos autores com base em dados da pesquisa.

Em relação aos aspectos gerais das investigações sobre *Álgebra Linear* apresentados no Quadro 12, notamos que todas as pesquisas focam no Ensino Superior, o que se justifica pela especificidade da temática. Notamos a ausência de investigações referentes a subtemas, como espaço vetorial, mudança de base, diagonalização de operadores, produto interno e utilização de conceitos de *Álgebra Linear* para a resolução de sistemas de equações diferenciais ordinárias. O subtema mais abordado é a noção de base. Há três pesquisas relacionadas à abordagem da *Álgebra Linear* em diferentes cursos de graduação (Licenciatura em Matemática e Engenharia Elétrica). Duas temáticas trabalhadas mais ao final de uma primeira disciplina de *Álgebra Linear* (transformação linear e autovalor e autovetor) foram alvo de estudos de duas das três teses desenvolvidas pelos integrantes do GPEA. Outro tema pesquisado foi independência linear. Em nenhuma pesquisa os processos de ensino e de aprendizagem de *Álgebra Linear* foram relacionados ao emprego de tecnologias. Cabe destacar a existência de projetos de pesquisa voltados exclusivamente ao ensino e à aprendizagem de *Álgebra Linear*, como evidenciado no Quadro 1.

Quadro 12 – Dissertações e teses sobre o conteúdo *Álgebra Linear*

Conteúdo Matemático	Subtema	Dissertações	Teses	Total
Álgebra Linear	Noção de Base	4	0	4
	Álgebra Linear na Engenharia	1	1	2
	Independência Linear	1	0	1
	Álgebra Linear na Licenciatura	0	1	1

	Transformação Linear	0	1	1
TOTAIS		6	3	9

Fonte: elaborado pelos autores com base em dados da pesquisa.

Como evidenciado no Quadro 13, as pesquisas experimentais sobre *Álgebra Linear*, pela própria natureza do tema, estão voltadas ao Ensino Superior. Há predomínio de dissertações (cinco) em comparação a teses (três). Em relação aos sujeitos de pesquisa, os estudos distribuem-se de maneira equilibrada: em quatro, os sujeitos são estudantes e em outros quatro, são professores. Os estudantes são de Engenharia Elétrica (um estudo), de Ciência da Computação (um estudo), de um curso de Extensão em Álgebra Linear (um estudo) e de Licenciatura em Matemática (um estudo). A respeito dos professores, sujeitos de pesquisa, há aqueles responsáveis por disciplinas específicas de um curso de Engenharia Elétrica (uma pesquisa), há os que atuam no Ensino Superior (duas pesquisas) e há os que são docentes no curso de Ciência da Computação (uma pesquisa). Os subtemas predominantes nas pesquisas experimentais realizadas pelos integrantes do GPEA são noção de base (quatro estudos) e Álgebra Linear na Engenharia (dois estudos). A respeito dos objetivos, em quatro pesquisas eles estão relacionados a como abordar a Álgebra Linear e ao que abordar sobre ela em cursos de graduação nos quais esse componente curricular está presente e cujos objetivos são distintos, como é o caso de Licenciatura em Matemática, Ciência da Computação e diferentes habilitações de Engenharia. Em um desses estudos com esse objetivo, o foco está em analisar as estruturas cognitivas envolvidas na construção de determinado objeto da Álgebra Linear (autovalor e autovetor). Há dois estudos que investigam possíveis “alavancas-meta” e “recursos meta” (ROBERT; ROBINET, 1993) a que recorrem professores de Álgebra Linear ao trabalhar com determinado conceito, e duas investigações cujo objetivo é identificar concepções de estudantes a respeito de determinados conceitos de Álgebra Linear. Finalmente, salientamos que não há pesquisas voltadas a outros cursos que não Ciência da Computação, Engenharia e Licenciatura em Matemática, que têm Álgebra Linear como componente curricular. Desse modo, identificamos uma demanda por investigações direcionadas a conteúdos matemáticos ainda não contemplados em pesquisas experimentais a que se refere o Quadro 13 e por estudos experimentais relacionados ao emprego de tecnologias nos processos de ensino e de aprendizagem de Álgebra Linear.

Quadro 13 – Pesquisas experimentais sobre o conteúdo Álgebra Linear

Conteúdo Matemático: Álgebra Linear – pesquisas experimentais				
Subtema	Objetivo	Tipo de Produção	Nível de Ensino	Sujeitos
Álgebra Linear na Licenciatura	Investigar a Álgebra Linear ensinada na Licenciatura em Matemática como um saber voltado para a formação do professor de Matemática.	Tese	Ensino Superior	Professores do Ensino Superior
Álgebra Linear na Engenharia	Investigar por que e como deve ser lecionada a Álgebra Linear em uma graduação de Engenharia Elétrica	Dissertação	Ensino Superior	Professores de disciplinas específicas de Engenharia Elétrica
	Investigar as estruturas cognitivas envolvidas na construção do objeto matemático autovalor e autovetor nas fases inicial e final de formação do em cursos de Engenharia	Tese	Ensino Superior	Alunos dos semestres iniciais e dos semestres finais de Engenharia
Noção de Base	Investigar as “alavancas-meta” sugeridas por professores de Álgebra Linear para a compreensão da noção de base.	Dissertação	Ensino Superior	Professores do Ensino Superior
	Investigar como é utilizada a noção de base de um espaço vetorial em tópicos de Ciência da Computação.	Dissertação	Ensino Superior	Professores do curso de Ciência da Computação
	Investigar os “recursos-meta” utilizados por um professor de Álgebra Linear em sala de aula.	Dissertação	Ensino Superior	Alunos do curso de Ciência da Computação
	Investigar a concepção de alunos concluintes de um curso de extensão de Álgebra Linear a respeito da noção de base de um espaço vetorial real finitamente gerado.	Dissertação	Ensino Superior	Alunos de um curso de extensão de Álgebra Linear
Transformação Linear	Investigar a concepção de alunos de um curso de Álgebra Linear a respeito de Transformação Linear.	Tese	Ensino Superior	Alunos de licenciatura em Matemática

Fonte: elaborado pelos autores com base em dados da pesquisa.

Sobre pesquisas documentais relativas a Álgebra Linear, destacamos apenas um trabalho. Trata-se de uma dissertação na qual são analisados livros didáticos, em particular os registros de representação semiótica utilizados na abordagem de independência linear. Tal fato revela que há inúmeros caminhos a serem trilhados por

pesquisas futuras. Por exemplo, é possível analisar outros tipos de materiais, como apostilas, ou materiais de aula elaborados por professores, materiais de alunos (por exemplo, notas de aula), diretrizes curriculares nacionais de diferentes cursos em que a Álgebra Linear está presente como disciplina de serviço (por exemplo, Engenharias, Ciência da Computação, Física, Sistema de Informação, entre outros) e também o que é essencial em relação à Álgebra Linear nesses diferentes cursos de graduação. Outra possibilidade de estudo é analisar, se houver, pesquisas já realizadas acerca do emprego das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação nos processos de ensino e de aprendizagem de Álgebra Linear.

Quadro 14 – Pesquisas documentais sobre o conteúdo Álgebra Linear

Conteúdo Matemático: Álgebra Linear – pesquisas documentais				
Subtema	Objetivo	Tipo de Produção	Nível de Ensino	Documentos Analisados
Independência Linear	Investigar quais registros de representação semiótica são mais utilizados no estudo das noções e atividades propostas sobre independência linear.	Dissertação	Ensino Superior	Livros didáticos de Álgebra Linear

Fonte: elaborado pelos autores com base em dados da pesquisa.

O tema *Equações* foi objeto de estudo de três dos projetos de pesquisa do GPEA, *Concepções acerca de Relações* (2006-2009), *Expressões, equações e inequações: pesquisa, ensino e aprendizagem* (2006-2010) e *Funções do ponto de vista cognitivo e didático* (2010-2013), apresentados no Quadro 1. Conforme os dados presentes no Quadro 15, o subtema mais explorado é Equações Algébricas (quatro trabalhos); os demais subtemas são contemplados de forma equilibrada. Com base nos dados apresentados, notamos a demanda por investigações relacionadas a outros tipos de equações, como as trigonométricas, exponenciais e diferenciais. Além disso, há possibilidades de estudo em relação à utilização de Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação nos processos de ensino e de aprendizagem de equações.

Quadro 15 – Dissertações e teses sobre o conteúdo Equações

Conteúdo Matemático	Subtema	Dissertações	Teses	Total
Equações	Equações Algébricas	4	0	4
	Equações no Ensino Médio	1	0	1
	Conhecimentos de licenciandos	1	0	1
	Significados da noção de equação	0	1	1
	Equações com TIC	1	0	1
	Equações e Inequações Logarítmicas	1	0	1
TOTAIS		8	1	9

Fonte: elaborado pelos autores com base em dados da pesquisa.

Considerando o Quadro 16, notamos apenas estudos de mestrado, os quais têm caráter experimental em relação ao tratamento de *Equações*. Os trabalhos realizados focam somente nas equações estudadas no currículo do Ensino Fundamental. Em relação ao nível de ensino, há predomínio de pesquisas voltadas aos anos finais do Ensino Fundamental (dois trabalhos) e há uma investigação voltada ao Ensino Superior; não há pesquisas relacionadas ao Ensino Médio. Sobre os sujeitos de pesquisa, todos são alunos: uns do 9º ano do Ensino Fundamental (dois estudos), outros ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática (um estudo). O subtema *Equações Algébricas* é o mais explorado (dois trabalhos). Em relação aos objetivos, eles são diferentes nas três pesquisas da categoria: em uma pesquisa, o objetivo é identificar erros, procedimentos e estratégias mobilizados por alunos, em outro, analisar o desempenho de alunos em questões de Álgebra (especificamente sobre equações) em uma avaliação externa (Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo – Saresp) e, no seguinte, identificar conhecimentos sobre equações manifestados por estudantes ingressantes em cursos de Licenciatura em Matemática. Evidenciamos a demanda tanto por investigações experimentais que relacionem os processos de ensino e de aprendizagem de equações com a utilização de diferentes tecnologias digitais, incluindo *softwares* educativos, quanto por estudos voltados a outros tipos de equações que não as algébricas, como exponenciais, logarítmicas, trigonométricas e diferenciais.

Quadro 16 – Pesquisas experimentais sobre o conteúdo Equações

Conteúdo Matemático: Equações – pesquisas experimentais				
Subtema	Objetivo	Tipo de Produção	Nível de Ensino	Sujeitos
Equações Algébricas	Identificar os erros e analisar procedimentos e estratégias que os alunos utilizam para resolver equações algébricas de 1º grau.	Dissertação	Anos finais do Ensino Fundamental	Alunos do 9º ano
	Analisar o desempenho dos alunos na resolução de algumas questões do Saresp/2005 relacionadas à Álgebra em questões referentes a equações e expressões envolvendo a conversão da representação no registro da língua natural para a representação no registro algébrico.	Dissertação	Anos finais do Ensino Fundamental	Alunos do 9º ano
Conhecimento de Licenciandos	Identificar os conhecimentos de estudantes ingressantes na Licenciatura em Matemática	Dissertação	Ensino Superior	Alunos ingressantes em

	sobre equações.			Licenciatura em Matemática
--	-----------------	--	--	----------------------------

Fonte: elaborado pelos autores com base em dados da pesquisa.

Nas pesquisas documentais sobre *Equações*, apresentadas no Quadro 17, há predomínio de dissertações (cinco) em relação a teses (uma). As investigações enfocam o Ensino Médio (três) e os anos finais do Ensino Fundamental (duas). Em uma das pesquisas, a única de doutorado, o nível de ensino não foi explicitado, já que o objetivo do pesquisador era focar os significados da noção de equação, e não refletir acerca do ensino desse objeto em um nível específico. Em relação aos materiais analisados, a maior parte dos estudos recorreu a dissertações e teses publicadas em diferentes períodos (quatro trabalhos). Em uma pesquisa foram analisados textos diversos sobre Matemática e Educação Matemática, em outra, o Caderno do Professor da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo para o Ensino Médio. O subtema predominante nessas pesquisas documentais é *Equações Algébricas*. Em relação aos objetivos, na maior parte dos trabalhos (quatro), eles estão voltados a sintetizar pesquisas já desenvolvidas a respeito do tema. Um trabalho tem como objetivo investigar os significados da noção de equação no ensino de Matemática, outro, analisar uma situação de aprendizagem proposta em um material oficial do Estado de São Paulo. Não foram desenvolvidas pesquisas com enfoque no material preparado pelo professor ou em notas de aulas de alunos, documentos oficiais, materiais que sugerem o uso de tecnologias digitais, currículos, projetos pedagógicos de cursos e diretrizes curriculares nacionais de diferentes cursos de graduação.

Quadro 17 – Pesquisas documentais sobre o conteúdo Equações

Conteúdo Matemático: Equações – pesquisas documentais				
Subtema	Objetivo	Tipo de Produção	Nível de Ensino	Documentos Analisados
Equações Algébricas	Realizar uma síntese de pesquisas brasileiras que tratam de equações algébricas.	Dissertação	Anos finais do Ensino Fundamental	Dissertações de mestrado publicadas de 1998 a 2004
	Desenvolver um panorama de dissertações sobre o tema equações algébricas.	Dissertação	Anos finais do Ensino Fundamental	Dissertações realizadas no âmbito da PUC-SP, publicadas entre 2005 e 2008
Equações no Ensino Médio	Realizar uma síntese de pesquisas brasileiras que tratam de equações.	Dissertação	Ensino Médio	Dissertações e teses produzidas entre 1998 e 2006

Significados da Noção de Equação	Investigar os significados da noção de equação no ensino de Matemática.	Tese	Não há	Textos diversos sobre Matemática e Educação Matemática
Equações com TIC	Fazer uma síntese de dissertações brasileiras que tratam do ensino e da aprendizagem de equações, recorrendo ao uso de Tecnologias da Informação e Comunicação.	Dissertação	Ensino Médio	Dissertações publicadas entre 1998 e 2008
Equações e Inequações Logarítmicas	Analisar uma situação de aprendizagem sobre equações e inequações logarítmicas.	Dissertação	Ensino Médio	Caderno do Professor de 2009 referente ao terceiro bimestre do primeiro ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino Estado de São Paulo

Fonte: elaborado pelos autores com base em dados da pesquisa.

Tendo em vista a homologação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), em 14 de dezembro de 2017, ressaltamos que há demanda por análises relativas à proposta presente, direta ou indiretamente, em tal Base, no que se refere a quatro dos cinco temas mais privilegiados pelas pesquisas do GPEA, *Números e Operações*, *Generalização de Padrões*, *Função e Equações*, uma vez que *Álgebra Linear* é um tema específico do Ensino Superior. Além disso, entendemos ser necessário proceder ao exame de livros didáticos produzidos ou reformulados com base na BNCC, a fim de que seja possível compreender como os autores estão transpondo para os livros aquilo que é proposto no documento.

Considerações finais

Neste artigo, com base na análise de dissertações e teses produzidas pelos integrantes do GPEA, desde a sua criação, em 2003, até 2018, propusemo-nos a apresentar um mapeamento de alguns dos elementos abordados nesses estudos. A nosso ver, contemplamos o objetivo que apresentamos no início deste trabalho, qual seja, identificar os temas mais explorados nas investigações, bem como aqueles que demandam novos estudos e, especificamente, lacunas e caminhos ainda não trilhados, que podem constituir perspectivas para o desenvolvimento de investigações futuras

tanto por parte de membros do próprio Grupo como por parte de pesquisadores em Educação Matemática.

Notamos que diversos temas ou conteúdos matemáticos foram estudados pelos pesquisadores do GPEA, indicando a permeabilidade da Álgebra em diferentes campos da Matemática. Neste artigo, detivemo-nos nos cinco conteúdos mais explorados: *Números e Operações*, *Generalização de Padrões*, *Função*, *Álgebra Linear* e *Equações*. Nestas considerações finais, optamos por sintetizar as principais lacunas no campo de estudo ou possibilidades para o desenvolvimento de novas investigações identificadas com base no exame desses conteúdos, o que passamos a expor.

Em relação ao tema *Números e Operações*, há ausência de estudos que enfoquem tanto números reais e complexos como o emprego de tecnologias, incluindo jogos digitais educativos. Em relação à pesquisa documental, há demanda por estudos relacionados à BNCC.

No que se refere ao conteúdo *Generalização de Padrões*, há lacunas relacionadas a investigações voltadas ao Ensino Superior, especialmente aos cursos de Licenciatura em Matemática, e ao tipo de material que poderia ser pesquisado, como notas de aulas, documentos oficiais (em particular a BNCC) e livros didáticos produzidos ou reformulados tendo a referida Base como subsídio. Há a possibilidade, ainda, de se investigar o emprego de tecnologia no ensino de generalização de padrões.

Em relação ao conteúdo matemático *Função*, há demanda por estudos relacionados às funções cosseno, tangente, cotangente, cossecante, racionais e respectivas funções inversas (quando houver), além de funções definidas por várias sentenças matemáticas. Outros caminhos possíveis de pesquisa são: investigar a aplicação do conceito de função em outras áreas do conhecimento; realizar pesquisas experimentais relacionadas a Função, com foco no Ensino Superior; verificar o emprego de tecnologias digitais no ensino. Em relação à pesquisa documental, pode-se analisar materiais preparados pelo o professor para ministrar aulas, documentos oficiais, ementas, planos de ensino, currículo, entre outros.

Quanto ao conteúdo matemático *Álgebra Linear*, há ausência de investigações referentes a subtemas como espaço vetorial, mudança de base, diagonalização de operadores, produto interno e utilização de conceitos de Álgebra Linear para a resolução de sistemas de equações diferenciais ordinárias. São necessárias, ainda, pesquisas voltadas a outros cursos, que não Ciência da Computação, Engenharia e Licenciatura em Matemática, os quais tenham Álgebra Linear como componente curricular. Estudos

documentais contemplando apostilas, materiais elaborados por professores, anotações de aula produzidas por alunos, entre outros materiais, também podem ser desenvolvidos.

A respeito do conteúdo matemático *Equações*, são necessárias pesquisas que explorem outros tipos de equações além das algébricas, por exemplo, equações trigonométricas, exponenciais, logarítmicas e diferenciais. Além disso, há demanda por estudos que relacionem a utilização de tecnologias aos processos de ensino e de aprendizagem de equações. Como já ressaltado em relação a outros conteúdos matemáticos, há demanda por pesquisas documentais que tenham como foco diferentes materiais, além de livros didáticos, dissertações e teses.

Em decorrência da análise de todos os conteúdos matemáticos e temas abordados em pesquisas, percebemos a possibilidade de se desenvolver estudos que comparem as abordagens e os materiais didáticos utilizados em diferentes países.

A pesquisa evidenciou a importância de se realizar mapeamentos, como o que ora apresentamos, para indicar perspectivas para novos estudos e, assim, evitar repetições desnecessárias, que acabam por comprometer, em certa medida, o desenvolvimento da Educação Matemática, e, em especial, da Educação Algébrica, foco das produções do GPEA.

Referências

FIorentini, D.; PASSOS, C. L. B; LIMA, R. C. R. (Orgs.). **Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina matemática: período 2001 – 2012**. Campinas, SP: FE/UNICAMP, 2016.

ROBERT, A.; ROBINET, J. *Prise en compte du méta en didactique des Mathématiques. Les cahiers de didactique des Mathématiques 21*. Paris: Université Paris VII, DIDIREM, 1993.

Texto recebido: 18/10/2019

Texto aprovado: 14/12/2019