

Percursos de estudantes ao lidarem com a introdução do conceito de limite¹

SONIA MARIA MONTEIRO DA SILVA BURIGATO²

JOSÉ LUIZ MAGALHÃES DE FREITAS³

CÉCILE OUVRIER-BUFFET⁴

Resumo:

Neste artigo apresentamos parte de nossa pesquisa de doutorado em andamento, em que temos como objetivo central levantar elementos no processo de aprendizagem da introdução do conceito de limite de função. Referenciamos-nos em uma teoria cognitivista, para buscarmos esses caminhos intelectuais dos alunos ao lidar com atividades introdutórias do conceito de limite, no caso a teoria dos campos conceituais de Vergnaud. Escolhemos trabalhar com alunos de um curso de licenciatura em matemática no Brasil e também com alunos da França. A ideia é realizar uma comparação, em termos de introdução desse conceito e dos caminhos percorridos por esses estudantes na introdução desse conceito. Um dos aspectos diferentes desses dois países é com relação ao nível escolar em que este conceito é apresentado. No Brasil geralmente ele é introduzido na universidade, enquanto na França isso ocorre no lycée. Nas primeiras análises das resoluções dos estudantes, modelamos teoremas em ação (adequados ou não) e também regras em ação relacionadas a esses teoremas em ação e, assim, estamos conseguindo investigar os primeiros esquemas que esses alunos utilizam ao lidar com as situações introdutórias para o ensino de limite de funções. Buscamos também estudar aproximações entre os esquemas utilizados pelos alunos do Brasil e da França.

Palavra-chave: Esquemas. Brasil e França. Teoremas em ação. Limite de função.

Resumen:

En este artículo, presentamos parte de nuestra investigación de doctorado en curso, en que tenemos como objetivo central levantar elementos en el proceso de aprendizaje de la introducción del concepto de límite de función. Nos referimos en una teoría cognitivista, para buscar esos caminos intelectuales de los alumnos al tratar con actividades introductorias del concepto de límite, en el caso la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud. Hemos elegido trabajar con alumnos de un curso de licenciatura en matemáticas en Brasil y también con alumnos de Francia. La idea es realizar una comparación, en términos de introducción de ese concepto y de los caminos recorridos por esos estudiantes en la introducción de ese concepto. Uno de los aspectos diferentes de estos dos países es con respecto al nivel escolar en que se presenta este concepto. En Brasil generalmente es introducido en la universidad, mientras que en Francia eso ocurre en el lycée. En los primeros análisis de las resoluciones de los estudiantes, modelamos teoremas en acción (adecuados o no) y también reglas en acción relacionadas a esos teoremas en acción y, así, estamos logrando investigar los primeros esquemas que esos alumnos utilizan al tratar con las situaciones introductorias para el "enseñanza de límites de funciones. Buscamos también estudiar aproximaciones entre los esquemas utilizados por los alumnos de Brasil y de Francia.

Palabras clave: Esquemas. Brasil y Francia. Teoremas en acción. Límite de función.

Résumé :

Dans cet article, nous présentons une partie de notre recherche de doctorat en cours, dont l'objectif principal est l'étude de l'introduction du concept de limite des fonctions réelles à valeurs réelles au,

¹ Pesquisa parcialmente financiada pela CAPES – PDSE.

² Universidade Federal de Mato Grosso do Sul/Brasil, soniaburigato@gmail.com

³ Universidade Federal de Mato Grosso do Sul/Brasil, joseluizufms2@gmail.com

⁴ Université de Reims Champagne-Ardenne (URCA), França, cecile.ouvrier-buffet@univ-reims.fr

ainsi que le processus de son apprentissage par les étudiants. Nous nous référons à la théorie cognitiviste afin de décrire et analyser les cheminements mentaux des étudiants, lors du traitement des activités introductives du concept de limite, en utilisant la théorie des champs conceptuels de Vergnaud. Nous avons opté de réaliser notre travail expérimental avec des étudiants de licence en mathématique au Brésil, et avec des élèves de lycée en France. Le but est d'effectuer une étude comparative sur le mode d'introduction de ce concept, ainsi que sur les cheminements mentaux des étudiants pour aborder l'acquisition de ce concept. L'un des aspects fondamentaux concerne le niveau scolaire où ce concept est introduit. Au Brésil, il est généralement présenté à l'université, alors qu'en France, cela se passe au lycée. Dans les premières analyses de résolutions d'élèves, nous modélisons des théorèmes en action (appropriés ou non) et également des règles en action liées à ces théorèmes en action. Nous sommes ainsi en mesure d'étudier les premiers schémas utilisés par ces élèves enseignement aux limites de fonctions. Nous avons également cherché à étudier les approximations entre les systèmes utilisés par les étudiants brésiliens et français.

Mots-clés : Schémas. Brésil et France. Théorèmes en action. Limite de fonction.

Abstract

In this article, we present part of our doctoral research actually in progress, whose main goal is to study the learning process of the introduction of the concept of limit of real function, in Brazil and France. In the aim to realize our study on these intellectual paths of students in dealing with introductory activities of the concept of limit, a reference a cognitive theory, related to Vergnaud's theory of conceptual fields, is used. For our experimentation, we selected undergraduate students in mathematics degree in Brazil and a class of high school students in France. The goal is to carry out a comparative study on the mode of introduction of this concept, as well as on the mental pathways of the students to approach the acquisition of this concept. One of the fundamental aspects concerns the school level where this concept is introduced. In Brazil, it is usually presented at the university, while in France, it occurs in high school. In the first analyzes of students' resolutions, we model theorems in action (suitable or not) and also rules in action related to these theorems in action and thus we are able to investigate the first schemas that these students use in dealing with introductory situations for the limit-of-function teaching. We also sought to study the approximations between the schemes used by students from Brazil and France.

Keywords: Schemas. Brazil and France. Theorems in action. Function limit.

Apresentação do trabalho

Este artigo trata de parte de nosso projeto de tese, cujo objetivo principal é estudar a introdução do conceito de limite na disciplina de cálculo I com alunos de uma universidade do Brasil e de comparar com o modelo francês. Neste texto temos a intenção de discutir algumas diferenças observadas na apresentação desse conceito nesses dois países, apresentar um resumo de nossas escolhas metodológicas, bem como exemplificar uma primeira relação de uma aluna francesa, um primeiro conhecimento do conceito de limite de funções.

Uma primeira diferença, que nós observamos entre esses dois países, é que o conceito de limite é introduzido em momentos diferentes do ensino. No Brasil o conceito de limite é apresentado geralmente na universidade, enquanto na França ele é trabalhado desde o *lycée*⁵.

A pesquisa no Brasil foi realizada na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS) com alunos do curso de Licenciatura em Matemática. Como em outras universidades do nosso país, o conceito de limite é introduzido no primeiro ano do curso na disciplina Cálculo I,

⁵ O *lycée* equivale ao nosso ensino médio e é composto por três anos: *seconde*, *première* e *terminale*.

ministrada no segundo semestre. O programa dessa disciplina é composto por: funções de uma variável real, limite e continuidade de funções, derivada, integral e aplicações.

Neste curso, como em muitos outros com a mesma ementa, a apresentação do conceito de limite se dá após uma retomada do estudo de funções, em que se inicia pelo estudo de limite de funções em um ponto, por aproximações intuitivas (sem utilização de uma linguagem mais formal), depois é apresentada uma definição com o uso de ϵ e δ . Em seguida, são apresentados conceitos de continuidade de funções, bem como limites infinitos e no infinito.

Uma das razões para a escolha desse curso está no fato de que esses estudantes nem sempre possuem os conhecimentos matemáticos necessários para a construção do conceito de limite (ARTIGUE, 1995; CORNU, 1991; CURY & CASSOL, 2004), sendo que alguns desses conceitos, como números reais e funções, são considerados como conhecidos pelos alunos. Todavia, muitas das situações que dão sentido a estes conceitos só serão vivenciadas, justamente, no estudo de limite (ARTIGUE, 1995) e, no caso dos licenciandos em matemática, tais dificuldades poderão ter impacto, não somente na construção do conceito de limite, mas também na futura prática profissional desses estudantes, que estão em formação para serem professores da educação básica. Alguns desses conceitos são considerados como de alto nível de complexidade, como a construção de conjuntos numéricos, especialmente os conjuntos dos números racionais, irracionais e reais.

Na França nós fizemos nosso estudo no Lycée Lombards na cidade de Troyes com alunos de uma classe do terminale générale scientifique, Sciences de la vie et de la terre (SVT). No ensino médio do Brasil não existe uma preparação específica, sendo uma abordagem generalista para todos os domínios da matemática, enquanto na França, nessa etapa do ensino o estudante já é preparado para algumas áreas. Nesse nível esses estudantes franceses podem escolher diversas especialidades visando a formação após o *lycée*, como: matemática, química, física, medicina, ciência da computação, entre outras.

Assim, na França o conceito de limite, nessas classes científicas, é introduzido no segundo ano do *lycée* (classe de *première*) e continua no terceiro ano (classe de *terminale*). Primeiramente se trabalha com a noção de tangente de uma curva, tema considerado fundamental no programa do segundo ano. Esse estudo é realizado somente com as funções consideradas regulares, ou seja, já conhecidas. Em seguida é apresentada a noção de sequência, usando igualmente a ideia de limite, e os professores são orientados a trabalhar os conceitos nas suas diferentes representações (algébrica, numérica, geométrica, gráfica e outras) e com o uso de softwares. A palavra “limite” somente deve ser introduzida no último ano do *lycée*, e ela aparece no estudo de limite de sequência. Em seguida vem limite de funções em um ponto, os limites no infinito

($+\infty$ ou $-\infty$) e os limites infinitos ($+\infty$ ou $-\infty$). Contudo, “o trabalho realizado sobre as sequências é estendido às funções, **sem excessiva formalização.**”⁶ (BO, 2011, p. 4).

Vemos que a introdução do conceito de limite, no Brasil e na França, é realizada tanto em momentos diferentes, como também de modos diferentes. Em nossos estudos encontramos diversas pesquisas no Brasil que discutem sobre opções didáticas para superar dificuldades na aprendizagem desse conceito, contendo indicações de retomada de conceitos de base da matemática, a utilização de tecnologias (calculadora e *softwares*), a introdução da ideia de limite pelo estudo de tangentes, ou apresentar já no ensino médio com o estudo de sequência, entre outras. Considerando as diferenças que observamos no ensino desse conceito nesses dois países, temos como questão geral: como os estudantes constroem uma primeira relação, no processo de aprendizagem do conceito de limite? Em seguida, apresentamos o referencial teórico que consideramos pertinente para nossa investigação.

Quadro teórico

Nossa pesquisa tem como objetivo: **Investigar processos de aprendizagem de estudantes quando são apresentados a situações de introdução ao conceito de limite.** Para tal, escolhemos uma teoria cognitivista (VERGNAUD, 1990), que nos permitisse compreender esse processo, considerando as filiações e as rupturas que podem ocorrer nas ações desses sujeitos ao lidarem com essas situações. Além disso, que fosse adequada às especificidades de aprendizagem de um conceito matemático, no caso, o conceito de limite.

Nosso quadro teórico está fundamentado principalmente sobre a teoria dos campos conceituais de Vergnaud (1990, 2002, 2016). Segundo ele um campo conceitual é composto pelo conjunto de situações que dão sentido ao conceito e também pelos conceitos que estão ligados a essas situações. Em nossa pesquisa, são as situações para introdução do conceito de limite de funções e os conceitos que são mobilizados nestas situações, como: função, conjunto dos números reais, infinito, entre outros. Vergnaud define um conceito como um tripé composto por:

- ✓ *Situações*: atividades que dão sentido ao conceito;
- ✓ *Invariantes operatórios*: conhecimentos matemáticos utilizados pelo aluno ao agir (conceitos em ação e teoremas em ação) sobre as situações;
- ✓ *Representações*: as formas linguísticas, ou não, que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento.

⁶Nossa tradução e grifo em negrito.

Vergnaud (1990) diferencia dois tipos de situações: uma em que o sujeito já dispõe de conhecimentos disponíveis para resolver. E outra em que ele não dispõe de todas as competências imediatas para lidar com a atividade. Essa última situação demanda um tempo de reflexão, reconhecimento de algumas similaridades com outras atividades já vivenciadas e possivelmente uma reorganização do pensamento inicial e das escolhas que serão feitas ao longo da ação de tentativa de resolução.

A introdução do conceito de limite se encaixa no segundo caso dessas situações. Exatamente essa organização da ação do sujeito, ao lidar com as atividades introdutórias de limite, que buscamos elementos para identificar caminhos para construção dessa noção. Nesse aspecto, o conceito de esquema de Vergnaud nos parece pertinente para auxiliar em nossa investigação, sendo ele composto por:

- ✓ Um objetivo, ou mais;
- ✓ Regras de ação, de tomada de informação e controle;
- ✓ Invariantes operatórios: conceitos em ação e os teoremas em ação;
- ✓ Possibilidades de inferências.

Esses elementos guiam e orientam a ação do sujeito agindo na situação dada.

Esses quatro componentes são absolutamente essenciais. Intencionalidade, generalidade, conceitualizações se encontram inevitavelmente, mesmo que sejam totalmente implícitas ou mesmo inconscientes. Quanto às inferências, elas são igualmente necessárias: de fato, como o esquema não é um estereótipo, ele sempre chama os "cálculos inferenciais" em situação. O que o cientista faz de forma mais explícita e completa possível pelo raciocínio, o pensamento em ato o faz espontaneamente, de maneira implícita e incompleta na maioria das vezes, mas com certo sucesso. (VERGNAUD, 2002, p. 114, tradução nossa).

Toda atividade é constantemente gerida, ela vai se adaptando conforme são realizadas mudanças no percurso de resolução da situação. É o aluno agindo na situação. Ele seleciona um esquema buscando semelhança na atividade que precisa resolver com outras vivenciadas anteriormente. Por meio das representações conseguiremos identificar os teoremas em ação escolhidos para lidar com a atividade, e assim, buscaremos também modelar esquemas utilizados.

Nosso referencial teórico vem, assim, para caracterizar as diferentes ações organizacionais dos alunos nas situações das atividades propostas. Em particular, nos concentramos nos erros, dificuldades e conhecimentos mobilizados durante todo o processo de resolução do aluno. Esses elementos modelados em termos de invariantes operatórios irão permitir, por um lado, compreender melhor o processo de aprendizagem dos alunos ao lidarem com as situações

propostas. E, por outro, permitirão também fazer a comparação entre os estudantes do Brasil e da França.

Encaminhamentos metodológicos

Nossa investigação busca encontrar elementos para compreender os processos iniciais mobilizados pelos alunos na introdução do conceito de limite de funções. Organizamos nosso estudo buscando:

Primeiramente, nós buscamos caracterizar alguns conceitos de base para delimitar o campo conceitual para as atividades de introdução do conceito de limite no Brasil e na França. Para isso, fizemos um estudo dos documentos oficiais, dos livros didáticos e também de pesquisas que tratam sobre este tema. Em seguida, iniciamos nosso estudo mais especificamente em cada país, sendo que iniciamos no Brasil e depois continuamos na França.

No Brasil, após delimitação do campo conceitual, nós elaboramos um questionário, com objetivo de conhecer um pouco mais sobre os estudantes, tanto com relação às dificuldades em conceitos matemáticos, como também saber se eles já conheciam o conceito de limite e se estavam interessados em participar de nosso estudo. Em seguida, acompanhamos algumas aulas da professora da disciplina e, em seguida, aplicamos as atividades que versavam sobre:

- (a) Situações em que tomamos valores próximos de um ponto do domínio para verificar o que acontece com os valores da função;
- (b) Estudo de limite finito de uma função em um ponto;
- (c) Estudo de limites no infinito ($+\infty$ ou $-\infty$) e de limites infinitos em um ponto.

As atividades foram elaboradas considerando nossos estudos sobre o ensino e aprendizagem do conceito de limite, pautadas principalmente nos estudos de Cornu (1983, 2002), Artigue (1995) e Tall e Vinner (1981). Contudo, buscamos selecionar atividades próximas ao que é trabalhado em sala de aula e também nos livros didáticos (BARUFFI, 1999), pois estávamos interessados em investigar as primeiras escolhas dos alunos ao lidarem com a noção introdutória de limite de função proposta pelo ensino. A maioria das atividades foi trabalhada com a definição intuitiva de limite de função⁷.

Iniciamos nossa experimentação em dezembro de 2016 trabalhando com os conjuntos de atividades (a) e (b). Os alunos resolveram essas questões em dupla, pois estávamos interessados também nas discussões que eles fariam ao lidarem com essas atividades. Solicitamos que cada estudante resolvesse a questão na sua folha de atividade e que depois discutisse com o seu colega a resolução encontrada. Fizemos a gravação em áudio durante toda a experimentação.

⁷Utilizamos a expressão definição intuitiva conforme os livros didáticos, em particular o do Guidorizzi (2001).

Após a aplicação dessas atividades em dezembro fizemos uma entrevista com os alunos com questões referentes às atividades aplicadas. Relativa aos elementos que consideramos importantes para nossa investigação que foram observados nas produções escritas, como também nas falas obtidas pelos áudios. Escolhemos trabalhar com entrevista semiestruturada por permitir direcionar as questões para nosso objeto de estudo, mas, ao mesmo tempo, podemos inserir outras perguntas durante a entrevista, o que seria importante em função de elementos que poderiam surgir nas respostas dos alunos e que precisaríamos compreender melhor.

Em janeiro de 2017 retomamos a experimentação com os alunos trabalhando com o conjunto de atividades (c), novamente todos os encontros foram gravados em áudios, mas os alunos deveriam resolver as atividades nas folhas e só poderiam discutir com um colega no final, após finalização da sua resolução na forma escrita.

Cinco meses após a aplicação das últimas atividades nós fizemos uma última entrevista com os alunos, sobre todas as resoluções das atividades que eles realizaram. Em seguida, apresentamos um quadro com resumo das atividades aplicadas com suas respectivas datas.

Como todas as atividades e as entrevistas, foram gravadas em áudio, conseguimos elementos para produção de dados tanto na forma escrita, como também oral, sendo que em alguns momentos as produções orais dos alunos foram às discussões realizadas entre eles durante a resolução das atividades. Desse modo, conseguimos uma quantidade de dados interessante para nossa investigação com esses estudantes brasileiros.

Quadro 1 - Síntese da experimentação no Brasil

Atividades	Itens e datas de aplicação
Questionário	Final de novembro de 2016
Atividades 1, 2 e 3 sobre funções	05/12/2016 – Apresentação da pesquisa e atividade 1 07/12/2016 – Atividades 2 e 3
Atividades 1, 2, 3 e 4 sobre limite finito de função em um ponto	09/12/2016 – Atividade 1 e início da atividade 2 12/12/2016 – Finalização da atividade 2 e 3 14/12/2016 – Atividade 4
1º entrevista	16/12/2016
Atividades de 1 até 13 sobre limites infinitos e limite no infinito	23/01/2017– Atividades 1 a 5 25/01/2017– Continuação da atividade 5 e atividade 6 27/01/2017– Atividades 7, 8, 9, 10, 11, 12 e início da atividade 13 30/01/2017– Continuação da atividade 13
2º entrevista	25/07/2017

Fonte: Dados da pesquisa

Com esses dados modelamos os conhecimentos utilizados pelos alunos em termos de teoremas em ação adequados (ou inadequados) para a situação trabalhada, bem como as regras em ação relacionadas ao esquema mobilizado para lidar com a situação. Sabemos que somente podemos

dizer que o aluno tem determinado teorema em ação se observarmos esse conhecimento ser utilizado em várias situações similares e ao longo de algum tempo. Em nossa pesquisa utilizamos o conceito de teoremas em ação⁸ como elemento dos esquemas que estão sendo construídos, ou adaptados, pelos alunos ao lidarem com as atividades introdutórias para o estudo de limite.

Assim, fizemos essa escolha para podermos estudar os primeiros esquemas utilizados pelos alunos para lidar com as atividades para introdução do conceito de limite. Com isso, poderíamos investigar como os estudantes organizam seus esquemas de raciocínio e quais conceitos são mobilizados nesses esquemas. Além disso, essa modelagem nos permite fazer um estudo comparativo das escolhas realizadas pelos alunos brasileiros e franceses ao lidarem com situações similares para o estudo do conceito de limite de função.

Em nosso estágio na França iniciamos complementando nossa pesquisa documental, estudando os programas para o *lycée* e também o livro didático utilizado pela professora da turma que iríamos acompanhar. Em seguida elaboramos uma grade de análise para acompanharmos algumas aulas dessa professora. Como o conceito de limite é estudado ao longo do segundo e terceiro ano do *lycée*, nós optamos por acompanhar a introdução do conceito de limite de função no terceiro ano, que ficava o mais próximo das atividades aplicadas no Brasil.

A grade de análise tinha como objetivo identificar diferentes momentos do trabalho da professora, os pontos seguintes são alguns indicativos, mas não exaustivos como:

- ✓ Quais conceitos eram retomados para introdução do conceito de limite? Quais representações (geométrica, algébrica, gráfica, funcional, numérica, etc.), definições, propriedades são retomadas e introduzidas? Quais problemas são utilizados? Quais dentre os conceitos relacionados (número real, outros conceitos envolvidos nesse campo conceitual) são mobilizados? Como eles são representados?
- ✓ Como são as atividades de introdução? Utiliza problemas? Quais representações são utilizadas?
- ✓ Como é feita a institucionalização? Apresenta uma definição intuitiva, formal ou propriedades?
- ✓ Como são planejados os reinvestimentos do conceito? Como eles ocorrem?

Após acompanharmos as aulas da professora nós elaboramos e aplicamos um questionário similar ao que aplicamos nos alunos do Brasil, em que buscamos mais elementos para

⁸ Somente dizemos que determinado estudante tem um teorema em ação adequado (ou inadequado) quando identificarmos sua utilização repetidamente em suas ações.

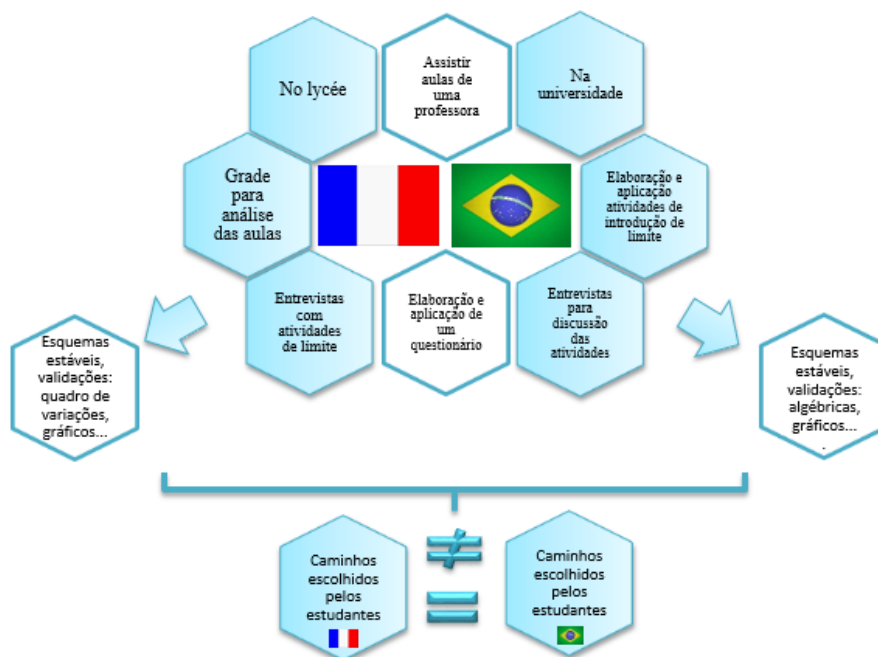
elaboração de nossas atividades para entrevista, como também identificar possíveis alunos para participar de nosso estudo. Inserimos também algumas questões sobre limite de funções, pois gostaríamos de ter mais elementos relacionados ao nosso objeto de estudo já que eles haviam acabado de trabalhar com as atividades de introdução a esse conceito.

Esse questionário, juntamente com a grade de análises das aulas da professora da turma, norteou a elaboração de nossas questões para entrevista. Escolhemos seis questões sobre limite de função, próximas ao que trabalhamos com os alunos brasileiros, sendo que uma delas era igual. Ao iniciarmos a entrevista o aluno recebia uma folha com uma atividade inicial, que deveria ser revolvida na folha e após ele iria explicando como fez, justificando suas escolhas. Conseguimos coletar dados escritos, nas folhas que disponibilizamos para as resoluções, como nas falas dos alunos, pelos áudios, tanto ao nos explicar como havia resolvido a atividade, como também quando fazíamos mais questionamentos em função de suas explicações.

Desse modo, conseguimos mais elementos para podermos produzir nossos dados e, assim, modelarmos em termos teóricos. Particularmente em teoremas em ação adequados (ou inadequados) com suas regras em ação (VERGNAUD, 1990), buscando investigar os primeiros esquemas mobilizados para lidar com as atividades introdutórias do conceito de limite de função. Bem como, possíveis aproximações, ou diferenças, entre conhecimentos mobilizados por alunos brasileiros e franceses

Esta comparação é pertinente devido ao fato de investigarmos o mesmo conceito e também o referencial teórico de Vergnaud (1990, 2016), mais especificamente os conceitos de esquema e de teorema em ação. Trazemos na figura 1 um resumo com as ações realizadas para nossa pesquisa no Brasil como também a da França.

Figura 1: Resumo com as principais ações realizadas para investigação



Fonte: Autores deste texto

Atualmente estamos em processo de análise dos dados produzidos por nossa experimentação nesses dois países. Como citamos, nós modelamos teoremas em ação, fossem adequados ou não, e as regras em ação relativas a esses teoremas em ação, sempre vinculadas aos casos de limites trabalhados. Buscamos identificar as inferências e também os meios de controle do estudante considerando tanto as situações, como também as representações utilizadas nas atividades e na ação do estudante ao lidar com a atividade.

Trabalho em andamento, primeiras análises e perspectivas

A entrevista na França teve duração de aproximadamente uma hora, durante a qual o aluno resolvia uma atividade e, em seguida, era questionado sobre suas escolhas. Nosso objetivo era buscar elementos para identificar os esquemas mobilizados por eles.

O processo de aprendizagem de um novo conceito é longo e é construído subsidiado pelos conhecimentos e esquemas mais estáveis que o aluno dispõe. No caso dos alunos da França, eles já tinham visto limite de sequência um pouco antes de limite de funções. Assim, alguns esquemas para lidar com situações de limite já estavam em processo de construção e, possivelmente, sendo ampliados e ou modificados para o estudo com os limites de funções.

Esse movimento de construção não é realizado de modo linear, nem se dá de maneira lógica e resumida como aparece nas definições. Para Vergnaud (1990), o enfrentamento das situações é que irão dar sentido ao conceito. O aluno vai fazendo filiações com o que compreendeu de cada atividade que ele teve de lidar, e, assim, vai modificando seus esquemas, ou mesmo abandonando para poder criar outros.

Uma de nossas alunas entrevistada na França estava tendo muita dificuldade em compreender o conceito de limite, e, segundo ela, suas resoluções estavam sempre orientadas pelo comportamento das funções de referência⁹ e pelo quadro de variações de limite.¹⁰

Entretanto, um ponto a se considerar é que para utilizar esses quadros que a aluna citou em sua fala, primeiramente precisaria tê-los memorizado. Eram quatros, mas ela só conseguiu se lembrar de um desses quadros de variação de limite (Figura 2).

Este é o quadro da divisão, em que aparecem alguns limites de função que após substituição recai em uma dessas três possibilidades. Na primeira coluna o resultado será zero, na segunda e na terceira irá recair em uma indeterminação.

Figura 2: quadro de variação de limite apresentado por uma aluna.

lim	$l \neq 0$	$l = 0$	∞
	$+\infty$	0	∞
	0	FI	FI

Fonte: Dados da pesquisa

Outro aspecto a ser considerado é que se trata de um quadro resumido, com muitas informações omitidas, que precisam ser compreendidas pelos estudantes. No caso dessa aluna, ela utilizou esse quadro nos casos de limite em que apareciam funções semelhantes à função $f(x) = \frac{1}{x}$. Contudo, seus esquemas estão orientados inicialmente pela regra em ação que modelamos como: “quando eu estudo um limite de uma função que se assemelha a uma função de referência, eu sei que o limite será o mesmo da função referência”. Entretanto, ela não leva em consideração o valor para onde o x está tendendo quando trabalha com determinados casos, como o dessa função citada. Vejamos na figura 3, dois exemplos em que ela reconhece semelhança com a função referência e aplica o que compreendeu de um dos quadros de limite.

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1 \text{ car limite de } -\frac{1}{x} = 0$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2/x + 1}{1} = \frac{1}{1} = 1 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} = 0$$

Figura 3: Parte das resoluções da aluna nas questões (2) e (3).

Nessas duas questões, a aluna se lembra do resultado do quadro e da função referência $f(x) = \frac{1}{x}$. Nessa atividade utiliza o que modelamos como sendo um teorema em ação inadequado (TAI)

⁹ As funções de referências, ou de base, são as que aparecem nos programas de ensino para serem trabalhadas no *lycée*, como as funções: de 1º grau, de 2º grau, $\frac{1}{x}$, $\sin x$, $\cos x$, $\lg x$, logarítmicas, etc.

¹⁰ É um quadro com resumo de alguns limites que podem ser utilizados diretamente.

“O limite de uma função $f(x) = \frac{n}{x}$, $n > 0$ e $x \in \mathbb{R}$ tende a zero, independente do valor que x tende”. Mesmo no caso em que o limite poderia ser resolvido por substituição direta, como podemos ver na figura 3 no exemplo (2), quando x tende a 1, ela buscou utilizar esse teorema que considerava adequado, no caso para quando x tende a infinito. Identificamos esse teorema em ação em sete momentos durante suas resoluções, e também na falas, em três questões da entrevista.

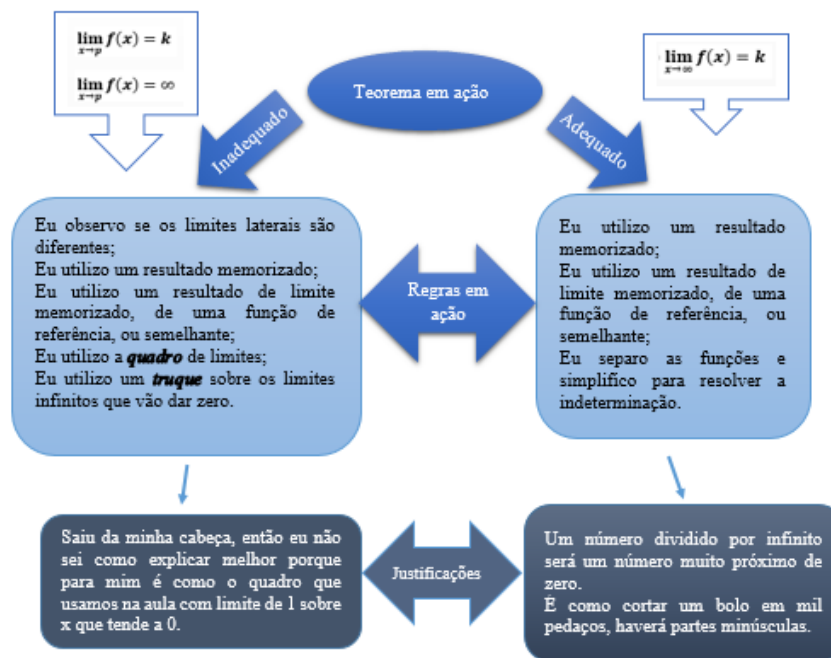
Esse esquema parece ser um caminho que ela acredita ser pertinente e busca compreender, mas que está causando certo desconforto, pois quando indagada sobre sua resolução ela diz “*Há um truque com os infinitos e o zero, porque um sobre x vai tender a zero e de repente...eu não sei*”. Ela fica insegura sobre sua resposta e diz que o conteúdo de limite não é seu conteúdo preferido em matemática e que esse resultado “*Saiu da minha cabeça, então eu não sei como explicar melhor porque para mim é como o quadro que usamos na aula com limite de 1 sobre x que tende a 0, então...*”

Nessas atividades também havia limites em que o teorema que ela utilizou era adequado. Nesse caso, quando x tende a infinito (+ ou -), ela resolveu corretamente, mas não se deu conta de que havia um problema para os outros itens da atividade. Acreditamos que isso aconteceu, em parte, porque ela ainda não levou em consideração para onde o x tende no limite, observamos isso acontecer em outros momentos, há casos em que ela nem escreve essa parte da expressão, como vimos na figura 3 no final da parte da resolução da questão (3). Ela ainda não compreende a expressão algébrica do limite corretamente, mobiliza esquemas que foram efetivos para situações de funções em que ela busca adequar para os casos de limite que conhece. Contudo, suas inferências e meios de controle são ainda partes incompreendidas desse novo conceito, como o quadro de valores de limite de função. Outro meio que poderia auxiliar seria a representação gráfica, mas ela disse que não sabia fazer nenhum deles sem utilizar uma calculadora gráfica; apesar de que um desses gráficos era similar ao da função referência que eles trabalham quando lidam com situações que envolvem funções, no caso a função $f(x) = \frac{1}{x}$. Poderíamos inferir que seu maior empecilho em aprimorar seus esquemas fosse por não compreender a expressão algébrica de limite, já que parece que ela não leva em consideração para onde o x tende em alguns casos. Porém, vimos que quando ela utiliza esse teorema em ação que citamos para as atividades em que ele é adequado, seu esquema nos mostra indícios que está sendo reorganizado.

Inferimos isso analisando as diferenças entre as regras em ação que modelamos, para o uso desse mesmo teorema em ação. Vejamos abaixo na figura 4, as indicações de uso desse teorema em ação para os três casos de limite, separando nas situações que foram adequadas e inadequadas vinculadas as regras em ação que modelamos.

Vemos que quando ela utiliza esse teorema em ação inadequadamente, ela não consegue explicar o motivo da sua escolha, sempre se refere ao quadro com o resultado de alguns limites e ao fato de que existe um caso em que o limite da função $f(x) = \frac{1}{x}$ tende a zero. No entanto, nos momentos em que o teorema em ação é adequado para atividade ela não cita nem o quadro nem a ideia de que existe um “truque”. A estudante busca justificar o resultado do limite, de modo intuitivo, mas se preocupando com o que está acontecendo com os valores de x da função e, inclusive, busca exemplificar com o caso da divisão de um bolo. Inferimos que esse esquema para o caso em que o teorema em ação é adequado, não é simplesmente uma coincidência em suas escolhas, mas é um esquema que ela tem confiança na sua efetividade, e talvez, por isso, esteja tentando aplicar nas outras situações. Como ela não consegue explicar, busca justificar pelos quadros que ela não se lembra ou pela ideia de que existem coisas que não entende e denomina de “truque” com os infinitos.

Figura 4: Diferenças na utilização do mesmo teorema em ação



Fonte Construção dos autores

As ideias dos infinitamente pequenos, ou infinitamente grandes, não são fáceis para os estudantes, sendo que para alguns deles podem ser muito complicados nesse processo introdutório do conceito de limite de função (CORNU, 1983). Além disso, envolvem conceitos de números reais e de funções que, em geral, só são vivenciados pelos estudantes ao lidarem com essas situações de limite (ARTIGUE, 1985). Essa aluna está processando todos esses elementos buscando nos esquemas utilizados para o estudo dos limites das sequências filiações com as novas situações de limites de funções. Contudo ela ainda não tinha esquemas totalmente eficazes e está buscando fazer filiações e, de certo modo tentando lidar e entender as rupturas que precisam ser realizadas.

Atualmente continuamos nossas análises das produções dos alunos franceses, e finalizando a de um estudante brasileiro, buscado levantar elementos do caminho intelectual percorrido por esses estudantes, modelados pelos elementos teóricos que apresentamos. Para ao final, também fazemos uma comparação mais refinada com as produções dos alunos brasileiros e franceses.

Referências

ARTIGUE, M. La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In **Ingeniería Didáctica em Educación Matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas**. Grupo Editorial Iberoamérica. Bogotá, 1995, p. 97-140.

BARUFI, M. C. B. **A Construção/negociação de Significados no Curso Universitário Inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. Tese de Doutorado. USP-SP, 1999.

Bulletin Officiel (B. O.) BO Spécial n° 9 du 13 octobre 2011. **Programmes des Mathématiques. Classe de Terminale**. 2011. Disponible en : <www.education.gouv.fr>.

CORNU, B. **Apprentissage de La notion de limite: conceptions et obstacles**. Tese de doutorado - Universidade de Grenoble. 1983.

CURY, H. N.; CASSOL, M. **Análise de erros em Cálculo: uma pesquisa para embasar mudanças.** ACTAS CIENTIAE, Canoas, v.6, p.27-36, 2004.

TALL, D.; Vinner, S. Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity, **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, 1981 vol. 3, n. 12, p. 151-169.

VERGNAUD, G. La théorie de champs conceptuels. **Recherches en Didactique de Mathématiques**, Editora La Pensée Sauvage, Grenoble, França, 1990, v.10, n.2.3, p.133-170.

_____. Quais questões a teoria dos campos conceituais busca responder? Anais: **LADIMA - I Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática.** Bonito - Mato Grosso do Sul, 2016.