EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i5p412-427

Análise praxeológica das práticas de resolução de equações do primeiro grau

Pragmatic analysis of first-degree equation resolution practices

---

MAYSA DA SILVA LEITE ALMEIDA[1]
RENATO BORGES GUERRA[2]

Resumo

Neste trabalho apresentamos de forma sucinta os resultados de uma pesquisa de mestrado que teve como objeto o estudo da resolução de equações redutíveis à equação do primeiro grau, sob a perspectiva teórico-metodológica da TAD – Teoria Antropológica do Didático. Nessa investigação engendrou-se um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), que nos levou ao encontro de quatro diferentes práticas de resolução de equações do primeiro grau em diferentes épocas. As análises dessas práticas foram realizadas pelo contraste com o Modelo Epistemológico de Referência (MER) adotado, construído para colocar em evidência as propriedades operatórias enquanto regras para resolver equações do primeiro grau. O MER foi construído utilizando as noções de anéis e corpos, mais especificamente, do corpo dos inteiros módulo ℤ. Resultados neste percurso nos apontam que as técnicas históricas estão mais próximas das propriedades operatórias e são preferíveis frente a algumas técnicas atuais.

Palavras-chave: *Resolução de equações do primeiro grau. Modelo epistemológico de referência. Análise praxeológica.*

Resumen

En este trabajo presentamos de forma sucinta los resultados de una investigación de maestría que tuvo como objeto el estudio de la resolución de ecuaciones del primer grado, bajo la perspectiva teórico-metodológica de la TAD – Teoría Antropológica del Didáctico. En esa investigación se engendró un Recorrido de Estudio e Investigación (REI), que nos llevó al encuentro de cuatro prácticas de resolución de ecuaciones del primer grado en diferentes épocas. Los análisis de estas prácticas se realizaron a través de un modelo epistemológico de referencia, que pone en evidencia las propiedades como reglas, a partir de las nociones de anillos y cuerpos, más específicamente, del cuerpo de los enteros módulo ℤ. Resultados en este recorrido nos apuntan que las técnicas históricas están más cerca y son preferibles frente a algunas técnicas actuales.

Palabras-clave*: Resolución de ecuaciones del primer grado. Modelo epistemológico de referencia. Análisis práctico.*

Résumé

Dans ce travail, nous présentons un bref résumé des résultats d'une recherche de maîtrise qui avait pour objet l'étude de la résolution des équations du premier degré, dans la perspective théorico-méthodologique de la théorie anthropologique de la didactique – TAD. Dans cette

[1] SEDUC-CEFOR-PA, Brasil, prof.maysaleite@gmail.com
[2] UFPA, Brasil, rguerra@ufpa.br

enquête, un Parcours d'Étude et de Recherche (PER) a été généré, qui nous a conduit à la rencontre de quatre pratiques de résolution d'équations du premier degré à différents moments. Les analyses de ces pratiques ont été réalisées au moyen d'un modèle épistémologique de référence, qui met en évidence les propriétés en tant que règles, à partir des notions d'anneaux et de corps, plus précisément du corps du module entier ℤ. Les résultats de ce cours soulignent que les techniques historiques sont plus proches et sont préférables en face de certaines techniques actuelles.

Mots-clés: *Résolution des équations du premier degré. Modèle épistémologique de référence. Analyse praxéologique.*

Abstract

In this work we present a summary of the results of a master's research that had as its object the study of the resolution of first-degree equations, under the theoretical-methodological perspective of the TAD - Anthropological Theory of Didactics. this research led to a Study and Research Path (SRP), which led us to the encounter of four practices of resolution of first-degree equations at different times. The analyzes of these practices were performed through an Epistemological Model of Reference (EMR), which highlights the operative properties as rules for solving the equation of the first, from the notions of rings and fields, more specifically, the field of the integers modulo ℤ. Results in this course indicate that the historical techniques are closer and are preferable to some current techniques.

Keywords: *1. Epistemological model of reference. 2. Anthropological theory of didactic. 3. Solving first-degree equations. 4. Integres modulo p.*

Introdução

Apresentamos aqui uma síntese da investigação – sob o enfoque teórico da TAD, Teoria Antropologia do Didático – sobre as práticas de resolução das equações do primeiro grau, noção que vive em escolas brasileiras, como parte do ensino do 7º ano do ensino fundamental. Esta opção pela TAD justifica-se por contemplar aspectos históricos e epistemológicos dos objetos matemáticos de ensino.

A TAD rejeita a visão particularista do mundo social admitindo que toda atividade humana, regularmente realizada, pode ser descrita por meio da noção de *praxeologia*, esta supõe, em princípio, uma ação em situação que em sua forma pontual pode ser compreendida por uma tarefa (T), tomada em sentido amplo, e de um modo de saber-fazer essa tarefa que denominamos de técnica (ô). Denominado de tecnologia (θ), o discurso – *logos* – fundamenta a técnica e a torna inteligível como um meio para realizar as tarefas daquele tipo. Esse modo de pensar está sujeito a um componente teórico, a teoria (Θ), de caráter mais amplo, que rege a tecnologia em si mesma.

Nesse contexto teórico, assume-se que o ensino de uma noção matemática, nesse caso, a resolução de equações do primeiro grau, deve ser realizado baseando-se em práticas inteligíveis que permitam compreender para que se faz, e o porquê de se fazer essas práticas de uma determinada maneira.

Para encaminhar uma compreensão sobre as práticas da resolução de equação do primeiro grau que vivem nas escolas, julgamos necessário considerar sua história social, encontrar possíveis recombinações praxeológicas nesse percurso, na forma de uma epistemologia artificial desse saber escolar.

Nesse sentido, partimos do questionamento das práticas escolares de resolução de equações do primeiro grau, apoiados em Chevallard (1999) que considera bastante reduzido, senão ausente, o conteúdo teórico envolvido na atividade matemática escolar. E mais, que há falta de unidade entre as praxeologias ensinadas, isto é, ausência de integração entre praxeologias que direcionem seu estudo ao encontro de um corpus teórico matemático. Essa problemática é explicitada pelo modelo praxeológico da TAD sob a denominação do "problema de articulação da praxeologias escolares" (GARCIA, 2005).

A resposta a essa problemática pode ser encaminhada a partir de um Modelo Epistemológico de Referência (MER) para um dado saber a partir de uma teoria ou tecnologia matemática, inspirado no modelo lato senso das organizações praxeológicas proposto pela TAD (CHEVALLARD, 1999). Este deve permitir apresentar as praxeologias convenientemente articuladas e integradas como aplicações dessa teoria. Partindo desses pressupostos, instauramos um percurso de estudo e investigação para determinar as ferramentas praxeológicas úteis para esse estudo.

A construção de um MER que substancie a unidade, segundo uma inteligibilidade, das praxeologias matemáticas, estará sujeita aos parasaberes e os protosaberes impostos pelos níveis de codeterminação didática, e ao mesmo tempo, deve engendrar um fazer de integrações de praxeologias na escola com unidade, do estilo próprio dos matemáticos em suas atividades.

Nosso interesse, portanto, se constituiu em construir uma resposta para o seguinte problema: *Como conceber um MER para a resolução de equações do primeiro grau a uma variável que permita construções de novas organizações praxeológicas, considerando o equilíbrio entre os saberes práticos, inclusive procedimentais, que agem no ensino desse objeto e que não fiquem tão distante dos saberes matemáticos?*

Propomos, então um Modelo Epistemológico de Referência (MER), no sentido de uma ferramenta produzida por uma engenharia matemática, para nos orientar nas análises necessárias sobre as práticas desenvolvidas nas escolas ao longo da história e, ao mesmo tempo, que permita substanciar uma unidade teórica, que dará a inteligibilidade, para essas e/ou novas organizações matemáticas no ensino de resolução de equações do primeiro grau.

A fase da investigação, que compreende a construção de novas organizações para o ensino, é objeto de futuras investigações, de modo que nos restringimos aqui a realização da fase inicial do MER utilizando-o como ferramenta nas análises de práticas de resolução de equações do primeiro grau.

O modelo epistemológico de referência

A trajetória histórica trilhada nos levou ao encontro das estruturas algébricas, não no sentido algébrico de conjuntos munidos com certas propriedades, mas de uma estrutura numérica em um sentido amplo, com regras operatórias explícitas. Os empregos repetidos dessas regras as tornaram naturalizadas, e, portanto, invisíveis e não problemáticas aos olhos daqueles que as manipulavam.

Nesse sentido, Queysanne e Delachet (1964) nos mostram que a suposta naturalidade com que se realizam as operações com os números reais pode ser questionada a partir de novas estruturas. Estas permitem perceber, em contraste com as já existentes, que:

> Os resultados clássicos da álgebra elementar que são considerados como "evidentes por si" (comutatividade do produto, nulidade do produto que acarreta a de um dos fatores), não se encontram, pois na "natureza das coisas", mas provêm das propriedades do corpo dos reais e podem sofrer profundas modificações se estivermos em outro domínio (p. 33).

De outro modo, dizer que as regras algébricas usadas nas resoluções das equações do primeiro grau são evidentes por si, é dizer que são suficientemente naturais – o que não permite que sejam percebidas. Neste sentido, a aprendizagem da resolução de equações se daria como a aprendizagem dos saberes práticos ou empíricos "porquanto seu sincretismo os conduz precisamente à aquisição global e pessoal, por meios intuitivos da familiaridade mimética, sem que se saiba, precisamente, quando foi aprendida nem exatamente o que se aprendeu" (CHEVALLARD, 2005, p.68, tradução nossa).

O modelo epistemológico de referência apresentado neste trabalho foi pensado para produzir o contraste necessário e para fazer emergir as regras essenciais à resolução de uma equação do primeiro grau. Por esse motivo, então, recorremos às noções de classes de congruência módulo n e de estruturas algébricas dos anéis e corpos enquanto objetos da Álgebra Moderna.

Assim, é que, motivados por Queysanne e Delachet (1964), postulamos que sob certas condições podemos estudar a resolução de equações algébricas do primeiro grau a partir das propriedades operatórias das estruturas algébricas de anéis e corpos, quebrando a inércia do pensamento operatório naturalizado induzido pela aritmética.

De forma breve o MER pode ser assim enunciado: Consideramos uma partição do conjunto $\mathbb{Z}$, o conjunto denotado por $\mathbb{Z}_n$ e formado pelas n classes de congruência módulo n, em que n é um número primo. O conjunto $\mathbb{Z}_n$, munido das operações de adição e multiplicação, no qual, assim como no corpo dos números reais, são válidos os axiomas A1, A2, A3, A4, M1, M2, M3, M4 e D, será nosso conjunto universo. Essa estrutura permite a construção de tarefas de resolução de equações do mesmo tipo daquelas que estão presentes nas escolas, mas que para serem enfrentadas exigem tomar tais axiomas como regras a serem executadas de maneira funcional. Dito isto, apresentamos os axiomas que serão assumidos neste modelo, como regras operatórias, para a tarefa de resolução de equações redutíveis à equações do primeiro grau.

A1 – associatividade da adição: $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$;
A2 – comutatividade da adição: $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$;
A3 – existência de um único elemento neutro na adição: $\bar{a} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{a}$;
A4 – existência do elemento simétrico: $\bar{a} + (\overline{-a}) = \bar{0}$;
M1 – associatividade da multiplicação: $\bar{a}(\bar{b}\bar{c}) = (\bar{a}\bar{b})\bar{c}$;
M2– comutatividade da multiplicação: $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$;

M3 – existência de um único elemento neutro da multiplicação: $\bar{a} \cdot \bar{1} = \bar{1} \cdot \bar{a}$;
M4 – existência do elemento simétrico: $\bar{a} \cdot \overline{a^{-1}} = \bar{1}$ $(\bar{a} \neq \bar{0})$;
D – distributividade da multiplicação em relação à adição: $\bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c}$.
Para deixar claro o que declaramos, trazemos um exemplo abaixo, no qual n = 7, estabelecendo como universo o conjunto $\mathbb{Z}_7 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$.

Figura 1: Tábuas para adição e multiplicação em $\mathbb{Z}_7$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Fonte: Adaptado de Monteiro, 1978.

Utilizando as tábuas das operações para o conjunto escolhido mostraremos como os axiomas funcionarão enquanto regras para a resolução de equações do primeiro grau. A tábua da adição dispõe os elementos de $(\mathbb{Z}_7)$ e os resultados de todas as somas possíveis entre seus elementos. Nela pode-se visualizar, por exemplo, que:

a) O elemento oposto de $\bar{3}$ é $\bar{4}$, pois $\bar{3} + \bar{4} = \bar{0}$. E também que, pela comutatividade, $\bar{4} + \bar{3} = \bar{0}$, ou seja, o oposto de $\bar{4}$ é $\bar{3}$. Em resumo, $\bar{3} + \bar{4} = \bar{4} + \bar{3} = \bar{0}$.
b) O elemento oposto de $\bar{6}$ é o $\bar{1}$, pois $\bar{6} + \bar{1} = \bar{1} + \bar{6} = \bar{0}$, ou seja, o oposto de 1 é o 6, portanto, $\bar{6} + \bar{1} = \bar{1} + \bar{6} = \bar{0}$.
c) Para uma soma ordinária entre dois elementos, que não sejam opostos entre si, a soma será sempre diferente de zero, assim, $\bar{5} + \bar{3} = \bar{3} + \bar{5} = \bar{1}$.
d) A adição de três ou mais termos funciona com as mesmas regras, bastando para isso associá-las duas a duas, como a seguir: $\bar{3} + \bar{6} + \bar{2} = (\bar{3} + \bar{6}) + \bar{2} = \bar{2} + \bar{2} = \bar{4}$, ou ainda, $\bar{3} + (\bar{6} + \bar{2}) = \bar{3} + \bar{1} = \bar{4}$.

Agora, tendo em conta estas regras definidas em $\mathbb{Z}_7$, podemos pensar uma prática para a resolução de equações nesse universo, tal que as regras para adição e multiplicação são obtidas diretamente das tábuas apresentadas.

Nesse contexto, resolver uma tarefa do tipo, "encontrar o valor de x na equação $\bar{2} \cdot x + \bar{6} = \bar{0}$", exige o uso dos princípios da igualdade e da tabela para realização das operações, de modo que haja o isolamento total de x. Na sequência, são detalhados os procedimentos da resolução de uma equação tal como sugerido pelo MER proposto:

Tarefa: Resolver a equação $\bar{2} \cdot x + \bar{6} = \bar{0}$ em $\mathbb{Z}_7$:

$\bar{2} \cdot x + \bar{6} = \bar{0}$ (Para anular o $\bar{6}$ deve-se adicionar a ele $\bar{1}$, mas pela propriedade aditiva, para manter a igualdade devemos somá-lo aos dois membros, então escrevemos):

$(\overline{2} \cdot x + \overline{6}) + \overline{1} = \overline{0} + \overline{1}$ (Associamos as parcelas que queremos somar primeiro):

$\overline{2} \cdot x + (\overline{6} + \overline{1}) = \overline{0} + \overline{1}$ (Buscamos na tábua o resultado das adições):

$\overline{2} \cdot x + \overline{0} = \overline{1}$ (Pode-se discutir o fechamento da multiplicação para $\overline{2} \cdot x$ e em seguida dar o resultado para a sua adição com o elemento neutro).

$\overline{2} \cdot x = \overline{1}$ (Para isolar x, buscamos na tábua, um produto que resulte no elemento unidade, sendo um dos fatores é o $\overline{2}$):

$(\overline{2} \cdot x) \cdot \overline{4} = \overline{1} \cdot \overline{4}$ (Multiplicamos esse fator em ambos os membros da equação):

$(x \cdot \overline{2}) \cdot \overline{4} = \overline{4}$ (Efetuamos $\overline{1} \cdot \overline{4}$ utilizando a tábua):

$x \cdot (\overline{2} \cdot \overline{4}) = \overline{4}$ (E associamos os fatores de modo conveniente):

$x \cdot \overline{1} = \overline{4}$ (Efetuamos $\overline{2} \cdot \overline{4}$ utilizando a tábua):

$x = \overline{4}$ (Por fim, o produto $x \cdot \overline{1}$, pelo qual obtemos o valor de x, no segundo, membro que é $\overline{4}$).

O modelo ora apresentado permite encaminhar nosso objetivo, que é reconstruir a prática da resolução de equações do primeiro grau como um fazer orientado por regras matemáticas como toda atividade matemática requer. Permite, portanto, olhar para as demais práticas ensinadas de maneira desnaturalizada, explicitando e justificando os procedimentos e técnicas envolvidas na resolução de equações do primeiro grau.

Uma técnica hindu

As organizações didático-matemáticas hindus do primeiro milênio não eram dirigidas diretamente para o estudo das equações do primeiro grau a uma incógnita. Contudo, a tarefa que encontramos nessa praxeologia é a de resolver a equação simples que está associada a um problema proposto.

Para possibilitar o estudo dos diversos tipos de problemas, estabelecia-se uma taxionomia de problemas, o que levava a uma taxionomia das equações simples, ao que parece, com o intuito de eliminar algumas dificuldades relativas ao contexto das situações. Mas, despistando as complexidades, a construção da igualdade se constituía no procedimento mais preliminar para a solução da equação, ou seja, a solução da equação começava com a formação da igualdade entre os dois lados, seguida do esquema gráfico como técnica de escrever a equação para as operações posteriores.

Como exemplo desta prática hindu, destacamos o seguinte tipo de problema identificado por Datta e Singh (1935, p.40). Estes autores apresentam a técnica de Âryabhata I (499) relacionada ao tipo de problema, dito do patrimônio, como o que segue:

> Duas pessoas, que são igualmente ricas, possuem, respectivamente, a, b vezes certa quantidade desconhecida, juntamente com c, d unidades monetárias em dinheiro. Qual é o montante? (ARYABHATA I, 499 apud DATTA; SINGH, 1935, p.40, tradução nossa).

A formulação do problema leva ao seguinte tipo de equação: $ax + c = bx + d$
Para solucionar esse tipo de problema, Aryabhata I (499) enuncia a seguinte regra:

> A diferença dos "valores" conhecidos referentes às duas pessoas devem ser divididos pela diferença dos coeficientes da incógnita. O quociente será o valor da incógnita, se as suas posses forem iguais (ARYABHATA I, 499 apud DATTA; SINGH, 1935, p.40, tradução nossa).

Portanto, a solução é dada por

$$x = \frac{d - c}{a - b}$$

Figura 2 – Formação e resolução de um problema envolvendo equação simples.

"Here the residual degrees are (put as) *yâvat-tâvat*, *yâ*; increased by one, *yâ* 1 *rû* 1; twelfth part of it, $\frac{yâ\ 1 \quad rû\ 1}{12}$; four times this, $\frac{yâ\ 1 \quad rû\ 1}{3}$; plus the absolute quantity eight, $\frac{yâ\ 1 \quad rû\ 25}{3}$. This is equal to the residual degrees plus unity. The statement of both sides tripled is

yâ 1 *rû* 25
yâ 3 *rû* 3

Fonte: Datta e Singh, 1938, p. 41.

Notamos nesses procedimentos a redução da equação pelas operações realizadas em termos de quantidades conhecidas e desconhecidas, aspecto que coloca em evidência a técnica que conhecemos como redução de termos semelhantes. Apresentamos na figura 2 um exemplo do que estamos falando.

Ao término das operações indicadas no enunciado do problema obtém-se a equação simples formada por x + 25 e 3x + 3.

yâ 1	*rû 25*	*x + 25*	*(1º membro)*
yâ 3	*rû 3*	*3x + 3*	*(2º membro)*

Pela regra descrita por Brahmagupta, faz-se a diferença entre os termos absolutos (*rû*), 25 – 3 = 22, e a diferença entre os coeficientes da incógnita (*yâ*), observando a ordem inversa no cálculo da diferença, tomamos 3 – 1 = 2, e o valor procurado é o resultado da divisão de 22 por 2, obtendo-se 11.

Essa organização, sem dúvida, facilita o enfrentamento de problemas específicos pelo uso de fórmulas e regras elaboradas, mas exige, por outro lado, um investimento na atividade de estudo que permita incorporar as regras e fórmulas e, ao mesmo tempo, adquira, em situação, a percepção necessária para identificar o tipo de problema que determinará o tipo de equação e a técnica necessária para resolvê-la.

Em geral, as técnicas encontradas, para os tipos de equações consideradas como simples, são baseadas em isolar a incógnita por meio de operações aritméticas entre os termos de mesma natureza, de modo que ao final, em um dos lados da equação, permaneça apenas o desconhecido, e, no outro lado, o conhecido, permitindo assim, determinar o valor procurado. Tendo-se como tecnologia as regras operatórias da aritmética tomada de forma generalizada e não guardam necessariamente relação com as regras operatórias tomadas como propriedades de estruturas algébricas.

A resolução das equações do primeiro grau no século XVIII/XIX

Em um manual de matemática de 1810, Reynaud apresenta a Álgebra como extensão da Aritmética. As ideias encontradas nessa obra remetem à noção de equação como ferramenta para resolução de problemas. As equações auxiliavam nas traduções de situações que foram se tornando cada vez mais complexas e isso levou à invenção de sinais particulares para as operações e ao uso de letras para representar as quantidades desconhecidas, pela necessidade de representações de forma mais resumida para tornar possíveis e facilitar os cálculos.

Reynaud (1810) distingue as equações das identidades e para tornar mais claro, ele adota símbolos diferentes para cada tipo. Por exemplo, a igualdade x *plus* 2 égale 5, ou $x + 2 = 5$ é uma equação que indica que a soma $(x + 2)$ é igual a 5. Portanto o único valor que x pode assumir é 3; nenhum outro valor torna os dois membros iguais. Enquanto as identidades são igualdades que independem do valor particular atribuído à incógnita, como mostra o exemplo a seguir:

$$(x + 2) \text{ ǂ } (x + 2)$$

Isto quer dizer que $x + 2$ é *identicamente igual* a $x + 2$.

Deixa claro assim que uma equação é uma igualdade que subsiste apenas para valores particulares da incógnita, e que, portanto, a incógnita é dada por número determinado. A resolução de uma equação, então é feita por meio de transformações, que não "perturbem" a igualdade, e, cujo objetivo de isolar a incógnita em um dos membros e no outro membro um número conhecido que representará o valor da incógnita.

A importância em manter a igualdade após as transformações é, no mínimo, para garantir que a transformação leva de uma equação à outra equação equivalente, sempre que possível menos complexa que a anterior. Para garantir isso, Reynaud (1810) recorre ao pensamento analítico que predomina nas atividades da aritmética para justificar as transformações necessárias para separar as quantidades conhecidas das desconhecidas. Isso é demonstrado pelos quatro princípios que justificam a técnica de isolamento da incógnita pela realização das transformações na equação, guiadas pela inversão das operações adição e subtração, multiplicação e divisão.

Nesse sentido, a tarefa de resolver uma equação é encarada como tradução de condições existentes entre as quantidades numéricas conhecidas e desconhecidas, ou seja, a incógnita representa um número. Isso pode ser depreendido do seguinte extrato de texto:

> A resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita, pode deduzir-se imediatamente, apenas com os princípios estabelecidos nas quatro regras da aritmética. Na verdade, x designa um número abstrato. . . (REYNAUD, 1810, p. 146, tradução nossa).

Partindo desse pressuposto, a resolução da equação é encaminhada por meio dos princípios operatórios evidentes da aritmética. Esses princípios evidentes permitem a construção da técnica, como um algoritmo, por meio de suas traduções como operações inversas. O seguinte extrato de texto corrobora com nossa compreensão.

> As transformações requeridas para resolver as equações são baseadas neste princípio claro. Quando fazemos as mesmas operações sobre duas quantidades iguais, os resultados são iguais. Deduzimos; 1° que se às duas quantidades iguais, adicionamos a mesma quantidade, as somas são iguais; 2° que se de duas quantidades iguais subtraímos uma mesma quantidade, os restos são iguais; 3° que se multiplicamos duas quantidades iguais pela mesma quantidade, os produtos são iguais; 4° que divide duas quantidades iguais pela mesma quantidade, os quocientes são iguais. Como os dois membros de uma equação são duas partes iguais, os princípios acima se aplicam a eles, e as alterações que resultam não afetam o valor do desconhecido. Estes princípios são suficientes para resolver equações; começamos com as equações... (REYNAUD, 1810, p. 148, tradução nossa).

Em resumo, os princípios evidentes, a que Reynaud se refere, constituem a tecnologia da praxeologia podem ser assim compreendidos:

(P1) Se C é a soma das parcelas A e B, isto é, $C = A + B$, então evidentemente A é o resto entre o minuendo (soma) C e o subtraendo (parcela) B, isto é, $A = C - B$. Em resumo: parcela se torna subtraendo; (P2) Se A é o resto entre o minuendo C e o subtraendo B, isto é, $A = C - B$, então evidentemente que o minuendo C é a soma entre as parcelas A (antes resto) e B (subtraendo), isto é $C = A + B$. Em resumo, subtraendo se torna parcela da soma; (P3) Se C é o produto dos fatores A e B, isto é, $C = A \text{ x } B$, então é evidente que B é o quociente entre o dividendo C (produto) e o divisor A (antes fator) $B = C : A$. Em resumo, o fator se torna divisor; (P4) Se B é o quociente do dividendo C pelo divisor A, então, é evidente que o dividendo C é o produto dos fatores A e B, isto é, $C = A \text{ x } B$. Em resumo, o divisor se torna fator.

A teoria que sustenta essa tecnologia se encerra nas operações entre quantidades consideradas generalizadas com base na evidência cultural empírica naturalizada da contagem. Em sentido amplo, a teoria é a aritmética generalizada, pois as estruturas algébricas que caracterizam a Álgebra moderna ainda engatinhavam no período.

Além disso, podemos dizer ainda que resolver uma equação como $3x - 4 = 2x + 7$, por exemplo, requer o uso dos quatro princípios, mas também de alguns protosaberes (CHEVALLARD, 2005), no sentido de serem aprendidos sem serem ensinados, tal como quando se assume isolar a incógnita no lado esquerdo da equação como regra implícita. A justificativa pode ser encontrada no seguinte trecho:

> Os dois membros de uma equação sendo quantidades iguais, podemos tomá-los um pelo outro, e considerar como primeiro membro aquele que contem x. Isto é mais natural, pois na equação x = 2, vemos que a incógnita x tem 2 como valor; enquanto que colocando 2 = x, parece que 2 é um número desconhecido x, o que é ridículo (REYNAUD, 1810, p. 149, tradução nossa).

Embora o autor chame atenção para o fato de a igualdade funcionar do mesmo modo nos dois sentidos, prescreve que a incógnita fique no primeiro membro para dar um sentido único para a leitura da igualdade. É uma ação incorporada à prática que se justificada pela própria prática.

Resolução das equações do primeiro grau na matemática moderna

Bóscolo e Castrucci (1970) fazem o estudo da noção de equação do primeiro grau com uma variável em um capítulo intitulado *Equações do 1º grau com uma variável*, iniciando com as igualdades numéricas e suas propriedades. A definição de equação dada pelos autores diz que: As sentenças abertas que exprimem a relação de igualdade entre duas expressões numéricas, são chamadas equações (BÓSCOLO; CASTRUCCI, 1970, p.113). São apresentadas, então, as propriedades que conferem às igualdades a condição de relação de equivalência, isto é, as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva, e ainda, Bóscolo e Castrucci (1970) enunciam e exemplificam outras duas propriedades da igualdade que serão importantes, mais adiante, quando da resolução das equações.

PROPRIEDADE ADITIVA DA IGUALDADE:
Se a = b, então a + c = b + c, qualquer que seja o número c.
PROPRIEDADE MULTIPLICATIVA DA IGUALDADE:
Se a = b, então $a \cdot c = b \cdot c$, qualquer que seja o número c.

Levando em consideração todas as propriedades e operações anteriormente mencionadas, definem que as equações que podem ser escritas na forma ax + b = 0 são chamadas *equações do primeiro grau com uma variável*.

Assim, as propriedades que são satisfeitas em relação às operações de adição e ou multiplicação, para o campo numérico em que está definida a equação, funcionam como regras a serem seguidas nas operações com os termos da equação.

Para os números racionais e para os números reais são satisfeitas todas as propriedades aqui citadas, de modo que se pode enfrentar qualquer equação tendo essas propriedades como regras. Em geral, as equações numéricas são resolvidas como se estivessem definidas no conjunto dos números racionais ou reais.

Na organização presente a tarefa é resolver a equação do primeiro grau a uma variável, de acordo com as regras do conjunto dos números racionais. E a técnica para referida tarefa, em termos práticos, foi anunciada como um conjunto de regras que Bóscolo e Castrucci (1970, p.139) chamaram de "regra prática geral" e são assim descritas:

> *1 – Eliminam-se os parênteses;*
>
> *2 – Eliminam-se os denominadores;*
>
> *3 – Separam-se os termos, deixando num dos membros os termos que contêm a variável e somente eles;*
>
> *4 – Dividem-se (caso ainda não se tenha obtido uma equação elementar) ambos os membros pelo coeficiente da variável, se tal coeficiente não for zero, obtendo-se assim uma equação elementar equivalente, de resolução imediata.*

Este conjunto de recomendações constitui-se um procedimento prático em que se encerra a técnica de resolução da equação, mas o que não se determina a priori é uma ordem ou sequência para a mobilização de tais regras. Tudo funciona como um jogo cujo objetivo é encontrar a equação elementar por meio das regras dadas. Assim, uma pessoa pode chegar a uma equação elementar em números diferentes de passos, dependendo da sequência de regras que decide usar.

A técnica em sua totalidade é sustentada pela tecnologia das propriedades das operações numéricas sob a compreensão das estruturas algébricas, tais como as estruturas de Anéis e Corpos, que se justificam na teoria da Álgebra Moderna. Essa teoria somente chega às universidades como objeto de ensino nos cursos de formações de professores de matemática, no Brasil, nos meados do século XX.

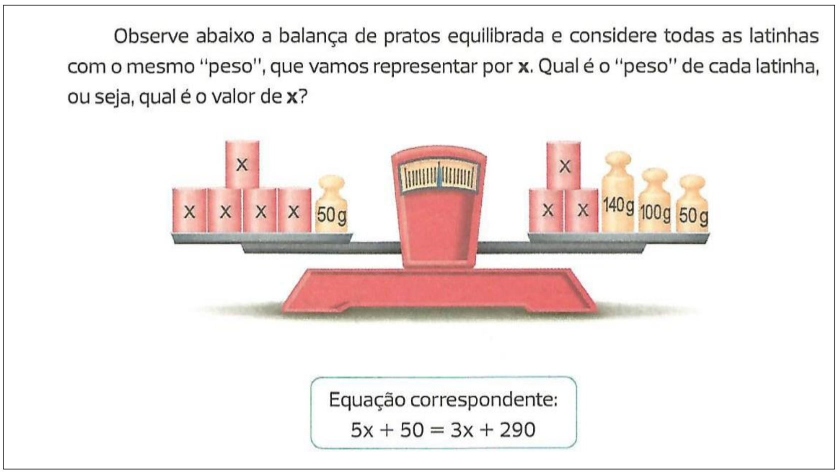
A técnica do equilíbrio

Esta técnica integra uma organização didático-matemática para resolução de equações do primeiro grau, tomada do livro didático de Dante (2012), de uma coleção aprovada pelo PNLD. Esta organização foi escolhida como representativa das praxeologias matemáticas ensinadas atualmente nas escolas do país.

A tarefa neste caso é resolver uma equação dada e a técnica é baseada na ideia de equilíbrio de uma balança de dois pratos. Uma equação do primeiro grau, segundo o autor, pode ser vista como uma balança de dois pratos em equilíbrio. O equilíbrio da balança funciona como metáfora para a igualdade da equação e, assim, as operações realizadas em ambos os membros de uma equação mantendo a igualdade, são comparadas às ações sobre os pratos da balança para manter o equilíbrio.

O extrato do texto, na figura 3, mostra uma balança de dois pratos e a equação que corresponde à sua tradução.

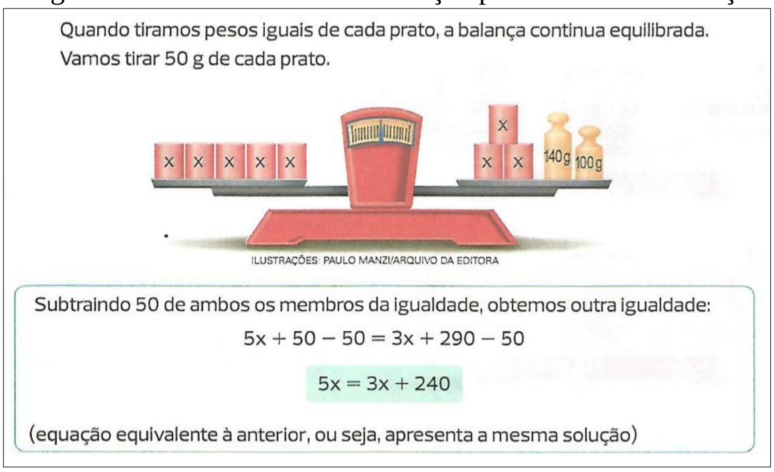
Figura 3 – Equação que traduz uma situação representada com uma balança de dois pratos, em equilíbrio.



Fonte: Dante, 2012, p. 130.

A resolução é iniciada comparando-se a retirada dos pesos com a operação de subtração entre os termos, o que, nesta técnica, é a justificativa usada para explicar a obtenção das equações equivalentes, com objetivo de resolver a equação. Na sequência, esse procedimento é realizado para resolver a equação encontrada na figura 4, usando a ideia de equilíbrio da balança e o ato de retirar pesos, como metáfora para mostrar que a igualdade se conserva na equação, é o que podemos observar pela figura 4:

Figura 4 – Procedimento de resolução pela técnica da balança



Fonte: Dante, 2012, p. 131

O procedimento é repetido mais uma vez, retirando-se pesos iguais dos pratos da balança e os termos que contém x da equação. A resolução é feita simultaneamente pela balança e pela equação, a balança precisa ser abandonada, em seguida, pois essa metáfora não explica as demais regras como a divisão em ambos os membros, por exemplo. Em continuação, traduz-se a situação da balança em linguagem matemática para ser enfrentada por uma das técnicas apresentadas antes da técnica do equilíbrio: a técnica do cálculo mental e a técnica da operação inversa.

Figura 5 – Sequência da resolução da equação, na linguagem algébrica

Se duas latinhas de mesmo "peso", juntas, pesam 240 g, cada uma pesa $240 : 2 = 120$ g.

Assim, o "peso" de cada latinha é de 120 g.

Se $2x = 240$, pela operação inversa, obtemos **x**:

$x = 240 : 2$ ou $x = \frac{240}{2}$

$x = 120$

ou

Se $2x = 240$, dividindo ambos os membros por 2, temos:

$\frac{2x}{2} = \frac{240}{2}$

$x = 120$

Fonte: Dante, 2012, p. 131

Ainda que seja possível, a partir de uma situação de equilíbrio da balança, traduzi-la em uma equação, pode-se perceber que nem sempre será possível traduzir uma equação em uma situação de balança em equilíbrio. Por isso, a técnica da balança não é adequada do ponto de vista didático, pois não responde completamente a tarefa, isto é, a técnica possui limitações.

Análises e conclusões

As análises realizadas apontam que as praxeologias hindus são construídas atendendo aos diferentes tipos de problemas práticos. Cada praxeologia torna-se auto tecnológica fazendo surgir, para cada tipo de equação, uma técnica diferente, tal como a que foi apresentada, e de onde se extrai como elementos técnicos e tecnológicos a redução de termos semelhantes – entendida aqui como a diferença entre termos da incógnita e entre os termos absolutos – e as operações algébricas consideradas: a adição, subtração, multiplicação, potenciação, por exemplo, de termos envolvendo quantidades conhecidas (números) e desconhecidas (letras), entre si, bem como as operações inversas que se entendem como o que se adiciona de um lado deverá ser subtraído, e o que estiver multiplicando deverá ser dividido, etc.

De qualquer modo, essas praxeologias se aproximam da praxeologia vislumbrada pelo modelo epistemológico de referência, no sentido prático, dos gestos usados, como a redução de termos semelhantes a partir de noções generalizadas da aritmética, embora se mostre limitada por se propor apenas a resolver alguns tipos de equações. Isso se deve pelo fato destas serem tomadas como técnicas de resoluções de tipos de problemas, evidenciando que os verdadeiros objetos de ensino dos hindus eram os problemas e não as equações.

A técnica descrita por Reynaud (1810), para a resolução de equações do primeiro grau, apresenta maior alcance por não estar restrita apenas às técnicas de resoluções para certos tipos de problemas, embora estes fossem considerados na organização proposta. Os princípios da aritmética são estendidos como evidentes e ganham generalidade com os cálculos algébricos onde se operam com as letras como se operam com os números abstratos. É esse aspecto que permite enfrentar a resolução de diferentes equações que, a priori, não se pode identificar como uma equação do primeiro grau.

Talvez por isso, essa técnica que parece um aperfeiçoamento da técnica hindu, ainda se faça presente nos livros escolares atuais do ensino brasileiro, mesmo que isso não pareça claro quando observamos as criações didáticas atuais, tais como modelos concretos como a balança de dois pratos, ou a do cálculo mental, ou das operações inversas. Há a presença da Aritmética generalizada substanciada por cálculos algébricos naturalizados que ocultam os elementos tecnológicos que possibilitariam explicitar a razão de ser da prática da resolução da equação.

Os gestos práticos introduzidos por essas técnicas, no entanto, se mostram eficazes e admitem o discurso matemático introduzido pelas estruturas algébricas para a resolução de equações do primeiro grau, e, portanto, preferíveis frente a outras propostas que se mostram inadequadas ao discurso matemático – como acontece com a *criação didática* (CHEVALLARD, 2005) da balança – observada em um livro didático de Dante (2012), por exemplo. A técnica da balança por ser privilegiada na escola, pode dar a impressão de ser capaz de resolver sozinha, de forma evidentemente naturalizada, qualquer tipo de equação do primeiro grau, mas, como no caso de equações do primeiro grau envolvendo frações e parênteses, essa técnica revela-se insuficiente.

É importante notar também que o MER, aqui apresentado, foi escolhido justamente por permitir evidenciar a desnaturalização das propriedades algébricas dos corpos e anéis mais conhecidos na escola, como acontece no corpo dos números reais em que elemento neutro e elemento simétrico são noções tratadas como evidentes por si, ou seja, não são discutidas. Tornar necessárias essas propriedades à resolução das equações é dar a elas um lugar privilegiado no ensino como regras, tornando o procedimento mais claro, objetivo e funcional.

Referências

BOSCOLO, B.; CASTRUCCI, A. **Curso Moderno de Matemática para o ciclo ginasial**. Volume 2. Ed. FTD, São Paulo. 1970.

CHEVALLARD, Y. **La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. 2009**. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Cours_de_YC_a_l_EE_2009.pdf>. Acesso em: 18 jan. 2018.

CHEVALLARD, Y. **La transposión didática:** del saber sabio al saber ensenado. Buenos Aires: Aique, 2005.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris: Matemática**. 1 ed. São Paulo: Ática, 2012.

DATTA, Bibhutibhusan; SINGH, Avadesh Narayan. History of Hindu Mathematics a source book. Part I and II. (1935, 1938).

GARCÍA, F. J. **La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar:** de la proporcionalidad a las relaciones funcionales. Doctoral dissertation. Universidad de Jaén. 2005.

MONTEIRO, Luiz Henrique Jacy. **Elementos de álgebra**. Rio de Janeiro. Livro Técnico e Científico, 1978.

QUEYSANNE, M; DELACHET, A. **A álgebra moderna**. São Paulo: Difusão europeia do livro, 1964.

REYNAUD, A. A. L. **Eléments d'algèbre précédés de l'introduction**. Troisième édition: Paris. 1810.