

## **Atividades intermediárias - processo de criação do aluno (PCA): um MER para o ensino do conceito de limites**

### **Intermediate activities - student creation process (PCA): a MER for teaching the concept of limits**

---

TEODORA PINHEIRO FIGUEROA<sup>1</sup>

SADDO AG ALMOULOU<sup>2</sup>

#### **Resumo**

*Este trabalho, em andamento, refere-se ao estudo e pesquisa sobre a viabilidade de uma Atividade baseada em um Processo de Criação do Aluno (APCA) que visa evidenciar que o aluno, após se apropriar do saber, é capaz de criar o seu próprio problema e, encontrar soluções para ele. Este estudo e pesquisa envolve uma análise desta atividade à luz da Teoria das Situações Didáticas (TSD) e da Teoria Antropológica do Didático (TAD). A partir da TSD, investigou-se as situações didáticas que este tipo de atividade proporciona e, as interações entre aluno, professor e o meio. Através da TAD, analisamos as praxeologias: tipo de tarefas (T), técnica ( $\tau$ ), tecnologia ( $\theta$ ) e teoria ( $\Theta$ ) da atividade matemática proposta. Para o desenvolvimento dessa pesquisa, utilizou-se alguns princípios da Engenharia Didática. Os primeiros resultados de uma experiência em sala de aula comprovaram que a APCA pode proporcionar momentos em que o aluno tem a oportunidade de desenvolver habilidades como criatividade, inovação e pesquisa em um processo de mobilização do saber matemático, fundamental para a sua aprendizagem.*

**Palavras-chave:** *Processo de Criação do Aluno. Teoria das Situações Didáticas. Teoria Antropológica do Didático. Engenharia Didática.*

#### **Résumé**

*Ce travail, en cours, se réfère à l'étude et la recherche sur la faisabilité d'une viabilité basée d'une activité que s'appuie sur le Processus de Création de l'élève (APCA). Ce processus vise à montrer que l'étudiant, après avoir appris le savoir, est capable de créer son propre problème et de lui trouver des solutions. Cette étude et cette recherche mettent en jeu une analyse de cette activité à la lumière de la théorie des situations didactiques (TSD) et de la théorie anthropologique du didactique (TAD). À partir de la TSD, nous avons étudié les situations didactiques que ce type d'activité fournit, et les interactions entre l'élève, l'enseignant et l'environnement. Par la TAD, nous analysons les praxeologies : type de tâches (T), technique ( $\tau$ ), Technologie ( $\theta$ ) et théorie ( $\Theta$ ) de l'activité mathématique proposée. Pour le développement de cette recherche, certains principes de l'ingénierie didactique ont été utilisés. Les premiers résultats d'une expérience en classe ont prouvé que l'APCA peut offrir des moments où les élèves ont la possibilité de développer des compétences telles que la créativité, l'innovation et la*

---

<sup>1</sup> UTFPR, Campus Pato Branco, Brasil, teodora.pinheiro@gmail.com

<sup>2</sup> PUC-SP, Brasil, saddoag@gmail.com

*recherche dans un processus de mobilisation des connaissances mathématiques, Fondamental pour leur apprentissage.*

**Mots-clés :** *Processus de Création de l'élève ; Théorie des Situations Didactiques ; Théorie Anthropologiques du Didactique ; Ingnérie Didactique.*

### **Abstract**

*This work, in progress, refers to the study and research on the viability of an Activity based on a Student Creation Process (ASCP) that aims to show that the student, after appropriating knowledge, can create his own problem and find solutions to it. This study and research involves an analysis of this activity in light of the Theory of Didactic Situations (TDS) and the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). From the TDS, we investigated the didactic situations that this type of activity provides and the interactions between student, teacher and the milieu. And through the TAD, we analyze the praxeologies: type of tasks (T), technique ( $\tau$ ), technology ( $\theta$ ) and theory ( $\Theta$ ) of the proposed mathematical activity. For the development of this research, some principles of Didactic Engineering were used. Early results from a classroom experience have proven that ASCP can provide moments when students have the opportunity to develop skills such as creativity, innovation, and research in a process of mobilizing mathematical knowledge that is fundamental to their learning.*

**Keywords:** *Activity based on a Student Creation Process. Theory of Didactic Situations. Anthropological Theory of the Didactic. Didactic Engineering.*

### **Resumen**

*Este trabajo, en progreso, se refiere al estudio e investigación sobre la viabilidad de una Actividad basada en un Proceso de Creación de Estudiantes (APCE) que tiene como objetivo mostrar que el estudiante, después de apropiarse del conocimiento, puede crear su propio problema y encontrar soluciones a él. Este estudio e investigación implica un análisis de esta actividad a la luz de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) y la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Desde el TSD, investigamos las situaciones didácticas que proporciona este tipo de actividad y las interacciones entre el alumno, el maestro y el medio. Y a través del TAD, analizamos las praxeologías: tipo de tareas (T), técnica ( $\tau$ ), tecnología ( $\theta$ ) y teoría ( $\Theta$ ) de la actividad matemática propuesta. Para el desarrollo de esta investigación, se utilizaron algunos principios de Ingeniería Didáctica. Los primeros resultados de una experiencia en el aula han demostrado que APCE puede proporcionar momentos en que los estudiantes tienen la oportunidad de desarrollar habilidades como la creatividad, la innovación y la investigación en un proceso de movilización de conocimientos matemáticos que es fundamental para su aprendizaje.*

**Palabras-clave:** *Actividad basada en un Proceso de Creación de Estudiantes. Teoría de Situaciones Didácticas. Teoría Antropológica de lo Didáctico. Ingeniería Didáctica.*

## Introdução

Antes de iniciar nossas análises, alertamos que, devido ao espaço reservado ao nosso texto, apresentamos, neste artigo, os resultados parciais de nossa investigação sobre a temática aqui estudadas.

Este trabalho refere-se a uma visão construtivista do saber/fazer, partindo do princípio de que eu aprendo quando experimento. E, neste experimento tudo pode acontecer. Pois é, no experimento que surgem as dúvidas, os questionamentos, os acertos e os erros e, o confronto entre o saber propriamente dito e, o simples fato de conhecer o objeto. Neste trabalho, o experimento faz parte de um processo de construção e criação, partindo do princípio de que a criação e inovação são resultados de dúvidas, questionamentos de alguém que tem autonomia durante o processo.

A matemática surgiu de um processo de criação e inovação do homem diante de necessidades de subsistência. O homem tinha autonomia para criar, inovar e, acima de tudo de experimentar e estabelecer “coisas” de acordo com uma certa lógica, a qual poderia ser válida ou não, mas as “coisas” se definiam em um processo de acertos e erros e, conseqüentemente de aprendizado.

Atualmente o sistema institucional “escola, universidade” nem sempre contribui para um processo de experimentação. Neste sistema tudo é bem definido: a ementa, o cronograma, o tempo de aula e, até o número de alunos em sala de aula. As fronteiras são pré-estabelecidas e, não são flexíveis. Diante desta rigidez, o experimento raramente flui, pois é enquadrado em um sistema pronto e rígido.

Mas, a matemática é uma ciência e, diante deste enquadramento, os alunos nem sempre têm possibilidades de ampliar os horizontes. Muitas vezes, a visão fica limitada à Matemática como um conjunto de fórmulas que resolvem certos problemas, nem sempre têm respostas para os questionamentos, como por exemplo: por que as mesmas fórmulas não resolvem outros problemas? A essência vai se perdendo durante os processos de ensino e de aprendizagem e, este fato interfere de forma negativa nos resultados das avaliações nacionais, por exemplo.

Neste trabalho, partimos da hipótese de que é possível propor alternativas de ensino nas quais o aluno tem autonomia de criar suas próprias situações de aprendizagem. Nesse sentido, nosso objetivo é investigar a viabilidade de uma atividade que visa mostrar que o aluno, após se apropriar do saber, é capaz de criar o seu próprio problema e, encontrar soluções para o mesmo. Esta Atividade é uma Atividade baseada em um Processo de

Ciação do Aluno (APCA) e, experimentou-se a mesma em uma turma de alunos do terceiro período (semestre) na disciplina de Equação Diferencial Ordinária (EDO) do curso de Engenharia de Computação (EC) e Bacharelado e Licenciatura em Química (QB). Sendo que na turma de EC, tinha dois alunos do curso de Engenharia Mecânica (EM).

## **Fundamentação Teórico-metodológica**

### **Engenharia Didática**

Neste trabalho utilizou-se os princípios da Engenharia Didática, caracterizada por Artigue (1988, p. 285) como sendo: “...um esquema experimental baseado sobre ‘realizações didáticas’ em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de uma sequência de ensino”.

Artigue (1988, p. 283) diz que:

É uma forma de trabalho didático que é comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto preciso, se apoia sobre conhecimentos científicos de seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico, mas, ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar sobre objetos bem mais complexos que os objetos depurados da ciência e, portanto, a enfrentar praticamente, com todos os meios que dispõe, problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta. (Tradução nossa)

O foco desta metodologia está no planejamento do ensino e da aprendizagem de um determinado objeto matemático, apoiando-se em quatro fases: Análises Prévias, Construção das Situações e Análise a Priori, Experimentação, Análise a Posteriori e Validação.

Na análise prévia é feito um levantamento sobre tudo o que envolve o objeto matemático em estudo. São feitas considerações a respeito do quadro teórico didático geral e sobre os conhecimentos didáticos já adquiridos sobre o assunto em questão; faz-se uma análise epistemológica dos conteúdos contemplados pelo ensino; se analisa como vem sendo desenvolvido o ensino atual do referido assunto e seus efeitos, faz-se uma análise da concepção dos alunos, das dificuldades e obstáculos que apresentam diante do saber apresentado e também observa-se os entraves didáticos pedagógicos que dificultam o processo de ensino e aprendizagem.

É diante da realização de uma análise prévia seguida de uma análise a priori que o professor pode pensar na elaboração de uma sequência didática a qual será objeto de investigação.

A segunda fase da engenharia didática consiste numa análise a priori que se faz sobre o saber em estudo. Nela estão presentes duas etapas que são a de descrição do objeto e outra de previsão de melhorias para o processo de ensino e aprendizagem onde são apontadas problemáticas referentes ao objeto de estudo e, são construídas hipóteses que serão verificadas na prática investigativa da proposta didática a ser elaborada. A elaboração das hipóteses se constitui elemento importante no trabalho com a engenharia didática, pois são elas que serão comparadas com os resultados finais da sequência didática para verificar a validação ou não da mesma.

A terceira fase trata da aplicação da sequência didática, a experimentação, onde entra em prática o saber didático do professor e todo o seu arcabouço teórico. Nessa fase, a sequência didática proposta deverá ser desenvolvida através de uma abordagem metodológica que privilegie a criticidade e a reflexão numa perspectiva de construção de um saber consciente e indagador.

A última fase é a da análise a posteriori e da validação. Esta fase se apoia sobre todos os dados colhidos durante a experimentação constante das observações realizadas durante cada sessão de ensino bem como das produções dos alunos feitas em classe ou fora dela. Nela é verificado se o aprendizado foi consolidado e se a autonomia intelectual foi alcançada determinando assim a validação, ou não, da sequência didática empregada.

Na engenharia didática a fase de validação da sequência didática é feita durante todo o processo de desenvolvimento da proposta em meio a uma constante confrontação entre os dados obtidos na análise a priori e na análise a posteriori, onde é verificado se as hipóteses feitas no início da pesquisa foram confirmadas.

A Engenharia Didática constitui-se um referencial metodológico importante e viável para o processo de ensino e aprendizagem já que permite a compreensão dos efeitos causados pelas práticas docentes desenvolvidas em sala de aula.

No item “procedimentos metodológicos da pesquisa” descreveremos o que realizamos nessas diferentes fases da Engenharia Didática.

## **Teoria das Situações**

Nossa pesquisa envolve a análise da APCA à luz da Teoria das Situações Didáticas (TSD), propostas por Brousseau (1986, apud ALMOULOU, 2007, p. 31), a qual estabelece a criação de um modelo de interação entre o aprendiz, o saber e o milieu (ou

meio) que proporciona condições favoráveis à aprendizagem do objeto matemático pelo aluno.

Segundo Almouloud (2007, p. 32), o objetivo principal dessa teoria não é o sujeito cognitivo, mas a situação didática na qual são identificadas as interações estabelecidas entre o professor, o aluno e o saber.

A teoria das situações apoia-se em três hipóteses: i) o aluno aprende adaptando-se ao meio, o qual é fator de dificuldades, de contradições, de desequilíbrio (BROUSSEAU, 1986, apud ALMOULOU, 2007, p. 32); ii) o professor é responsável em organizar um milieu suscetível de provocar a aprendizagem; iii) o milieu e as situações didáticas devem engajar os saberes matemáticos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem.

Essas interações entre o aluno, o saber e o meio são possíveis a partir de situações didáticas e/ou situações adidáticas.

Segundo Brousseau (1978, apud ALMOULOU, 2007, p. 33) a situação didática é o conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou grupo de alunos, um certo milieu e um sistema educativo (o professor) para que estes alunos adquiram um saber constituído ou em constituição.

De acordo com Almouloud (2007, p. 33), a situação adidática, como parte essencial da situação didática, é uma situação na qual a intenção de ensinar não é revelada ao aprendiz, mas foi imaginada, planejada e construída pelo professor para proporcionar, a este, condições favoráveis para a apropriação do novo saber que deseja ensinar.

Para analisar estes tipos de situações e as diferentes relações entre o saber, o aprendiz e o milieu, o processo de aprendizagem é decomposto em quatro momentos dominantes, as chamadas dialéticas de ação, formulação, validação e institucionalização.

A partir da TSD, pretende-se investigar as situações didáticas e /ou adidáticas que APCA proporciona, bem como, as interações entre aluno, professor e, além disso, se a mesma oferece momentos para as dialéticas de ação, formulação, validação e institucionalização. Ou seja, se a situação didática permite que o aluno aja sobre a situação, interagindo com o meio e a situação proposta, formule suas hipóteses utilizando-se de ferramentas matemáticas, apresente argumentos de forma a validar a solução do seu problema e, o professor institucionalize favorecendo a observação das relações entre o saber, o aprendiz e o meio a fim de que todos se apropriem do saber como parte de seus esquemas mentais.

## Teoria Antropológica do Didático

Segundo Chevallard (1999, apud ALMOULOUD, 2007, p. 111), essa teoria estuda o homem perante o saber matemático, e mais especificamente, perante situações matemáticas. Um motivo para utilização do termo “antropológico” é que a TAD situa a atividade matemática e, em consequência, o estudo da matemática dentro do conjunto de atividades humanas e de instituições sociais. Assim sendo, a TAD considera como elementos primitivos: Instituições (I), Indivíduos (X) e Objeto (O). Já as relações pessoais ( $R(X, O)$ ) e as relações institucionais ( $RI(O)$ ) são noções básicas nesta teoria.

Uma parte da teorização da TAD consiste no desenvolvimento da noção de organização praxeológica que, de acordo com Chevallard (1998, apud ARAUJO, 2009), acrescenta às noções acima descritas, as noções de tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria. Para ele, tais noções vão permitir modelizar as práticas sociais em geral e, em particular as atividades matemáticas.

Os tipos de tarefas (T) que se situam em acordo com princípio antropológico supõem a existência de objetos bem precisos e que não são obtidos diretamente da natureza: eles são artefatos, obras, construtos institucionais, como por exemplo, uma sala de aula, cuja reconstrução é inteiramente um problema, que é o objeto da didática (CHEVALLARD, 1998 apud ARAUJO, 2009).

Uma técnica ( $\tau$ ) é uma maneira de fazer ou realizar as tarefas. Segundo Chevallard, uma praxeologia relativa a um tipo de tarefa T necessita, em princípio, de uma técnica relativa. No entanto, ele afirma que uma determinada técnica pode não ser suficiente para realizar todas as tarefas; ela pode funcionar para uma parte  $P(\tau)$  das tarefas T e fracassar para  $T/P(\tau)$ . Isso significa que em uma praxeologia pode existir uma técnica superior a outras técnicas, ao menos no que concerne à realização de certo número de tarefas de T (CHEVALLARD, 1998 apud ARAUJO, 2009).

A tecnologia ( $\theta$ ) é definida inicialmente como um discurso racional sobre uma técnica, cujo primeiro objetivo consiste em justificá-la racionalmente. O segundo objetivo da tecnologia consiste em explicar, tornar inteligível e esclarecer uma técnica. (CHEVALARD, 1998 apud ARAUJO, 2009).

A teoria ( $\Theta$ ) tem como objetivos justificar e esclarecer a tecnologia, bem como tornar inteligível o discurso tecnológico. (CHEVALLARD, 1998 apud ARAUJO, 2009).

Neste trabalho de pesquisa a TAD é de fundamental importância para a análise das praxeologias matemáticas: tipo de exercício (T), técnica ( $\tau$ ), tecnologia ( $\theta$ ) e teoria ( $\Theta$ ) da atividade matemática proposta.

## **Objeto Matemático: Equação Diferencial Ordinária Linear Não Homogênea (EDOLNH)**

As Equações Diferenciais Ordinárias Lineares são equações que podem ser escritas da seguinte forma:

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x) \quad (1)$$

O foco deste trabalho são as Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Primeira Ordem Não Homogênea que são geralmente escritas na forma:

$$a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x) \quad (2)$$

Dividindo ambos os lados da equação (2) por  $a_1(x)$ ,  $a_1(x) \neq 0$  temos:

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x) \quad (3)$$

Onde  $p(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$  e  $q(x) = \frac{g(x)}{a_1(x)}$

A equação 3 recebe o nome de EDOLNH se  $q(x) \neq 0$ . A resolução analítica da EDOLNH de primeira ordem envolve o uso de um fator integrante. Todos os detalhes da resolução podem ser encontrados em Zill & Cullen (2008).

### **Aplicação da EDOLNH: – Lei de Resfriamento de Newton**

A lei de resfriamento de Newton diz que a taxa de variação de temperatura  $T$  de um corpo em resfriamento é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura constante  $T_m$  do meio ambiente, isto é,

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m) \quad (4)$$

em que  $k$  é uma constante de proporcionalidade.

### **Procedimentos metodológicos propostos**

Os procedimentos metodológicos constam de quatro etapas, que descrevemos a seguir:

## **Etapa 1: Análises Prévias**

Primeiramente, fez-se uma análise do sistema institucional de ensino e, pesquisas realizadas relataram que essas instituições não têm objetivos claros e, não têm cumprido o seu papel central: colocar o aluno como centro das atividades. Além disso, existe uma preocupação em cumprir o conteúdo programático pré-estabelecido e, um certo receio de implementar novas práticas metodológicas, predominando o ensino tradicional, ou seja, o ensino fragmentado sem atividades questionadoras que levem o aluno a agir, refletir e formular as suas hipóteses em relação ao objeto matemático estudado (BARBOSA, M.S.S., 2004) .

Em seguida, fez-se uma análise das metodologias de ensino referente ao objeto matemático em questão. As pesquisas consultadas relataram que, apesar de novas metodologias de ensino serem propostas, os professores ainda ocupam o papel central nas salas de aula, com uma prática docente instrumentalista, com ênfase em ensino de métodos de resolução dos tipos de equações diferenciais, priorizando mais as técnicas de resolução do que o conceito (DULLIUS, M.M.; VEIT, E.A.; ARAUJO, I.S., 2013).

Analisando este cenário e, partindo do princípio de que eu aprendo quando experimento, surgiram vários questionamentos, os quais foram definidos como questões de pesquisa: Por que a maioria dos exercícios são impostos pelos professores? Se o aluno aprende quando experimenta, será que esta aprendizagem o torna capaz de inventar o seu próprio exercício? E, o que ocorre durante este processo de criação? Dúvidas, questionamentos? Este processo contribui para o ensino e a aprendizagem do aluno?

Logo, no decorrer do desenvolvimento desta pesquisa procurou-se responder as questões abordadas nesta análise a partir da fundamentação teórico-metodológica.

## **Etapa 2: Análise a Priori**

Nesta fase, foram definidas as variáveis macrodidáticas, que permitem a caracterização e concepção da sequência didática, as quais são: incentivo à aplicação do conteúdo estudado em temas diversificados, estímulo à criação e/ou invenção e, valorização a criatividade. A partir dessas variáveis foram realizadas algumas escolhas didáticas, ou seja, decidiu-se mudar a ordem dos tópicos do plano de ensino da disciplina, o qual tem a mesma ordem da sequência de tópicos do livro da bibliografia básica, o livro de Equações Diferenciais do Zill & Cullen (2008). Neste livro primeiramente é proposto o tópico Equações Diferenciais de Primeira Ordem no capítulo 2 e, as aplicações destas equações no capítulo 3. Decidiu-se unir os capítulos 2 e 3, a fim de que os alunos

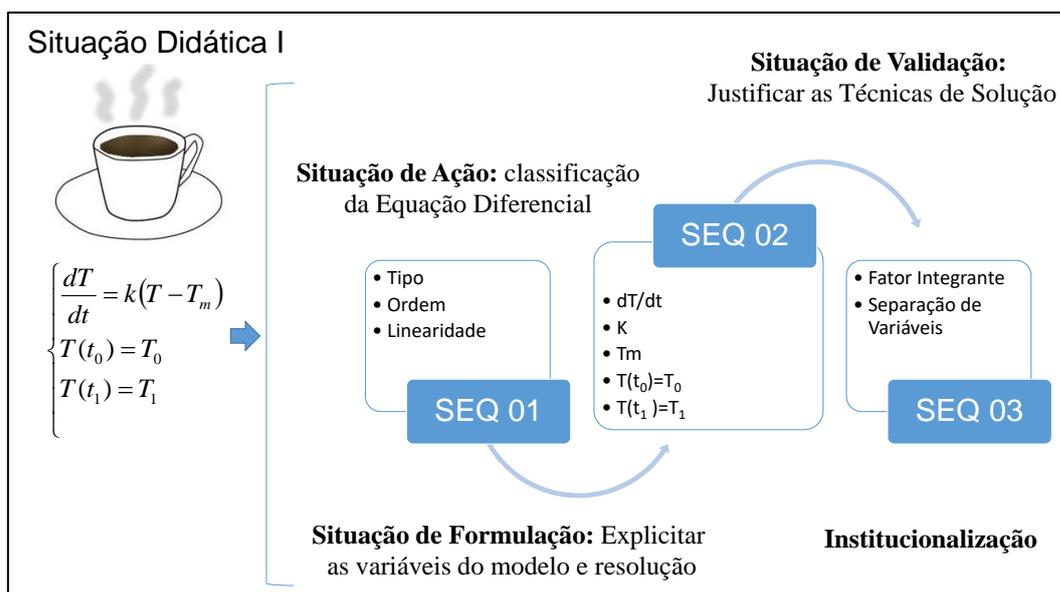
pudessem estudar as aplicações juntamente com a teoria sobre Equações Diferenciais de Primeira Ordem.

Ainda nesta fase definiu-se os sujeitos de pesquisa: alunos dos cursos de EC e, de QB. Também foram definidas as variáveis microdidáticas, importantes para a elaboração das sequências didáticas, as quais são: a) variável 1: EDO, valor escolhido: EDOLNH 1ª ordem e, b) variável 2: contexto, valor escolhido: modelo matemático da lei de resfriamento de Newton.

Neste trabalho em particular, propôs-se o estudo da resolução analítica de EDOLNH e a aplicação destas equações ao problema de resfriamento de Newton. É importante comentar que os alunos estudaram as características das EDOLNH em aulas anteriores, mas ainda não tinham estudado a resolução analítica da mesma.

Em seguida elaborou-se a Situação Didática I (SD I) e a Situação Didática II (SD II) com base na TSD, Figura 1 e Figura 2, a fim de auxiliar os alunos na construção dos conhecimentos e saberes de forma construtiva e significativa.

Figura 1: Situação Didática I



Fonte: Autores desta pesquisa

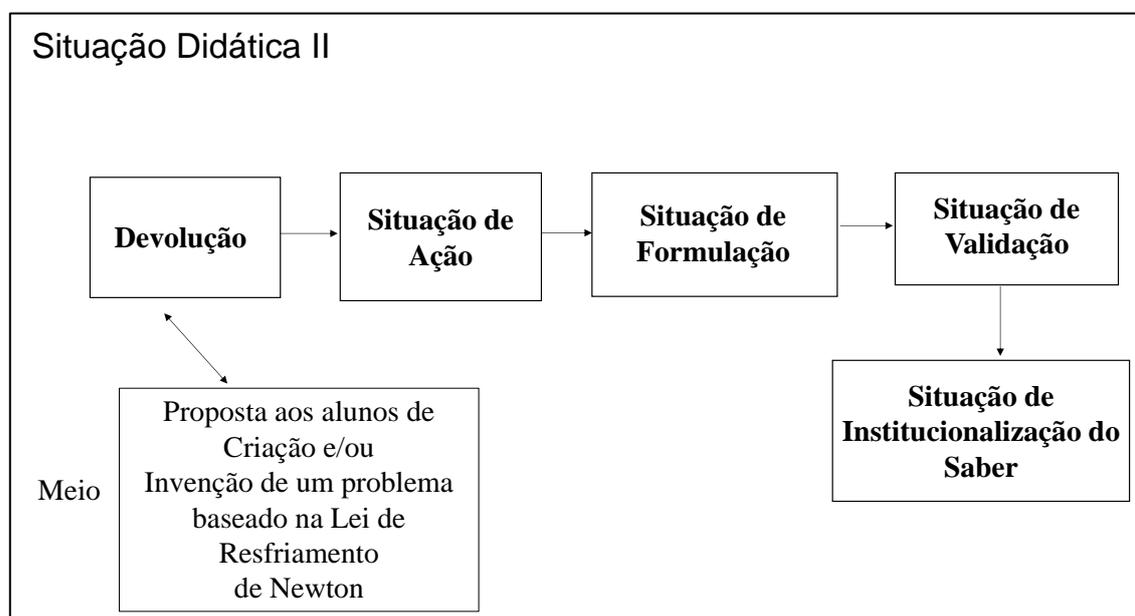
O foco da SD I é estudar o modelo matemático da Lei de Resfriamento de Newton no que diz respeito ao modelo matemático e, o significado de suas variáveis do ponto de vista matemático e físico. Sendo assim é estabelecido o meio material (modelo matemático ou Problema de Valor Inicial (PVI)) de interação entre o aluno, o saber e o professor, onde o aluno em uma situação de ação irá interagir com o meio a fim de, por exemplo classificar a equação diferencial quanto ao tipo, a ordem e a linearidade (SEQ 01) e, depois em uma

situação de formulação, onde o meio é objetivo, o aluno deverá fazer o levantamento de suas hipóteses sobre as variáveis envolvidas no PVI:  $dT/dt$ ,  $k$ ,  $m$ ,  $T_m$ ,  $T(t_0) = T_0$ ,  $T(t_1) = T_1$  (SEQ 02), em uma situação de exposição, onde o professor atuará como observador e/ou mediador. Depois em uma situação de validação, onde o meio é de referência, o aluno identificará os novos saberes

de tal forma a justificar as técnicas de solução da equação diferencial: fator integrante ou separação de variáveis (SEQ 03), em uma situação de aprendizagem, onde o professor atuará como mediador. E, finalmente em uma situação de institucionalização, em um meio de aprendizagem, o professor fará a institucionalização, em uma situação didática, cujo objetivo é que o aluno se aproprie do saber.

Após a SD I, acredita-se que o aluno será capaz de realizar a SD II e, interagir com o meio de acordo com as dialéticas de ação, formulação, validação e institucionalização, Figura 2.

Figura 2: Situação Didática II



Fonte: Autores desta pesquisa

É importante deixar claro que como o foco deste trabalho é analisar as características da APCA (SD II), apenas este momento da aula será relatado na fase experimentação e análise posteriori.

### Etapa 3: Experimentação

No início da experimentação, a turma de alunos foi dividida em grupos e, até o término dessa fase experimental mantiveram-se reunidos em grupos para facilitar a discussão entre eles, sendo que a proposta é a realização da atividade individualmente.

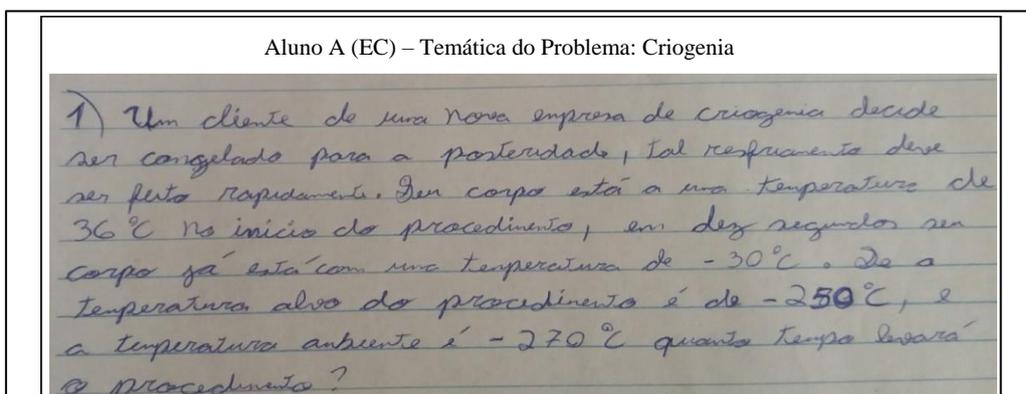
O trabalho didático do professor foi desenvolvido de acordo com a SD I (Figura 1), atuando como observador e/ou mediador em cada uma das dialéticas de ação, formulação, validação e institucionalização.

A SD II foi caracterizada pela surpresa da maioria dos alunos, já que esse tipo de atividade não é comum. Mas, ao mesmo tempo, os alunos se motivaram a inventar os seus problemas. Nesta atividade, o meio de interação com o aluno foi estabelecido a partir da atividade de criação e/ou invenção. Pode-se observar nos resultados (Figuras 3, 4, 5 e 6) que este tipo de atividade proporciona interações de cada um dos alunos com o meio, tornando evidente as interações entre o aluno, o saber e o meio e, proporcionando a mobilização dos saberes adquiridos a partir das dialéticas de ação, formulação, validação, onde o professor atua como mediador e/ou observador e, a dialética da institucionalização.

Ação, caracterizada por momentos de reflexão sobre a atividade proposta, na qual o meio se transforma em vários questionamentos: Qual tipo de problema propor? Quais dados deste problema? Como resolver o problema? Formulação, pois a tomada de decisão na dialética de ação implica em explicitar uma formulação de suas hipóteses e, além disso é preciso validar a partir da explanação do seu problema aos colegas do grupo e ao professor. Institucionalização, a partir da análise realizada pelo professor dos problemas propostos, através de perguntas e/ou respostas retomando as características significativas da equação do modelo matemático, do ponto de vista, do problema físico (aplicação) e, problema matemático (resolução analítica).

Seguem alguns resultados:

Figura 3- Problema inventado pelo aluno



Fonte: Produção do Aluno

Figura 4- Problemas inventados pelos alunos

Aluno B (QB) – Temática do Problema: Área de Química

Em uma indústria de plásticos, é utilizada uma solução de diluição, a qual é preparada dissolvendo soda cáustica (NaOH) em água, a reação que ocorre libera calor (exotérmica) para adicionar o acetato de etila, outro componente da solução, é necessário aguardar a solução A (soda + água) esfriar para que o acetato não evapore, o que diminui a eficiência da solução. Se a temperatura da solução de NaOH é de  $70^{\circ}\text{C}$  depois de reagir e a solução atinge a temperatura de  $25^{\circ}\text{C}$  depois de 40min. Sabendo que o acetato só vai evaporar a temperatura de  $47^{\circ}\text{C}$ . Qual é o tempo mínimo necessário para que se possa acrescentar o acetato, sem que o mesmo evapore? ( $T_a = 22^{\circ}\text{C}$ )

Aluno C (QB) – Temática do Problema: Ficção Científica

No planeta Kerbin existia uma civilização que vivia a temperatura de  $400\text{K}$ , mas após uma guerra veio um inverno nuclear, que abaixou a temperatura em  $50\text{K}$ . Após 5 anos, no subsolo, foi percebido que a temperatura subiu em  $3\text{K}$ . Quantos anos demorará até que a temperatura do planeta chegue a pelo menos  $399\text{K}$ ? Voltando assim a ser habitável.

Fonte: Produção do Aluno

Figura 5- Problemas inventados pelos alunos

Aluno D (EM) – Temática do Problema: Mecânica de carro

A temperatura da água dentro do radiador de um carro quando desligado está a  $120^{\circ}\text{C}$ . Após quatro minutos sua temperatura está a  $85^{\circ}\text{C}$ . A temperatura ambiente é de  $25^{\circ}\text{C}$ . Quanto tempo levará para a água chegar a  $40^{\circ}\text{C}$ ?

Aluno E (EC) – Temática do Problema: Cantina da universidade

Problema: O café de Gibba quando retirado da máquina tem a temperatura de  $78^{\circ}\text{C}$  e o gosto ruim, após 2 minutos a temperatura é  $69^{\circ}\text{C}$ , quanto tempo levará para que o café fique com a temperatura de  $58^{\circ}\text{C}$ , se a temperatura ambiente é de  $24^{\circ}\text{C}$ .

Fonte: Produção do Aluno

Figura 6- Problemas inventados pelos alunos

Aluno F (EC) – Temática do Problema: Computação

Disipadores a base de diamante, são os mais eficientes a tratamto de computação, entretanto seu custo é muito elevado, dessa forma os mesmos são substituídos por dissipadores de prata ou cobre. Logo após um computador ser iniciado a temperatura do núcleo de sua GPU é de  $32^{\circ}\text{C}$ . Após um teste de benchmark que foi executado exatamente por 5 minutos a GPU obtém a temperatura de  $47^{\circ}\text{C}$ . Sabendo que o computador se encontra em um ambiente com temperatura ambiente de exatamente  $18^{\circ}\text{C}$ , quanto tempo levaria para a GPU sobrecarregar e atingir a temperatura de  $60^{\circ}\text{C}$ ?

Aluno G (EC) - Temática do problema: Interesse Pessoal

Problema Inventado: — Temp Ambiente =  $23^{\circ}$

→ Um bife congelado é posto em uma frigideira na temperatura de  $-8^{\circ}\text{C}$ . 5 minutos depois ele está a  $19^{\circ}\text{C}$ . A temperatura de cozimento é de exatos  $73^{\circ}$ . Quanto tempo levará a cozinhar o bife?

Fonte: Produção do Aluno

Figura 7- Solução do Problemas do Aluno G (Figura 6)

The image shows a handwritten solution to the bife problem. It starts with the differential equation  $\frac{dT}{dt} = K(T - T_a)$ , where  $T_a = 23^{\circ}\text{C}$ . The initial conditions are  $T(0) = -8^{\circ}\text{C}$  and  $T(5) = 19^{\circ}\text{C}$ . The student separates variables and integrates to find the general solution  $T(t) = 23 + Ce^{-kt}$ . They then use the initial conditions to solve for  $C$  and  $k$ . The final answer is  $k = -0,12$ .

$\frac{dT}{dt} = K(T - T_a)$   
 $\rightarrow \frac{dT}{dt} = K(T - 23)$      $\rightarrow T(0) = -8^{\circ}\text{C}$      $\rightarrow T(5) = 19^{\circ}\text{C}$   
 $\frac{dT}{T - 23} = K dt$      $\int \frac{dT}{T - 23} = \int K dt$   
 $\ln|T - 23| = Kt + C$   
 $T - 23 = e^{Kt + C} = e^{Kt} \cdot e^C$   
 $T(t) = 23 + C e^{Kt}$   
 $T(0) = 23 + C e^{0} = -8$   
 $C = -8 - 23$   
 $C = -31$   
 $T(t) = 23 - 31 e^{Kt}$   
 $T(5) = 23 - 31 e^{5K} = 19$   
 $-31 e^{5K} = -4$   
 $e^{5K} = \frac{4}{31}$   
 $\ln e^{5K} = \ln \frac{4}{31}$   
 $5K = -2,12$   
 $K = -0,424$

Fonte: Produção do Aluno

#### **Etapa 4: Análise a Posteriori e Validação**

Pode-se dizer que a APCA é uma atividade em que o aluno trabalha de forma autônoma, além de ser uma atividade que provoca incertezas (na escolha do tema, por exemplo), tomada de decisão (ao ter que definir o modelo e, os parâmetros do mesmo) e, a ocorrência de fatos inesperados, como por exemplo o fato que ocorreu com o Aluno G (Figura 7), ao se deparar com a equação  $e^{-0,42t} = -1,8$ , a qual não tem solução. Pois não existe logaritmo de número negativo. A professora percebeu o erro no problema, mas apresentou o problema à turma de alunos, estabelecendo-se assim uma nova situação didática não prevista, a qual proporcionou aos alunos momentos de reflexão sobre as variáveis do modelo matemático e, levantamento de hipóteses que o auxiliaram a entender por que o Aluno G se deparou com uma equação sem solução. Depois de um tempo de reflexão um dos alunos identificou que havia algo de errado em relação a temperatura ambiente. E, que no caso do problema do colega, a temperatura ambiente deveria ser a temperatura do fogo e, não a temperatura do ambiente, no caso, a cozinha.

Considerando os saberes matemáticos desenvolvidos/adquiridos na aplicação da APCA, fizemos uma análise do ponto de vista das praxeologias matemáticas:

#### ***Tipo de Tarefa A: Criação e/ou invenção de um problema baseado no modelo da Lei de Resfriamento de Newton***

Técnica: pesquisa e/ou o conhecimento prévio do aluno sobre a temática abordada, por exemplo, Aluno A: Criogenia, Aluno B: Reações Químicas, Aluno C: Planeta Fictício, Aluno D: Temperatura do Radiador, Aluno E: Café da Cantina da Universidade, Aluno F: Dissipadores de prata ou cobre e Aluno G: Cozimento de um bife (Figuras 3,4,5 e 6)

Tecnologia: é preciso pesquisar e/ou ter um conhecimento prévio sobre a temática do problema, a fim de tomar decisões para a definição dos dados do problema, ou seja:  $T_m$  e condições iniciais de T de acordo com a temática escolhida.

Teoria: para o aluno usar tal tecnologia é preciso primeiramente ter conhecimento sobre as EDOLNH de 1ª. ordem e, sobre a lei de Resfriamento de Newton.

#### ***Tipo de Tarefa B: Solução do problema criado e/ou inventado***

O tipo de tarefa B diz respeito a análise do ponto de vista da resolução analítica da equação diferencial, Equação 4, uma vez definidos a  $T_m$  e, as condições iniciais de T referente a temática do problema.

Técnica: encontrar um fator integrante para a resolução analítica da Equação 4 ou resolvê-la por variáveis separáveis.

Tecnologia: é preciso ter conhecimentos de cálculo diferencial e integral 1, pois ambas as técnicas de resolução analítica envolvem conceitos de integração. E para determinar o tempo  $t$  em que a temperatura de um corpo qualquer atinge determinado valor é preciso resolver uma equação exponencial (ver Figura 7).

Teoria: para o aluno usar tal tecnologia é preciso ter conhecimento da equação diferencial ordinária.

Pode-se perceber a partir da análise praxeológica e, dos resultados obtidos (Figuras 3, 4,5,6 e 7) que a APCA, leva o aluno a refletir sobre o conceito, construir estratégias para o problema inventado, mobilizando saberes matemáticos para a invenção e solução dos problemas.

### **Considerações Finais**

Há indícios que a pesquisa sobre a viabilidade da APCA foi satisfatória em função dos resultados obtidos. Evidenciamos que, após se apropriar do saber, o aluno é capaz de inventar o seu problema e resolver o mesmo.

Outro resultado importante que este experimento evidenciou, é que pode ser considerado uma prática que visa também o desenvolvimento de habilidades essenciais para um futuro profissional, as quais são: inovação, criatividade e pesquisa.

Além disso, as análises realizadas a partir da TSD evidenciam que esta APCA é um tipo de situação adidática que proporciona interações entre o aluno, o saber e o meio, levando à mobilização dos saberes adquiridos através das dialéticas da ação, formulação, validação e institucionalização. E, a análise a partir da TAD, em particular das praxeologias matemáticas, contribuiu para constatar que a realização desta atividade proporciona o uso de várias técnicas, pois cada aluno inventou um problema diferente e, para a solução do mesmo teve que usar diferentes dados característicos do problema em particular, o que implica em ter que construir estratégias para o problema inventado e, mobilizar saberes matemáticos para justificar a sua técnica a partir da tecnologia e a tecnologia a partir da teoria. Esta pesquisa está em andamento e, a próxima etapa consiste em inserir a APCA no plano de ensino de EDO e, investigar o impacto no aprendizado dos alunos a partir de avaliações.

## Referências

- ALMOULOUD, S, A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Editora UFPR, 2007
- ARAUJO, A.J. **O Ensino de Álgebra no Brasil e na França: Um Estudo Sobre o Ensino de Equações do 1º. Grau à Luz da Teoria Antropológica do Didático**. (Tese de Doutorado). UFPE, 2009.
- ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique. Recherches em Didactique des Mathématiques, Grenoble, v. 9, n. 3, p. 281-308, 1988.
- BARBOSA, M.S.S. **O papel da escola: Obstáculos e desafios para uma educação transformadora**. (Dissertação de Mestrado). UFRGS, 2004.
- D.G.Zill, M.R. Cullen. **Equações Diferenciais**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2008, p. 70.
- DULLIUS, M. M.; VEIT, E.A.; ARAUJO, I.S. Dificuldades dos Alunos na Aprendizagem de Equações Diferenciais Ordinárias. *ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, v.6, n.2, p.207-228, 2013.
- MORÁN, J. Mudando A Educação com Metodologias Ativas. In: **Coleção Mídias Contemporâneas. Convergências Midiáticas, Educação e Cidadania: aproximações jovens**. Org. SOUZA, C.A.; MORALES, O.E.T, UEPG/PROEXT, 20015, vol.11, p.15.