EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i5p80-98

Praxéologies de formation, praxéologies pour la formation et leur écologie - La justification des pratiques comme condition et comme contrainte

Training praxeology, praxeology's for training and their ecology - The justification of practices as a condition and as a constraint

MICHELE ARTAUD[1]

Résumé

En nous plaçant dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique, et en prenant comme pierre de touche la notion de praxéologie (ensemble de savoir-faire et de savoirs qui permettent de justifier, de produire, de rendre intelligibles ces savoir-faire), nous examinerons dans cette conférence certains éléments des praxéologies de formation des enseignants ainsi que leur viabilité écologique. Nous mettrons notamment en évidence l'influence du savoir comme condition/contrainte d'existence des praxéologies ainsi que celle de l'existence ou de la non existence de certaines praxéologies pour la formation.

Mots-clé : *Praxeologie de formation ; Praxeologie pour la formation ; Validité écologique.*

Resumo

Colocando-nos no âmbito da teoria antropológica do didático, e tomando como apoio a noção de praxeologia (um conjunto de saberes-fazer e saberes que permitem justificar, produzir, tornar esses saberes-fazer inteligíveis), discutiremos nesta conferência alguns elementos das praxeologias de formação de professores e sua viabilidade ecológica. Destacaremos, em particular, a influência do saber como condição/restrição da existência de praxeologias, bem como da existência ou não de certas praxeologias para a formação.

Palavras-chaves: *Praxeologia de formação; Praxeologia para a formação; Validade ecológica.*

[1] ADEF, Aix-Marseille Univ., France, michele.artaud@univ-amu.fr

Resumen

Ubicándonos en ámbito de la teoría Antropológica de lo didáctico, y tomando como base a la noción de praxeología (Un conjunto de saberes-hacer y saberes que permiten justificar, producir, convertir esos saberes-hacer inteligibles), discutiremos en esta conferencia algunos elementos de las praxeologias de formación de profesores y su viabilidad ecológica. En particular, destacaremos la influencia del saber como condición / restricción de la existencia de praxeologías, así como la existencia o no de ciertas praxeologías para la formación.

Palabras claves: *Praxeología de formación; Praxeología para la formación; Validez; ecológica.*

Abstract

In the framework of the anthropological theory of the didactic, and taking as a touchstone the notion of praxeology (set of know-how and knowledge that justify, produce, make intelligible these know-how), we examine in this conference some elements of teacher training praxeologies as well as their ecological viability. We will highlight the influence of knowledge as a condition/constraint of existence of praxeologies, as well as that of the existence or non-existence of certain praxeologies for training.

Keywords*: training Praxeology; Praxeology for training; Ecological validity*

Introduçtion

Je vous remercie de cette invitation, qui m'a donné l'occasion de venir une nouvelle fois au Brésil. Comme l'indique le titre, nous allons examiner ensemble une question d'écologie de praxéologies de formation et pour la formation, soit principalement ici des conditions et des contraintes d'existence de ces praxéologies. Je considérerai pour cela le domaine de réalité que constitue la formation initiale des professeurs de mathématiques en France, même si beaucoup de ce qui va être dit vaut également pour la formation continue et sans doute pour le Brésil, l'Argentine, le Mexique, le Pérou ou d'autres pays d'Amérique Latine.

La théorie anthropologique du didactique (TAD) dans laquelle je me place ici est une théorie qui permet d'outiller le professeur dans une perspective d'analyse, d'évaluation et de développement de ses gestes professionnels (Artaud, 2007 & 2018) mais aussi des conditions et des contraintes d'existence, de viabilité de praxéologies relatives à ces gestes professionnels (Chevallard, 2007). Je reviendrai rapidement plus tard sur la notion de praxéologie mais on peut considérer en première approximation qu'il s'agit d'un ensemble de savoir-faire et de savoirs.

En tant que chercheur en TAD, on peut donc à la fois produire des « ingénieries de formation », que ce soit au niveau des écoles de formation ou des systèmes didactiques inclus dans ces écoles, et étudier leur viabilité et leur efficacité ou encore étudier la viabilité et l'efficacité de gestes professionnels existants. Dans ces travaux, la question de l'écologie de ce que l'on produit ou observe, soit principalement des conditions et des contraintes d'existence, est essentielle et c'est à une partie de ces conditions et contraintes que nous allons nous attacher. Dans le cours de ma conférence, je dirai quelques mots des notions de TAD qui me paraissent indispensables pour comprendre ce que je présente aujourd'hui.

1. La notion de praxéologie

La première notion est celle de *praxéologie* (Chevallard, 1998 & Artaud 2018). Il s'agit d'une notion qui permet de modéliser l'activité humaine à partir de quatre composantes. Des *types de tâches*, notés T_i, qui sont des ensembles de tâches du même type que l'on a à accomplir. En voici quelques-uns : Résoudre une équation du premier degré à une inconnue ; Construire la médiatrice d'un segment ; Résoudre une équation différentielle ;

Étudier la convergence d'une série ; Écrire un algorithme répondant à un problème de tri ; Mettre la table ; Faire la vaisselle ; Marquer un penalty.

Les types de tâches peuvent être de taille très variable : par exemple, « Construire une figure » est également un type de tâches, qui comprend de nombreux *sous-types de tâche*s parmi lesquels on peut citer « Construire une figure du plan », « Construire un triangle », « Construire un triangle isocèle » qui sont eux-mêmes de taille très variable.

La seconde composante est constituée des *techniques*, soit des manières de faire (*techne* en grec signifie manière de faire), des façons d'accomplir les types de tâches. On les note τ_i. Voici un exemple de technique, relative à la construction de la médiatrice d'un segment.

Si on a comme instrument une règle graduée et une équerre, on place le milieu du segment, I, à la règle graduée ; on place le sommet de l'angle droit de l'équerre sur I de façon à ce qu'un côté de l'angle droit soit sur le segment. On place un point, C, le long de l'autre côté de l'angle droit et on trace (CI).
Si on a comme instruments une règle et un compas, on trace deux cercles de rayon la longueur du segment, centrés sur chacune des extrémités du segment. Ces deux cercles se coupent en deux points, C et D. On trace (CD).
Les techniques varient selon les institutions. Mais dans une institution donnée, on a en général une seule technique pour un type de tâches donné. L'impression qu'il y a plusieurs techniques pour un même type de tâches dans une institution donnée peut provenir principalement soit d'un paramétrage institutionnel inadapté, soit d'un défaut d'analyse des types de tâches et des techniques (Artaud, 2010), mais je ne détaillerai pas ce point ici.

L'analyse d'une technique dépend de ce qui est connu (par exemple ici, on suppose connue la construction d'un cercle ; on dira que cela fait partie du *milieu*) et, même si elle peut se présenter sous forme algorithmique, toute technique n'est pas un algorithme. Enfin, une technique a une *portée*, soit un ensemble de tâches du type qu'elle permet d'accomplir, et cette portée est forcément limitée. Ici, par exemple, la technique ne permet pas d'accomplir le type de tâches si je n'ai ni compas, ni règle, ni équerre...

La troisième composante d'une praxéologie est une ou plusieurs *technologies*, soit un ou des discours justifiant, produisant ou rendant intelligible la ou les techniques, notées avec la lettre θ. Et ce ou ces discours est (sont) à son (leur) tour produit(s), justifié(s), rendu(s) intelligible(s) par un discours, voire plusieurs, la ou les *théorie(s)*, qui constitue(nt) la quatrième et dernière composante du modèle et sont notées avec la lettre Θ.

Le discours technologique qui justifie, produit, rend intelligible la technique de construction de la médiatrice précédente repose principalement sur les deux éléments suivants :

La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment passant par le milieu du segment.

La médiatrice d'un segment [AB] est l'ensemble des points équidistants de A et deB.

On notera que l'on ne signale pas la définition d'un cercle parce qu'on suppose que cela fait partie du milieu. En dehors de ces ingrédients, le discours justificatif ou producteur de la technique suppose que les éléments technologiques soient établis. Par exemple ici, si l'on suppose que l'on a défini la médiatrice comme droite perpendiculaire au segment et passant par son milieu, on peut dire que si M est sur la médiatrice, Δ, il est sur l'axe de symétrie du segment, et donc l'image de [MA] par la symétrie axiale d'axe Δ est [MB], ce qui donne que MA = MB puisque la symétrie axiale conserve les distances. Réciproquement, si M est un point équidistant de A et de B, c'est le sommet d'un triangle isocèle de base [AB] ; On a donc MA=MB, ∠MAB=∠MBA et [MA] et [MB] sont du même côté de (AB). D'où M est sur l'axe de symétrie du segment [AB], donc sur la médiatrice.

C'est l'établissement des résultats technologiques qui permet de voir apparaître ce qui justifie, produit ou rend intelligible la technologie, c'est-à-dire la théorie. Dans l'exemple choisi, on voit clairement que la théorie comprend la symétrie axiale et ses propriétés, et notamment la conservation des distances et des angles géométriques.

On voit ainsi qu'une praxéologie est une pratique, une *praxis*, ensemble de types de tâches et de techniques permettant d'accomplir ces types de tâches, cette pratique étant justifiée, produite, rendue intelligible par un savoir, un *logos*, soit des discours, technologies et théories, qui justifient, produisent, rendent intelligible la pratique. L'un des apports essentiels de cette modélisation par rapport à une modélisation dichotomique en terme de savoir-faire et de savoir est que les deux sont donnés d'emblée comme indissociables, organiquement et fonctionnellement liés, et que les praxéologies de recherche produites par la TAD permettent de porter une attention particulière à *l'articulation praxis/logos* et aux *conditions et* aux *contraintes* qui favorisent, permettent ou au contraire gênent, empêchent l'existence de praxéologies dans une institution. Venons-en donc à la question écologique qui nous occupe.

2. Un problème écologique

Les praxéologies de formation ou les praxéologies professionnelles que permet de produire la didactique entrent en concurrence, explicitement ou implicitement, avec d'autres praxéologies produites ou légitimées par la profession (Cirade, 2006) ou encore par le ministère. Les différences entre ces praxéologies tiennent pour beaucoup dans les rapports institutionnels (Chevallard, 2003) qu'elles entretiennent avec les savoirs. Ces différences dans les rapports apparaissent dans les discours qui produisent, justifient et les rendent intelligibles les pratiques, soit encore le *logos* des praxéologies.

Ce sont les conditions et les contraintes liées au *logos* des praxéologies que nous examinerons en illustrant les assertions suivantes :

> L'existence « sans accrocs » d'une pratique suppose un *logos* adapté.
> Certains éléments du *logos* vont gêner voire empêcher l'existence d'une pratique.
> La modification d'une pratique suppose la modification du *logos* relatif à cette pratique.
> La modification d'une praxéologie dépend de conditions et de contraintes dont certaines – qui ne sont pas les moins influentes – « dépassent » le cadre de l'institution dans laquelle cette praxéologie existe.

L'illustration de ces assertions se fera à partir d'exemples de praxéologies mathématiques et didactiques.

2.1. Praxéologies didactiques

Les praxéologies didactiques, sont les praxéologies d'étude ou de direction d'étude d'une praxéologie mathématique donnée (notées PM ou OM pour organisation (praxéologique) mathématique). Elles s'analysent en prenant comme repère le *modèle des moments de l'étude* (Chevallard, 2007 & Artaud 2018) qui donne six fonctions qu'un processus d'étude « complet » doit réaliser. Je les présenterai pour faciliter l'exposition à partir d'une praxéologie mathématique qui comprend un seul type de tâches, une praxéologie mathématique ponctuelle, et dans un ordre qui aide à comprendre le modèle, qui n'est donc qu'un ordre d'exposition.

Le premier *moment* que je présenterai est celui *de la première rencontre :* on rencontre le type de tâches T comme type de tâches problématique, soit un T que l'on ne sait pas faire ou pas bien faire. Il est important de noter que la première rencontre est avec le type de tâche de l'OM – et pas avec la technique ou la technologie... ; et le terme premier ne signifie pas « toute première fois » au sens chronologique mais une rencontre qui signe le début d'un processus d'étude, début au moins potentiel (peut-être que le processus d'étude ne se réalisera pas). Une fois *T* rencontré, on l'explore à travers un certain nombre de ses spécimens (soit des tâches du type *T*) et on élabore au moins un embryon de technique : c'est le *moment exploratoir*e. On élabore alors la justification des techniques (technologie et théorie) : c'est le *moment technologico-théorique*. Le *moment de travail* de l'OM a pour fonction de se mettre en main l'OM (on s'entraîne) mais aussi de la faire travailler, ce qui peut conduire à la retoucher. Le *moment de l'institutionnalisation* permet de mettre en forme l'OM et de l'*amalgamer* aux OM antérieurement produites. La fonction d'amalgamation consiste en particulier à rassembler certains types de tâches en un seul, ce qui va conduire à agréger, rassembler et articuler, des techniques, mais aussi des technologies. *Le moment de l'évaluation* enfin permet d'évaluer l'OM et la maîtrise qu'on en a ; la fonction d'évaluation de l'OM est importante : on regarde notamment si les techniques sont suffisamment fiables et robustes, si la technologie est suffisamment développée, etc.

On notera qu'un moment peut se réaliser en plusieurs épisodes et que, je le répète, l'ordre des moments est un ordre d'exposition : par exemple, un (épisode du) moment de l'institutionnalisation peut précéder un (épisode du) moment de première rencontre. C'est le cas notamment dans les organisations didactiques de types cours magistral/travaux dirigés. J'ajoute qu'un extrait de compte rendu de séance peut concourir à la réalisation de plusieurs moments, ce qui fait dire que les moments peuvent être considérés comme des dimensions de l'espace de l'étude.

Un directeur d'étude (un professeur par exemple) est ainsi amené à accomplir six grands types de tâches didactiques : Réaliser un moment de première rencontre (avec le T de l'OM) ; Réaliser un moment exploratoire ; Réaliser un moment technologico-théorique ; Réaliser un moment de travail de l'OM ; Réaliser un moment de l'institutionnalisation ; Réaliser un moment de l'évaluation. Cela permet d'organiser à la fois l'analyse mais aussi la construction, la formation des praxéologies professionnelles : on construira en formation des techniques de réalisation de ces différents moments en observant, en analysant, en évaluant et en développant des techniques de réalisation des moments par exemple. Nous nous arrêterons ici sur la réalisation du moment technologico-théorique.

2.2. Réalisation du moment technologico-théorique

Dans la réalisation du moment technologico-théorique, un type de tâches est essentiel : s'assurer qu'un résultat est vrai, que nous noterons T_V. Examinons des éléments de praxéologies didactiques relatives à ce type de tâches T_V.

Pour cela, nous observerons d'abord une pratique existant autour de T_V à partir d'un extrait d'une séance en classe de 4e en France (ce sont des élèves de 13- 14 ans) qui porte sur le thème du cercle.

> II) Cercle de diamètre donné
> P : « Prenez un cercle de rayon 3 cm par exemple, de diamètre [AB] ». Elle le fait (au compas). Un élève : « Le centre, on peut l'appeler O ? » P approuve et ajoute : « Et vous choisissez un point M sur ce cercle, distinct de A et B ».
> P : « D'après vous, quelle est la caractéristique de ce triangle ? » Des élèves : « Rectangle ! » D'autres : « Isocèle ! » Cette dernière réponse est vite rejetée.
> En dialogue avec les élèves, P écrit :
> Conjecture : Le triangle AMB semble être rectangle en M.
> Elle rajoute près de la figure la légende : « [AB] diamètre ». Un élève :
> " Madame, c'est pas AB, sans crochets ? " P répond, évoque le cas analogue du mot *rayon*, etc.
> Dans l'énoncé de la conjecture, elle souligne le mot " semble ", puis demande : " Qu'est-ce qu'il faut faire ? "
> Des élèves : " Le démontrer ! "
> P reprend : " Le démontrer pour s'en persuader ! "

On a donc là l'expression d'une technique pour s'assurer qu'un résultat est vrai : il faut le démontrer. Que figure-t-il alors dans la justification de cette technique ? En mathématiques, pour être certain d'un résultat, « pour s'en persuader » dit le professeur, il faut le démontrer. On remarque qu'ici nous sommes dans un cas où le *logos* est peu développé et où la technique est quasiment autojustifiée. On pourrait ajouter dans le *logos* permettant de justifier cette pratique : la démonstration est caractéristique, emblématique des mathématiques.

Considérons toujours le même type de tâches, T_V : s'assurer qu'un résultat est vrai. Voici une technique alternative. Pour s'assurer qu'un résultat est vrai on peut le vérifier expérimentalement et/ou montrer qu'il est déductible de la théorie dont on dispose. Cela suppose par exemple qu'on puisse le vérifier seulement expérimentalement, ou seulement le montrer déductivement ou les deux. On voit donc apparaître deux sous-types de tâches dans T_V, et notamment le type de tâches T_d : s'assurer qu'un résultat est déductible d'une théorie donnée. La technique associée à T_d sera alors : Pour s'assurer qu'un résultat est déductible d'une certaine théorie, on produit une démonstration reposant sur cette théorie.

Dans le cas précédent, cela aurait pu conduire à demander aux élèves de faire un cercle de diamètre « quelconque », choisi par chaque élève ; on aurait alors une expérience faite *n* fois (*n* étant le nombre d'élèves) ; et on pourrait confirmer ce résultat par une simulation de l'expérience avec un logiciel de géométrie dynamique. À ce moment-là, on est certain que le *résultat* est *vrai*. En revanche, on ne sait pas si le *résultat* est *déductible de la théorie dont on dispose*, et c'est cela qui constitue la conjecture. Quel *logos* permet alors de produire, de justifier cette pratique ? En voici les éléments principaux (Chevallard, 2013).

On considère un système $\mathcal{S}$, qui peut être de nature biologique, physique, mathématique, etc., et une assertion θ à propos de $\mathcal{S}$. On construit une théorie déductive $\mathcal{T}$ de $\mathcal{S}$, c'est-à-dire une théorie telle que l'on ait, *au moins*, θ vraie dans $\mathcal{S}$ si θ est *déductible* dans $\mathcal{T}$, c'est-à-dire est un *théorème* de $\mathcal{T}$ (au sens large, en comptant les axiomes de $\mathcal{T}$ comme des théorèmes). On peut alors, pour établir que θ est *vraie* dans $\mathcal{S}$, chercher à établir que θ est *déductible* dans $\mathcal{T}$ à la condition que l'on ait pu construire une théorie déductive $\mathcal{T}$ adéquate. La construction de cette théorie, $\mathcal{T}$, suppose essentiellement qu'on y mette des assertions vraies relatives à $\mathcal{S}$, assertions qui auront alors le statut d'axiome, que l'on aura établies en « interrogeant » le système $\mathcal{S}$, c'est-à-dire en procédant à une expérimentation sur $\mathcal{S}$. En d'autres termes, la théorie déductive $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ sera elle-même fondée sur un mécanisme d'*induction à partir de résultats de l'expérience*. En pratique, on devra construire la théorie du système $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ dans des allers et retours incessants entre déduction théorique et expérimentation : on met dans $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ des assertions que l'expérimentation a prouvé raisonnablement être vraies dans $\mathcal{S}$, et, en sens inverse, on vérifiera expérimentalement les théorèmes θ établis déductivement dans $\mathcal{T}(\mathcal{S})$, pour s'assurer que $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ est « fiable » dans ce qu'elle nous révèle sur $\mathcal{S}$.

En d'autres termes, c'est pour voir si un résultat est déductible qu'on le montre ; pour voir s'il est vrai dans le système, on peut se contenter d'expérimenter. Mais le travail du mathématicien est d'articuler les deux de façon à construire une théorie qui puisse parler de manière fiable du système.

Ce *logos* est manquant dans la profession de professeur. Pour le mettre en évidence, je présenterai un extrait d'un document de la collection *Ressources pour le socle commun* des programmes du collège (élèves de 11-15 ans) publié en 2008.

> *Il est important, pour gérer la double exigence du programme et du socle commun, de continuer à valoriser les approches empiriques.*

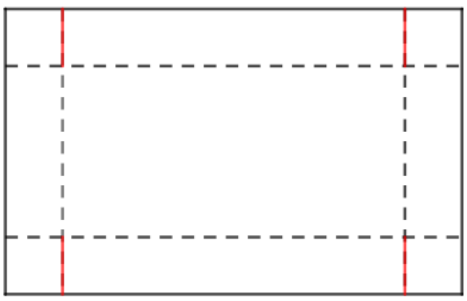
En effet, progressivement au cours de leur formation, les élèves prennent conscience que les mathématiques permettent de réaliser un certain nombre de tâches sans avoir à « tâtonner ». A côté de cela, ils sont aussi convaincus, sans avoir toujours l'occasion ou la permission de le dire, que des méthodes empiriques permettent d'obtenir des résultats très satisfaisants en pratique. Par exemple, on peut voir des élèves déterminer le centre d'un cercle dans une excellente approximation, sans recourir au tracé des médiatrices. Le professeur de mathématiques perd souvent en crédibilité s'il ne fait aucune place à ces approches empiriques qui sont communément reconnues comme efficaces dans la vie courante (pour trouver le centre d'un disque en papier, on peut le plier en quatre par exemple).

Au contraire en amenant les élèves à comparer les deux types d'approche, il est possible de :

- valoriser des aptitudes qui relèvent du socle,
- montrer les limites de la résolution empirique (tout en lui reconnaissant une efficacité),
- plaider plus honnêtement et plus efficacement pour des méthodes mathématiques rigoureuses.

Le grand absent de ce discours est le fait que l'*enjeu de l'enseignement des mathématiques* est l'obtention d'une solution pour des *type de problèmes* de façon à permettre le *développement de la théorie mathématiques*. En effet, si l'enjeu du travail de la classe est d'obtenir une solution à un problème, alors la démarche dite empirique suffit dans nombre de cas et la formulation en termes de rigueur est mal adaptée. Par exemple pour la construction de la médiatrice, une technique « à la règle et au compas » n'est pas plus rigoureuse que celle qui consiste à plier le segment en superposant les extrémités : elles ne sont pas produites, justifiées par le même ingrédient technologique et n'ont surtout pas la même portée. La seconde suppose que l'on puisse plier la feuille où est tracée le segment et qu'on ait un dispositif pour superposer les extrémités du segment tandis que la première suppose que l'on ait un compas adapté à la dimension du segment par exemple. C'est donc, répétons-le, le fait que l'*enjeu* est l'obtention d'une solution pour un *type de problèmes* de façon à permettre le *développement de la théorie ou la vérification que la théorie dont on dispose est fiable* pour l'examen du système qui suscite la fabrication d'une praxéologie « mathématiquement contrôlée ».

Supposons par exemple que l'on cherche à déterminer le volume le plus grand possible de boîtes parallélépipédiques sans couvercle fabriquées à partir d'une feuille A4 de la façon suivante :



On découpe suivant une longueur *c* (figurée par le trait rouge) et on replie suivant les pointillés de façon à obtenir une boite sans couvercle de forme parallélépipédique.

À partir du moment où l'on connaît les dimensions d'une feuille A4, et que l'on identifie que, une fois choisie la hauteur, la largeur et la longueur de la boîte sont obtenues en enlevant à la longueur et la largeur de la feuille A4 deux fois la hauteur, le tableur donne le résultat à une précision suffisante pour construire une boîte.

c	(21-2c)	29,7-2c	V		c	(21-2c)	29,7-2c	V
1	19	27,7	526,3		3,5	14	22,7	1112,3
2	17	25,7	873,8		3,6	13,8	22,5	1117,8
3	15	23,7	1066,5		3,7	13,6	22,3	1122,136
4	13	21,7	1128,4		3,8	13,4	22,1	1125,332
5	11	19,7	1083,5		3,9	13,2	21,9	1127,412
6	9	17,7	955,8		4	13	21,7	1128,4
7	7	15,7	769,3		4,1	12,8	21,5	1128,32
8	5	13,7	548		4,2	12,6	21,3	1127,196
9	3	11,7	315,9		4,3	12,4	21,1	1125,052
10	1	9,7	97					
10,5	0	8,7	0					

On voit nettement que la hauteur donnant le volume maximum est entre 3 et 5 cm, puis autour de 4 cm puis, si on diminue encore le pas, entre 4,04 et 4,05 cm et on pourra donc choisir $c = 4$ cm compte tenu de la précision de la découpe. Bien entendu, nous ne présentons ici qu'une petite partie de l'expérimentation numérique. C'est si l'on veut constituer une technique permettant de résoudre des problèmes du même type (déterminer le maximum d'une grandeur) que l'on va être amené à introduire la notion de fonction et à constituer une technique permettant d'obtenir le maximum d'une fonction d'une variable réelle.

Il y a évidemment des cas où l'expérimentation, ou sa simulation, n'est pas possible ou encore très coûteuse. Le seul recours est alors la théorie... Mais c'est rarement le cas dans l'enseignement secondaire et c'est parce qu'on aura confiance dans la théorie construite jusque-là par une dialectique entre expérimentation-simulation de l'expérimentation et théorisation que l'on pourra s'en passer.

Revenons à notre problème écologique, soit ici les conditions et les contraintes qui permettent, qui favorisent ou au contraire qui gênent, qui empêchent l'existence d'une praxéologie autour du type de tâches Tv. Usuellement en TAD, on repère les conditions et les contraintes sur une échelle, l'échelle de codétermination didactique (Chevallard, 2013) qui va de l'humanité au système didactique.

Humanité

↓↑

Civilisation

↓↑

Société

↓↑

École

↓↑

Pédagogie

↓↑

Système didactique

Cette échelle a surtout l'intérêt, et la vertu même, de rappeler que tout ne se passe pas dans le système didactique et qu'il faut regarder au-delà. Je ne détaillerai pas davantage ici, Annie Bessot en ayant parlé dans sa conférence. Je donnerai seulement un exemple de conditions relevant de l'humanité : l'homme est quelqu'un qui nait « non achevé », ce qui fait que le didactique est partout dense dans l'humanité (Chevallard, 2016). J'ajoute que des niveaux les plus spécifiques peuvent être présents sous le système didactique de la façon suivante. L'étude de la question Q, enjeu de l'étude dans le système didactique, va mobiliser des disciplines et chaque discipline se laissera scinder en domaines, secteurs, thèmes, sujets.

Les conditions que nous avons mises en évidence jusqu'ici sont situées principalement au niveau du système didactique : des ingrédients praxéologiques relatifs à la dialectique entre expérimentation et théorisation manquent dans la position de professeur pour que la pratique alternative existe. Mais il y a des conditions d'autres niveaux qui peuvent également influer sur l'existence des praxéologies. En voici un exemple dans le cas du type de tâches T_V. Il s'agit d'un extrait d'une fiche descriptive du métier de professeur de mathématiques et sciences physiques de l'Onisep, qui est un organisme public d'information destiné à l'orientation des jeunes.

> Transmettre un savoir
>
> La mission est la même pour tous les professeurs, quelle que soit leur discipline : transmettre des connaissances, contribuer à l'éducation des élèves et les former en vue de leur insertion sociale et professionnelle. Néanmoins, la pratique professionnelle varie en fonction de la matière enseignée. Ainsi, le professeur de maths donne surtout des cours magistraux, très théoriques. Il dispense des savoirs abstraits (analyse, géométrie), même s'il familiarise les élèves au raisonnement mathématique par ses démonstrations. A lui de rendre accessible sa discipline, de trouver une pédagogie adaptée (méthode, exercices…).
>
> Organiser des travaux pratiques
>
> En sciences physiques et en chimie, le professeur a recours aux expériences et aux activités en petits groupes : des travaux pratiques qui permettent aux élèves de mieux appréhender la portée

d'une loi ou d'une formule. Ainsi, il va leur apprendre à manier des appareils (voltmètre, ampèremètre…) et des produits (acide chlorhydrique, soude…), et les amener à observer des situations réelles, à émettre des hypothèses, à tirer des conclusions : il leur enseigne la démarche expérimentale, en somme.

Cette fiche a été modifée ; voici ce qu'on peut lire aujourd'hui (Onisep, 2018) :

Savoirs abstraits et théoriques d'un côté, connaissances concrètes et expérimentales de l'autre. Le professeur de mathématiques ou de physique-chimie doit adapter sa méthode pédagogique aux spécificités de sa discipline. Les mathématiques étant souvent considérées comme difficiles, le professeur doit les rendre attrayantes, notamment en utilisant un maximum d'exemples concrets. En physique-chimie, il s'appuie sur des expériences et des travaux pratiques pour mettre en évidence la portée de certaines lois ou formules.

Si c'est cela qui prévaut dans la société sur ce que fait un professeur de mathématiques, alors la praxéologie alternative autour de Tv que nous avons présentée plus haut aura du mal à exister, et il faudra créer en formation des conditions très particulières pour avoir quelque chance de la faire exister. Pour le dire autrement, en précisant quelque peu : si la société a ce rapport institutionnel à ce qu'est un professeur de mathématiques, et si les jeunes qui arrivent pour se former ont un rapport conforme à ce rapport institutionnel, la praxéologie alternative autour de T_V mise en évidence précédemment entrera en conflit avec ce rapport institutionnel. On aura alors le plus grand mal à créer les conditions de changement de ce rapport si la praxéologie alternative n'existe pas dans la profession de professeur.

Nous examinerons maintenant des éléments liés aux praxéologies mathématiques, en prenant l'exemple du calcul algébrique au collège.

3. Influence du logos sur l'existence de praxéologies mathématiques

Yves Chevallard a mis en évidence l'intérêt, et même la nécessité, de considérer l'algèbre élémentaire au collège comme science des *programmes de calculs* sur les nombres (Chevallard, 1990 & 2005). Un programme de calcul opère sur les nombres d'une manière déterminée, selon un certain programme. En voici un exemple :

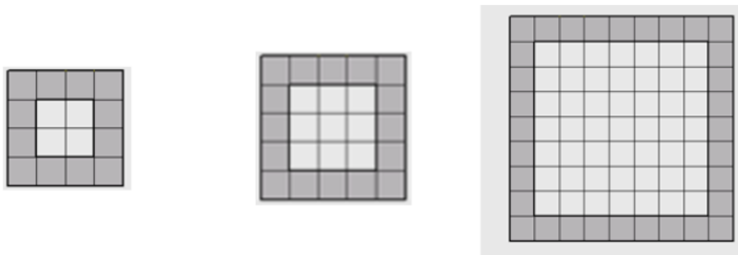
P : étant donné quatre entiers, multiplier la somme des carrés des deux premiers par la somme des carrés des deux suivants.

Les programmes de calculs donnent un milieu pour faire émerger l'algèbre élémentaire puisque leur mathématisation conduit à l'expression algébrique d'un programme de calcul. Ainsi, l'expression algébrique du programme P est $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$. Deux types de tâches apparaissent alors centraux :

> Étant donné deux programmes de calcul P, déterminer un programme de calcul Q équivalent à P mais plus adéquat, mieux adapté, que P ; (On dira que deux programmes P et Q sont équivalent si $P(x, y, ...) = Q(x, y, ...)$ pour tous $x, y, ...$ dans un domaine numérique donné $\mathcal{D}$)
>
> Étant donné un programme de calcul, P, trouver un nombre x tel que $P(x) = k$.

Le premier type de tâches permet de donner une raison d'être à la simplification ou au développement d'une expression algébrique, ou encore à la factorisation, le type de tâches « montrer que deux programmes de calcul sont équivalents apparaissant comme un sous-type de taches essentiel tandis que le second type de tâches donne une raison d'être au calcul équationnel, à la résolution d'équation. La notion de programme de calcul, et celle d'équivalence de deux programmes de calcul, constituent ainsi une partie essentielle de l'environnement technologico-théorique de l'organisation mathématique à mettre en place au collège. Pour avancer, nous examinerons une séance mettant en place une organisation mathématique autour de l'algèbre élémentaire à partir de la modélisation d'une situation qui conduit à déterminer une grandeur.

La situation est la suivante : il s'agit de déterminer le nombre de carreaux colorés dans les configurations du type suivant.



Une fois la modélisation effectuée, les classes sont face à plusieurs expressions algébriques de programmes de calcul conduisant à la détermination de cette grandeur. Dans deux classes, l'une dont l'étude est dirigée par un professeur expérimenté et l'autre par un professeur stagiaire, la notion de programme de calcul n'a pas été explicitement mobilisée pour réaliser les épisodes du moment exploratoire et c'est l'*ostensif* (Chevallard, 1994 ; un ostensif est quelque chose qui sert à montrer) « formule » qui est mobilisé – et le non-ostensif associé. Dans ces deux classes, se pose alors la question de montrer que ces « formules sont les mêmes » ou encore que « ces formules sont égales ».

Dans la classe du professeur expérimenté, qui a donné peu de milieu sur les programmes de calcul et a fait émerger les formules de façon magistrale, la dévolution de la question n'est pas véritablement réalisée comme en témoigne la fin de la séance :

> P : Vous devez vérifier que ces formules sont bien les mêmes. Vous avez cinq minutes.
> (*Quelques élèves tentent de mettre plusieurs valeurs à x et de comparer. Ils disent que ça suffit. Ça sonne)*
> P : On reprend ça demain, à la maison vous montrez pourquoi ces formules sont bien identiques.
> (*Un élève dit un peu plus bas « Je ne vois pas pourquoi on doit montrer que c'est les mêmes, on le voit bien que ce ne sont pas les mêmes ! Elle les a écrites !*) (Girard, 2017, p. 68)

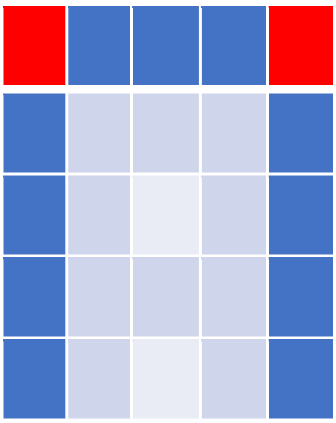
La première rencontre avec le type de tâches « montrer que deux formules sont les mêmes » est clairement ratée… elle n'a pas eu lieu.

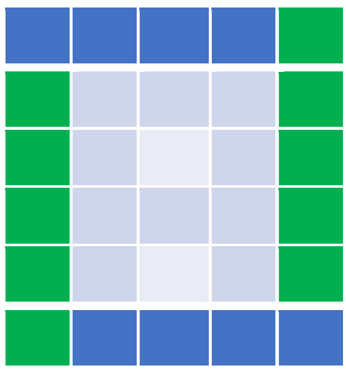
Dans la classe du professeur stagiaire, dans laquelle les élèves ont davantage de milieu sur les programmes de calcul, la difficulté est moindre mais elle résiste :

> P : Vous écrivez dans vos cahiers : « Montrons que ces deux formules sont égales. » Comment vous allez faire alors ?
> Ya : On donne une valeur à *n*.
> P : Le problème c'est qu'en faisant comme cela tu vas le justifier seulement pour une seule valeur de *n* alors que nous on veut le justifier pour toutes les valeurs de *n*.
> Un élève : Je n'ai pas compris.
> P : On veut montrer que ces deux formules sont égales. (Girard, 2017, p. 68)

La première rencontre est ici réalisée, c'est le moment exploratoire qui s'avère difficile à mettre en place.

L'argument donné par le professeur « on veut le montrer pour toutes les valeurs de *n* » peut être mis en défaut. Les formules ont été produites à partir de modélisations graphiques de la situation, ce qui permet de confirmer que les formules donnent bien la grandeur cherchée.





$(4c - 4)$ $4(c - 1)$

C'est parce qu'on veut construire une théorie des programmes de calculs qui permette de savoir si deux programmes de calculs, donnés indépendamment de la situation qu'ils modélisent, sont équivalents que l'on cherche à produire une technique qui s'affranchisse de la situation et dont la justification soit « interne » aux programmes de calculs exprimés algébriquement.

Les deux programmes « P : je prends un nombre, je le multiplie par 4 et j'enlève 4 au résultat » et « Q : je prends un nombre, je lui enlève 1 et je multiplie le résultat par 4 » sont-ils équivalents ? On exprime algébriquement chacun des programmes de calcul ; on développe Q en multipliant par 4 chaque membre de la parenthèse et en recopiant le signe de la soustraction. On obtient $4c - 4$; les programmes sont bien équivalents. Pourquoi ? Parce que pour tous réels k, a et b, on a $k(a - b) = ka - kb$. On peut noter que l'on retrouve ici le manque de *logos* sur la construction d'une théorie mathématique qui se joue dans la classe mis en évidence dans la première partie de la conférence.

Rien de tout cela n'est présent dans les ressources institutionnelles. En effet, certains éléments à propos des programmes de calcul avaient été enregistrés en 2007 et 2008 dans le programme et surtout les documents de la collection *Ressources pour la classe* (MEN, 2008b), mais de façon peu développée. Mais ils sont absents du texte du programme de 2016 et c'est le binôme (situation, formule) qui apparaît ; même si « expression algébrique » apparaît en quelques occurrences, elle voisine avec « écriture littérale » qui a une connotation plus formelle – formelle s'opposant ici à fonctionnelle (au sens qui porte en elle les fonctions de l'objet mathématique).

L'expression « programme de calcul » apparaît cependant dans le document de la collection *Ressources pour le cycle 4* intitulé *Utiliser le calcul littéral* (MEN, 2016a) mais de façon quasi anecdotique. L'élève est « initié aux programmes de calcul à partir de programmes dont les opérations sont réversibles et permettent de "remonter" le programme en commençant par la dernière opération » ; et les auteurs ajoutent que « les programmes de calcul constituent à la fois un moyen pertinent pour introduire la notion d'expression littérale puis d'équation, et un intermédiaire entre le volet procédural et le volet structural du calcul littéral ».

On voit ainsi clairement à travers cet exemple que la transposition dans la profession d'éléments permettant d'améliorer significativement les rapports en position de professeur au savoir à enseigner est difficile, et se heurte à des conditions dont nous avons mis quelques-unes en évidence, et qui relèvent du *logos* des praxéologies. On voit notamment en quoi laisser les programmes de calcul dans l'organisation de l'étude sans en faire un élément du *logos* des praxéologies algébriques enseignées nuit à la construction d'un rapport « fonctionnel » à l'algèbre et à la mise en évidence de ses raisons d'être. Mais aussi que organisations mathématiques et organisations de l'étude sont fortement liées, et que la nécessité de faire vivre une dialectique entre expérimentation et théorisation permet de mettre en évidence la nécessité de développer le *logos* des praxéologies mathématiques.

3. Conclusion

Une formation de professeurs (de mathématiques), scientifiquement fondée sur la didactique (des mathématiques), nécessite ainsi des conditions particulières pour exister et pour permettre qu'évoluent les conditions/contraintes du niveau de l'école, de la société et au-delà (Artaud, à paraître).

Parmi ces conditions, la création d'une *skholè* – une école au sens grec du terme, qui permette de se mettre « à part » pour étudier – mais aussi l'assomption par l'institution de formation que la didactique peut fonder et aider à développer les praxéologies pour l'enseignant nous paraissent essentielles. C'est pour cela que je plaide, depuis de nombreuses années, non seulement pour que la didactique analyse ce qui existe, mais aussi développe ce qui pourrait et devrait exister en intégrant de la théorie didactique dans le logos ; et encore mette en évidence cette fonction productrice, justificatrice, de la didactique dans toutes les institutions dans lesquelles elle est présente.

Je sais que beaucoup d'entre vous concourent à ce type de travail et je vous en remercie ; il est essentiel d'unir nos forces pour espérer faire changer les conditions du niveau de la civilisation, et donc de la société, que Dilma Fregona a si bien mises en évidence dans sa conférence. À cet égard, je voudrais préciser que nous faisons partie de la même civilisation relativement aux objets que nous regardons ensemble, à l'institution que nous créons pour regarder ces objets. Cela ne veut pas dire que nous allons avoir les mêmes rapports à tous les objets mais que des contraintes identiques qui dépassent nos sociétés influent sur les institutions que nous examinons, et en particulier les institutions d’enseignement. Cela n’empêche pas que des différences et des divergences restent, puisque nos sociétés ne sont pas les mêmes. Mais il me paraît important de voir les convergences au-delà des différences sociétales, et le travail fait dans ce congrès m’est apparu particulièrement riche à cet égard.

Références

ARTAUD, M. (2007). *La TAD comme théorie pour la formation des professeurs. Structures et fonctions.* In L. Ruiz-Higueras, A. Estepa & F. J. García (Éds), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD)* (pp. 241-259). Jaén, Espagne : Publicaciones de la Universidad de Jaén.

ARTAUD, M. (2018). Constituir uma organização matemática e uma organização do estudo – Praxeologias para o professor, praxeologias para o pesquisador e sua ecologia. *In A Teoria Antropológica Do Didático: Princípios e Fundamentos.*, pages 95–127. S. Ag Almouloud, L. M. Santos Farias & A. Henrique, Curibita, Brésil : CRV.

ARTAUD, M. (À paraître). Phénomènes transpositifs de la didactique dans la profession de professeur. *Actes du 6e congrès international sur la théorie anthropologique du didactique*.

CHEVALLARD Y. (1990). Le passage de l’arithmétique à l’algébrique dans l’enseignement des mathématiques au collège. Voies d’attaques et problèmes didactiques. *Petit x 23* pp. 55-38.

CHEVALLARD, Y. (1994). Ostensifs et non-ostensifs dans l’activité mathématique. *Conferenze i Seminari Mathesis 1993-1994* (pp. 190-200). Turin, Italie : Associazione Subalpina Mathesis. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=125

CHEVALLARD Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l’approche anthropologique. In R. Noirfalise (Éd.), *Actes de l’Université d’été Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques*, La Rochelle, 4-11 juillet 1998 (pp. 91-120). Clermont-Ferrand : IREM.

CHEVALLARD, Y. (2003). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. In S.Maury, M. Caillot (Éds.). *Rapport au savoir et didactiques* (pp. 81-104). Paris : Fabert.

CHEVALLARD Y. (2005). *Séminaire de didactique des mathématiques pour les professeurs de collège et de lycée de IUFM d’Aix Marseille.*

CHEVALLARD, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. In L. Ruiz-Higueras, A. Estepa & F. J. García (Éds), *Sociedad, Escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD)* (pp. 705-746). Jaén, Espagne : Publicaciones de la Universidad de Jaén. Disponible sur Internet : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Passe_et_present_de_la_TAD.pdf (consulté le 7 janvier 2011).

CHEVALLARD, Y. (2014). *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques.* Enseignement pour le parcours « Didactique » du master « Mathématiques et applications » de l’université d’Aix-Marseille - Année 2013-2014.

http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=219

CHEVALLARD, Y. (2016). *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques – Sur les praxéologies de recherche en didactique.* Enseignement pour le parcours « Didactique » du master « Mathématiques et applications » de l’université d’Aix-Marseille – Année 2015-2016.

CIRADE, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel*. (Thèse de doctorat). Université Aix-Marseille I – Université de Provence.

GIRARD C. (2017). *Faire étudier les mathématiques en questionnant le monde : infrastructures didactiques pour la réalisation des moments exploratoire et technologico-théorique.* (Mémoire de master). Université d'Aix-Marseille.

Ministère de l'éducation nationale. (2008a). Programmes du collège. Programmes de l'enseignement de mathématiques. *Bulletin Officiel spécial n° 6 du 28 août 2008*.

http://media.education.gouv.fr/file/special_6/52/5/Programme_math_335

25.pdf

MINISTERE de l'éducation nationale (2008b) *Ressources pour les classes du collège. Du numérique au littéral.*

http://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/3/du_numerique_au_litteral_109173.pdf

MINISTERE de l'éducation nationale. (2016). *Ressources pour le cycle 4. Utiliser le calcul littéral.*

http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Calcul_litteral/35/8/RA16_C4_MATH_nombres_calcul_calcul_litteral_doc_maitre_548358.pdf